Vorbemerkung: Wenn der Satz stimmt, daß jede Formel eines Textes die Leserzahl halbiert, dann brauche ich bei grob geschätzt 40 Formeln etwa $2^{40} = 10^{12}$ Exemplare, um einen Leser zu haben. Tun Sie bitte etwas dazu, daß sich dieser Leser schon unter den ersten 80 Kandidaten befindet!

1. Anhang: Spline-Funktionen

1.1. Allgemeines

1.2. Definition kubischer Splines

Ein kubischer Spline $S(x)$ ist stückweise aus Polynomen 3. Grades zusammengesetzt, die an den Nahtstellen zweimal stetig differenzierbar sind. Die dritte Ableitung muß an den Nahtstellen nicht mehr stetig sein. Die Nahtstellen werden Knoten des Splines genannt und gehören als geordnete Folge von $n+1$ Zahlen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ im Intervall $[a,b]$ zum Spline. Die Bezeichnung der Knotenabstände ist $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$. Die Funktion $S(x)$ ist also ein kubischer Spline, wenn $S(x)$, $S'(x)$ und $S''(x)$ existieren und stetig sind und wenn $S(x)|_{x\in[x_j,x_{j+1}]} = a_3^{(j+1)}x^3 + a_2^{(j+1)}x^2 + a_1^{(j+1)}x + a_0^{(j+1)}$ ein Polynom dritten Grades ist.
Um das Ganze zu veranschaulichen, finden Sie in Abb. 1 einen natürlichen, kubischen Spline mit 8 Knoten im Intervall $[-1,7]$, der die Funktion $f(x) = \sin(x)$ an den Knoten interpoliert. Die Knoten sind bewußt nicht gleichmäßig verteilt, sondern häufen sich rechts, so daß Sie den Einfluß der Knotendichte sehen können. Da der Spline natürlich ist, ist seine zweite Ableitung an den Rändern Null und er kann dem $\sin(x)$ nur schlecht folgen, der bei -1 und 7 diese Eigenschaft nicht besitzt.

1.3. Berechnung kubischer Splines

Eine Möglichkeit der Berechnung kubischer Splines geht von den (noch unbekannten) Momenten $M_j = S''(x_j), j = 0, \ldots, n$, also den zweiten Ableitungen des Splines an den Knoten, aus.

1.3.1. Die Momente

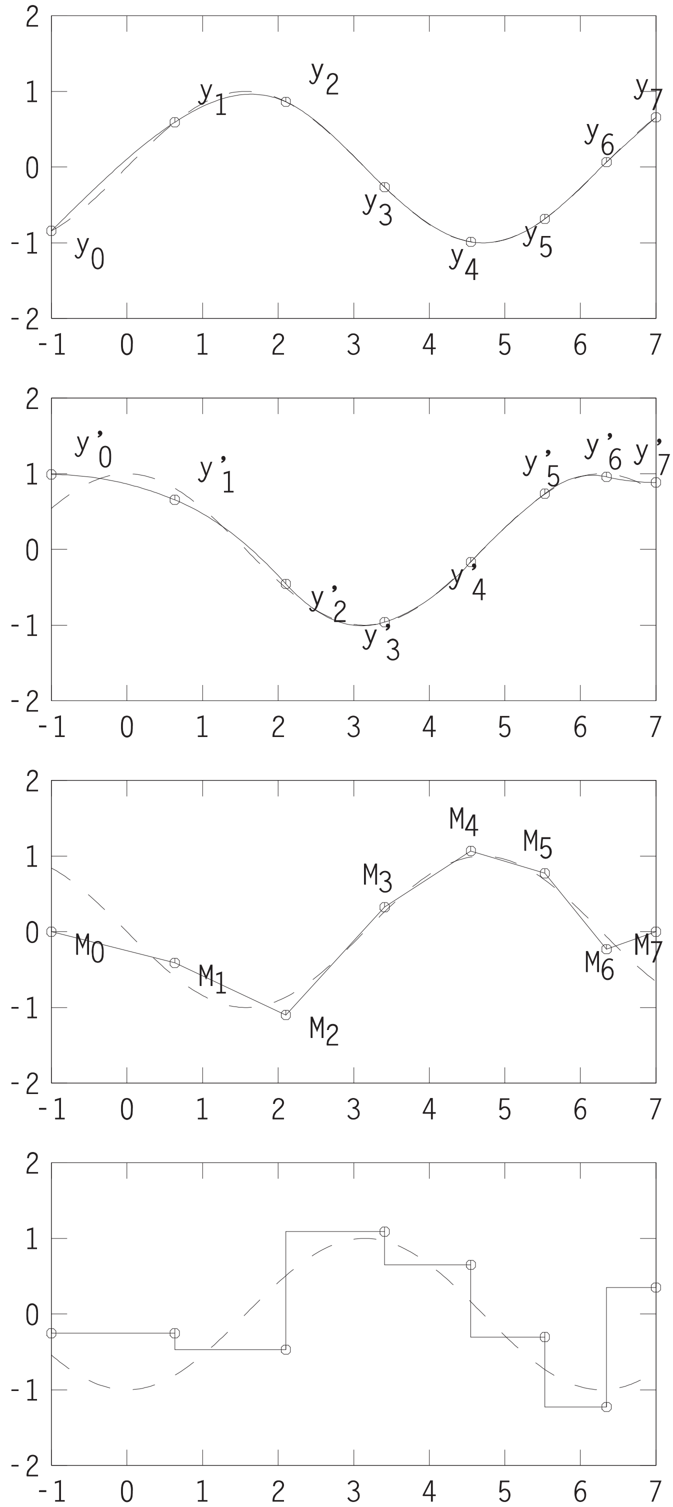
Da $S''(x)$ aus stetig aneinandergesetzten Geradenstücken besteht, kann man $S''(x)$ sofort hinschreiben und $S'(x)$ und $S(x)$ durch Integration gewinnen:

$$S''(x)|_{x\in[x_j,x_{j+1}]} = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}}$$

$$S'(x)|_{x\in[x_j,x_{j+1}]} = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + A_j$$

$$S(x)|_{x\in[x_j,x_{j+1}]} = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x - x_j) + B_j$$

Dabei sind A_j und B_j die Integrationskonstanten.



Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-1, 7]$ (gestrichelt), willkürliche Knotenmenge und interpolierender natürlicher Spline (durchgezogen)

Ableitung der Funktion und des Splines

Zweite Ableitung der Funktion und des Splines. Die Werte M_i der 2. Ableitung des Splines an den Knoten heißen Momente und spielen bei der Berechnung des Splines eine Rolle. Der Spline ist natürlich, wenn die Randmomente verschwinden, war hier bewußt nicht zur gewählten Funktion paßt

Dritte Ableitung der Funktion und des Splines. Die 3. Splineableitung ist nicht mehr stetig, folgt aber der 3. Funktionsableitung mit der Genauigkeit einer guten Treppenfunktion

Abb. 1: Natürlicher kubischer Spline

1.3.2. Die Integrationskonstanten

Es bleibt noch die Berechnung der Integrationskonstanten A_j und B_j und der Momente M_j. Die Integrationskonstanten erhält man aus der Bedingung, daß der Spline an den Knoten durch die vorgegebenen Funktionswerte y_j gehen muß:

$$S(x_j) = M_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x_j - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x_j - x_j) + B_j = M_j \frac{{h_{j+1}}^2}{6} + B_j \overset{!}{=} y_j$$

$$S(x_{j+1}) = M_j \frac{(x_{j+1} - x_{j+1})^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x_{j+1} - x_j) + B_j =$$
$$= M_{j+1} \frac{{h_{j+1}}^2}{6} + A_j h_{j+1} + B_j \overset{!}{=} y_{j+1}$$

Es ergibt sich:

$$B_j = y_j - M_j \frac{{h_{j+1}}^2}{6}$$
$$A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} + M_j \frac{h_{j+1}}{6} - M_{j+1} \frac{h_{j+1}}{6}$$

Die Stetigkeit der Splinefunktion ist damit automatisch gewährleistet, denn in den angrenzenden Teilintervallen gilt dieselbe Forderung.

1.3.3. Die Berechnung des Splines

Durch Einsetzen der Integrationskonstanten und mit $x_{j+1} - x = h_{j+1} - (x - x_j)$ erhält man nach ein paar Zeilen Rechnung die entgültigen Formeln zur Berechnung kubischer Splines, wenn man die Momente $M_j, j = 0, n$ als bekannt voraussetzt:

$$S(x) = y_j + (x - x_j)\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(2M_j + M_{j+1})\right) + (x - x_j)^2 \frac{M_j}{2} + (x - x_j)^3 \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}$$

$$S'(x) = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(2M_j + M_{j+1})\right) + (x - x_j)M_j + (x - x_j)^2 \frac{M_{j+1} - M_j}{2h_{j+1}}$$

$$S''(x) = M_j + (x - x_j)\frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}}$$

$$S'''(x) = \frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}}$$

1.3.4. Berechnung der Momente

Die Momente ergeben sich aus der Forderung nach der Stetigkeit der Ableitung des Splines $S'(x_j) := S'(x_j+) \overset{!}{=} S'(x_j-)$ und den gerade aufgeführten Formeln:

$$S'(x_j+) = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(2M_j + M_{j+1})\right)$$

$$S'(x_{j+1}-) = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(2M_j + M_{j+1})\right) + h_{j+1}M_j + {h_{j+1}}^2 \frac{M_{j+1} - M_j}{2h_{j+1}}$$

$$S'(x_j-) = (\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2M_{j-1} + M_j)) + h_j M_{j-1} + h_j \frac{M_j - M_{j-1}}{2}$$

Die Forderung $S'(x_j) := S'(x_j+) \stackrel{!}{=} S'(x_j-)$ ergibt:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(2M_j + M_{j+1}) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2M_{j-1} + M_j) + h_j M_{j-1} + \frac{h_j}{2}(M_j - M_{j-1})$$

Durch Umordnung entsteht:

$$\frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} M_{j-1} + 2M_j + \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} M_{j+1} = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

Dieses Gleichungssystem kann etwas übersichtlicher geschrieben werden:

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \ldots, n-1$$

mit

$$\mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$$

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j})$$

Durch dieses Gleichungssystem sind allerdings die M_j nicht eindeutig bestimmt – es gibt $n + 1$ Momente, aber nur $n - 1$ Gleichungen! Man kann also zwei weitere Forderungen an den Spline stellen. Üblich ist eine von drei Standardmöglichkeiten – natürliche Splines, Splines mit Randableitung und periodische Spines – und darüberhinaus alles Mögliche, was Sie sich vielleicht für so einen armen Spline ausdenken.

1.3.5. Natürliche Splines

Natürliche Splines sind natürlich Splines, bei denen die zweite Ableitung an den Randknoten Null ist, $S''(a) = S''(b) = 0$ – darauf wären Sie sicher auch gekommen! Der Grund für diesen Namen ist lediglich, daß der Spline dann besonders einfach zu berechnen ist, denn dann ist

$$M_0 = 0$$

$$M_n = 0$$

Man kann diese Forderung direkt erfüllen, indem man im obigen Gleichungssystem nur $M_1 \ldots M_{n-1}$ berechnet. Man kann diesen Spezialfall aber auch mitberechnen, indem man im Gleichungssystem zwei zusätzliche Gleichungen einfügt:

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0$$

$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\lambda_0 = 0$$

$$\mu_n = 0$$
$$d_0 = d_n = 0$$

Warum das so natürlich ist? Na weil hier alles ganz einfach Null ist! Übrigens, man verwendet natürliche Splines auch immer dann, wenn einem nichts Besseres einfällt, d.h. wenn die beiden anderen Arten nicht in Frage kommen.
Das vorherige Beispiel aus Abb. 1 zeigt einen natürlichen Spline, den man daran erkennt, daß seine zweiten Ableitungen an den Rändern Null sind.

1.3.6. Splines mit Randableitung

In einer besonders komfortablen Situation sind Sie, wenn Sie genau oder ungefähr die Ableitungen y_0', y_n' der Funktion an den beiden Randknoten kennen und für den Spline vorgeben: $S'(a) \stackrel{!}{=} y_0'$, $S'(b) \stackrel{!}{=} y_n'$. Durch Einsetzen erhält man zwei zusätzliche Gleichungen

$$S'(x_0) = (\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2M_0 + M_1)) + (x_0 - x_0)M_0 + (x_0 - x_0)^2 \frac{M_1 - M_0}{2h_1} \stackrel{!}{=} y_0'$$

$$S'(x_n) = (\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_n}{6}(2M_{n-1} + M_n)) + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} + (x_n - x_{n-1})^2 \frac{M_n - M_{n-1}}{2h_n} \stackrel{!}{=} y_n'$$

Durch Umordnen kann man diese Gleichungen ins obige Gleichungssystem integrieren und alle M_j in einem Schritt berechnen:

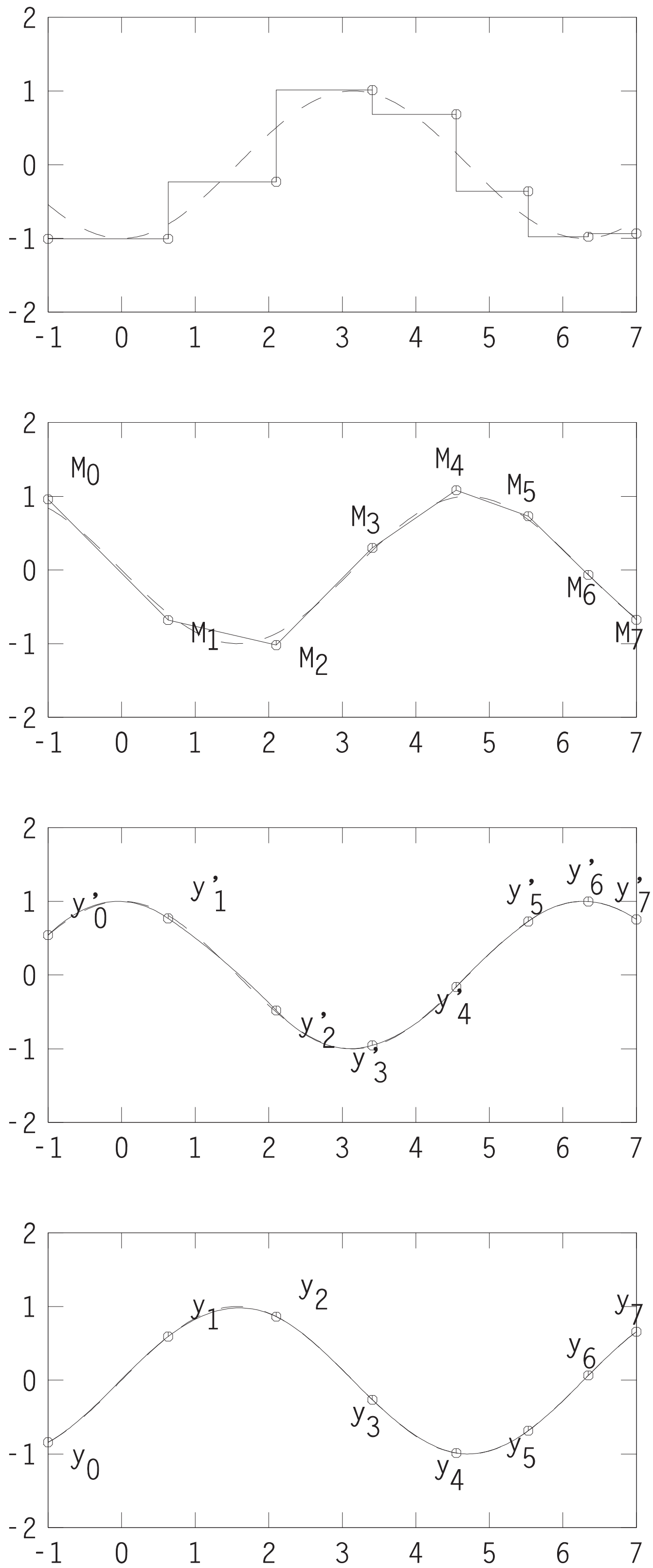
$$\lambda_0 = 1$$
$$\mu_n = 1$$
$$d_0 = \frac{6}{h_1}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0')$$
$$d_n = \frac{6}{h_n}(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n})$$

In Abb. 2 sehen Sie, daß der Spline sich der vorgegebenen Kurve wesentlich besser anpaßt als der natürliche Spline, wenn die Randableitungen korrekt eingesetzt werden.
Falls die Randableitungen nicht genau bekannt sind und geschätzt werden, „startet“ der Spline falsch und wird wesentlich schlechter. Im folgenden Beispiel der Abb. 3 wurden die Randableitungen aus den Randintervallen abgeschätzt. Dabei entsteht immer in beiden Randintervallen ein meist falscher (weil nicht in der Originalfunktion vorhandener) Wendepunkt.

1.3.7. Berechnung natürlicher Splines und Splines mit Randableitung

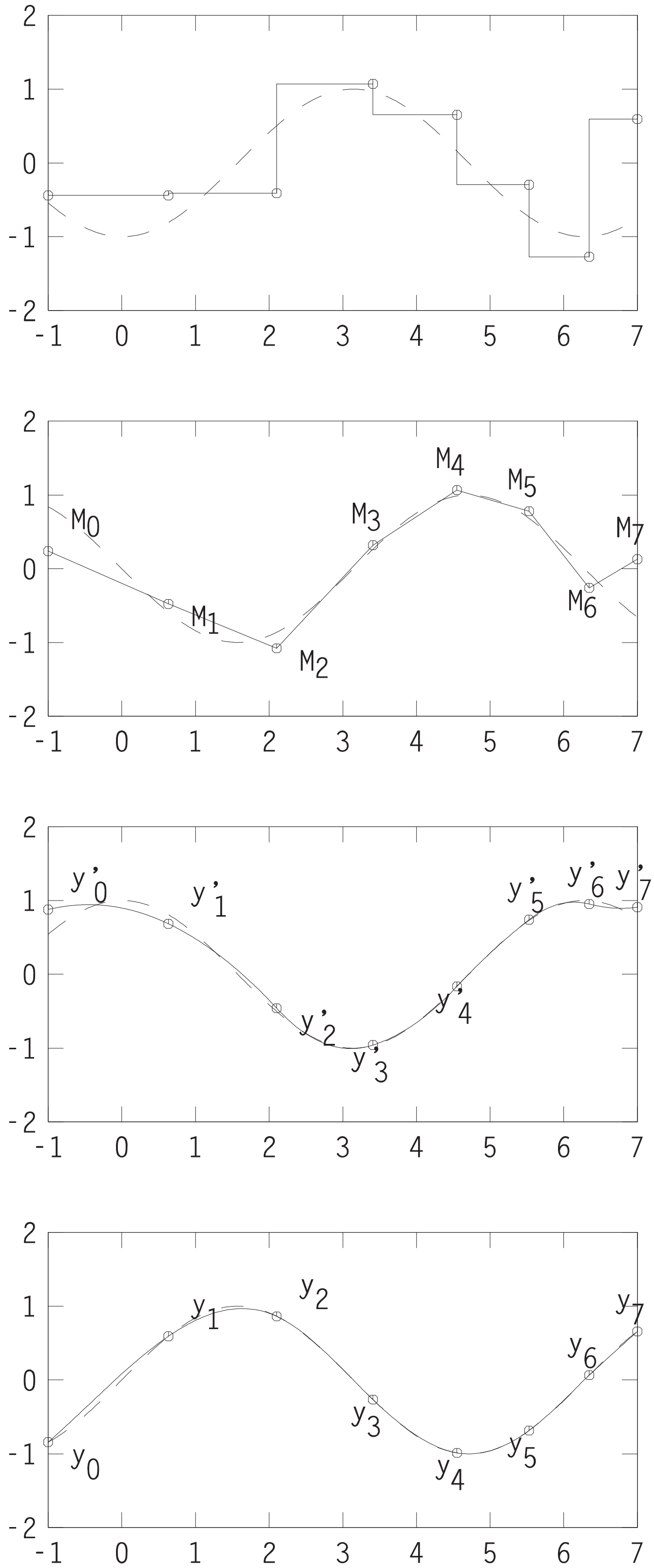
Für beide Fälle entsteht ein Gleichungssystem von $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten $M_j, j = 0, \dots, n$, das wegen seiner Bandstruktur mit einfachen Algorithmen gelöst werden kann:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \dots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$



Spline bei dem die Randableitungen y_0' und y_n' zusätzlich zur Berechnung verwendet werden

Abb. 2: Spline mit Randableitungen



Spline bei dem Näherungen der Randableitungen y_0' und y_n' zusätzlich zur Berechnung verwendet werden. In der zweiten Ableitung zwischen M_6 und M_7 kann man gut den falschen zusätzlichen Wendepunkt wahrnehmen

Abb. 3: Spline mit geschätzten Randableitungen

1.3.8. Periodische Splines

Wenn man eine im Intervall $[a, b]$ periodische Funktion vorliegen hat, kann man auch einen dazu passenden periodischen Spline berechnen. Das ergibt die folgenden Zusatzforderungen:

$$S(x_0) = S(x_n), \quad y_0 = y_n$$

$$S'(x_0) = S'(x_n)$$

$$S''(x_0) = S''(x_n), \quad M_0 = M_n$$

Die erste Bedingung muß durch die vorgegebenen Funktionswerte erfüllt sein. Die letzte Bedingung kann erfüllt werden, indem man nur M_n berechnet und im Gleichungssystem M_0 durch M_n ersetzt. Dabei wird lediglich die erste Gleichung verändert. Und die mittlere Bedingung führt zu einer zusätzlichen Gleichung

$$S'(x_0) = (\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2M_0 + M_1)) + (x_0 - x_0)M_0 + (x_0 - x_0)^2 \frac{M_1 - M_0}{2h_1} \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} S'(x_n) = (\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_n}{6}(2M_{n-1} + M_n)) + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} + (x_n - x_{n-1})^2 \frac{M_n - M_{n-1}}{2h_n}$$

Durch Umordnen entsteht die zusätzliche Gleichung

$$\frac{h_1}{h_1 + h_n} M_1 + \frac{h_n}{h_1 + h_n} M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_1 + h_n}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n})$$

Sie läßt sich mit zusätzlichen Zahlen

$$\lambda_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n}$$

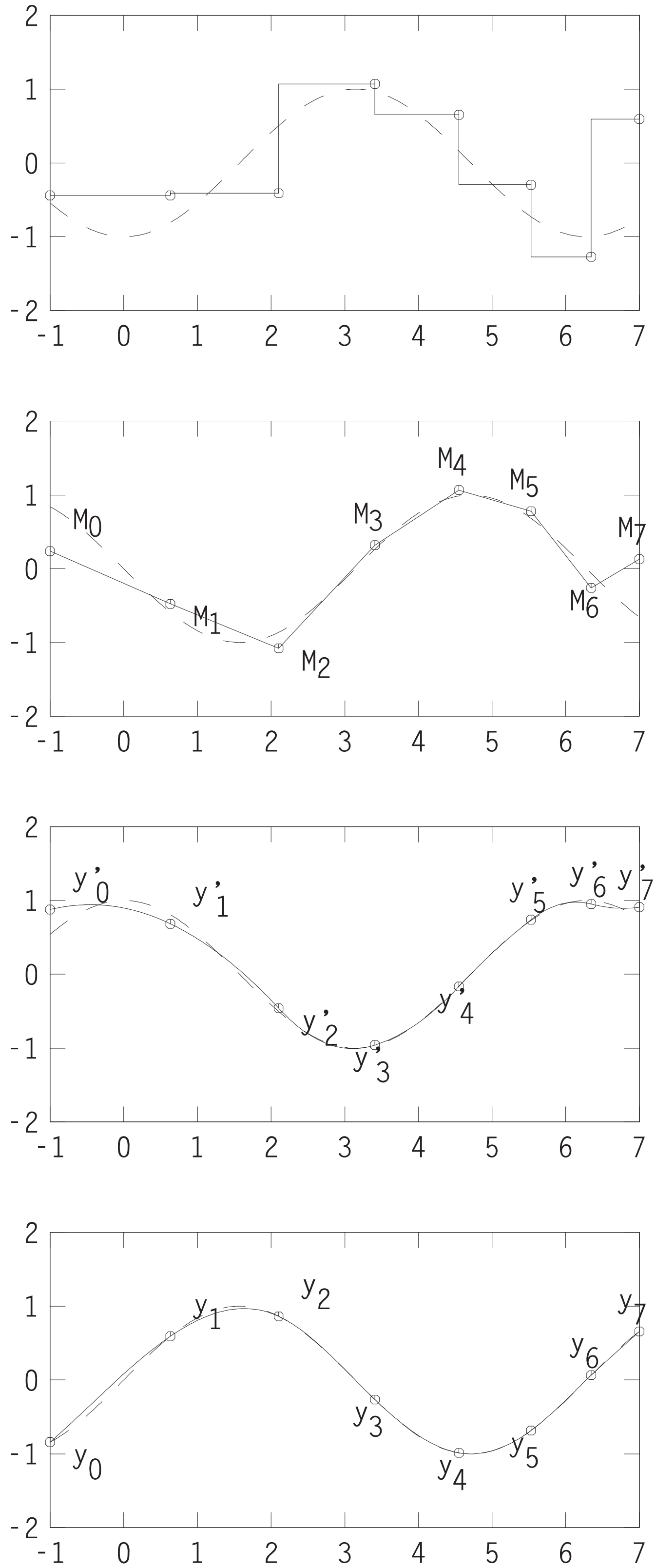
$$\mu_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n}$$

$$d_n = \frac{6}{h_1 + h_n}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n})$$

wieder ins Gleichungssystem einfügen:

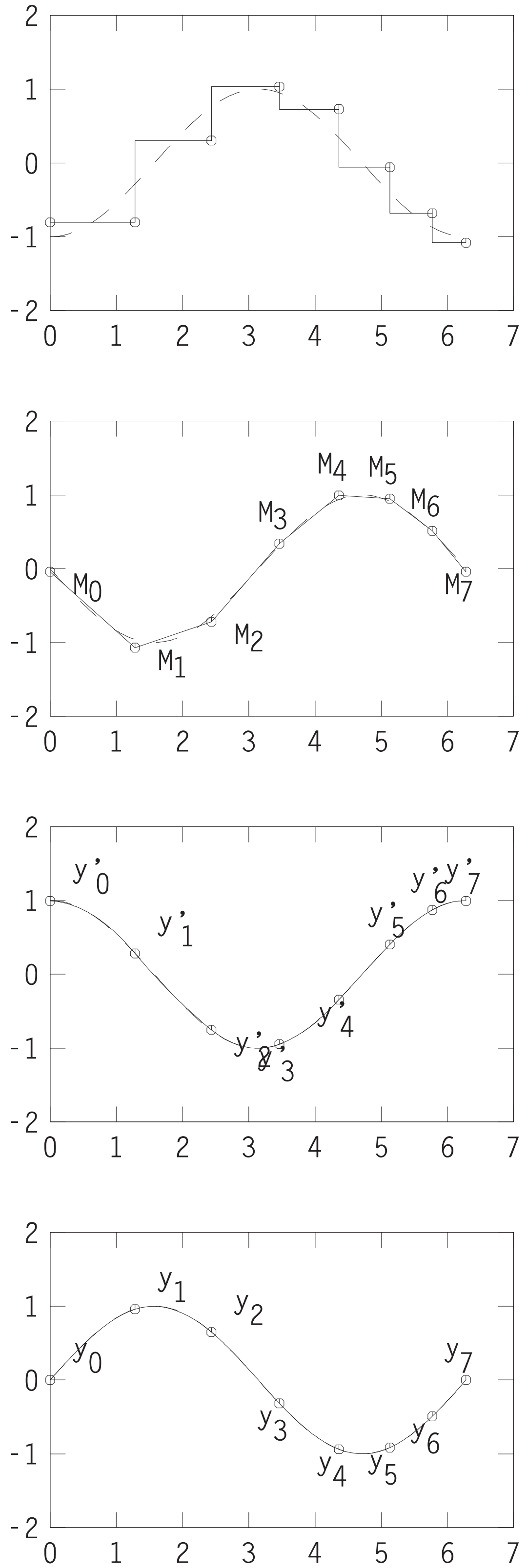
$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & & \dots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \dots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem macht wegen der beiden Zahlen in den Ecken etwas mehr Mühe, ist aber trotzdem noch relativ leicht lösbar. Warum $M_0 = M_n$ nicht mehr auftritt, sollte klar sein!
Das folgende Beispiel in Abb. 4 zeigt einen periodischen Spline, der eine nicht im Intervall $[a, b]$ periodische Funktion interpoliert. Das führt natürlich zu schlechten Ergebnissen!
Ist dagegen die Funktion tatsächlich periodisch wie der $\sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$, so wird der Spline fast perfekt. Das Beispiel findet sich in Abb. 5.



Periodischer Spline, der eine nicht periodische Funktion interpoliert. Natürlich kann dieses Interpolationsergebnis nicht gut sein. Der Spline kann jedoch über die gesamte reelle Achse periodisch fortgesetzt werden

Abb. 4: Periodischer Spline



Periodischer Spline, der eine periodische Funktion interpoliert. Der Spline kann über die gesamte reelle Achse periodisch fortgesetzt werden und folgt der Funktion wie der Ableitungsspline aus Abb. 2 sehr gut

Abb. 5: Periodischer Spline für periodische Funktion

1.4. Die Minimaleigenschaft von Splines

Kubische Splines haben eine sehr attraktive Eigenschaft: Wenn zu beliebig vorgegebenen n Zahlen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ im Intervall $[a, b]$ und beliebig vorgegebenen Funktionswerten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ Funktionen $f(x)$ gesucht werden, welche die vorgegebenen Punkte $(x_j, y_j), j = 0, \ldots, n$ interpolieren – $f(x_j) = y_j$ – kommen Splines in gewissem Sinn den Kurven am nächsten, die man auch von Hand durch diese Punkte zeichnen würde.

Genauer: Wenn $S(x)$ ein kubischer Spline ist – er darf natürlich, periodisch oder mit vorgegebener Randableitung sein –, der die vorgegebenen Punkte interpoliert – $S(x_j) = y_j$ – und wenn $f(x)$ irgendeine andere[1] die vorgegebenen Punkte interpolierende Funktion ist, dann gilt

$$\int_a^b |S''(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f''(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

In diesem Sinn ist $S(x)$ besser als jede andere interpolierende Funktion und somit also wirklich die beste! Was bedeutet dieser Ausdruck? Im gesamten Intervall $[a, b]$ wird eine Zahl berechnet, die etwa dem Mittelwert des Betrags der zweiten Ableitung der Funktion entspricht. Die zweite Ableitung einer Funktion ist aber wesentlicher Bestandteil der Krümmung einer Funktion. Salopp ausgedrückt ist also ein interpolierender Spline die interpolierende Funktion mit kleinster mittlerer Krümmung im Intervall $[a, b]$. Und wenn Sie von Hand interpolieren, zeichnen Sie auch keine Kurven mit großen Krümmungen, die sich wild durch die vorgegebenen Punkte winden!

Versuchen Sie beispielsweise eine möglichst glatte Kurve durch die folgenden Punkte der Abb. 6 zu legen:

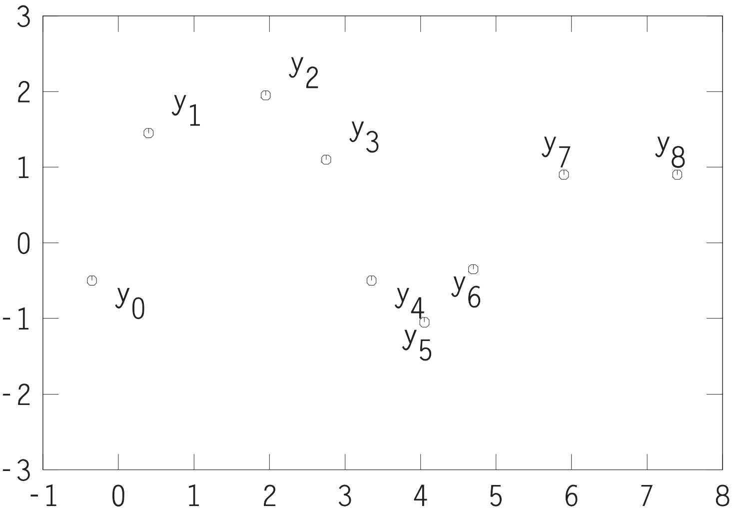


Abb. 6: Willkürliche Punktemenge

Ihr Ergebnis wird wahrscheinlich der folgenden Zeichnung der Abb. 7 ähneln:

[1] Ganz beliebig ist sie nicht: Mindestens muß $f(x)$ zweimal differenzierbar sein, die Ableitung $f'(x)$ muß absolut stetig sein und die zweite Ableitung muß quadratintegrabel sein ($f'' \in L^2[a, b]$, d.h. $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ existiert und ist endlich).

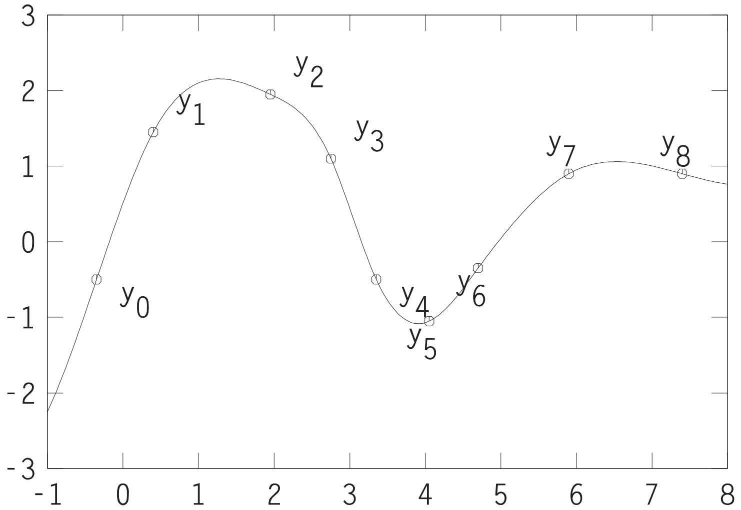


Abb. 7: Mögliche Handzeichnung und Spline durch die Punktmenge

Diese Zeichnung wurde mit dem natürlichen Spline durch die gegebenen Punkte erstellt. Wenn Sie etwas völlig anderes gezeichnet haben z.B.

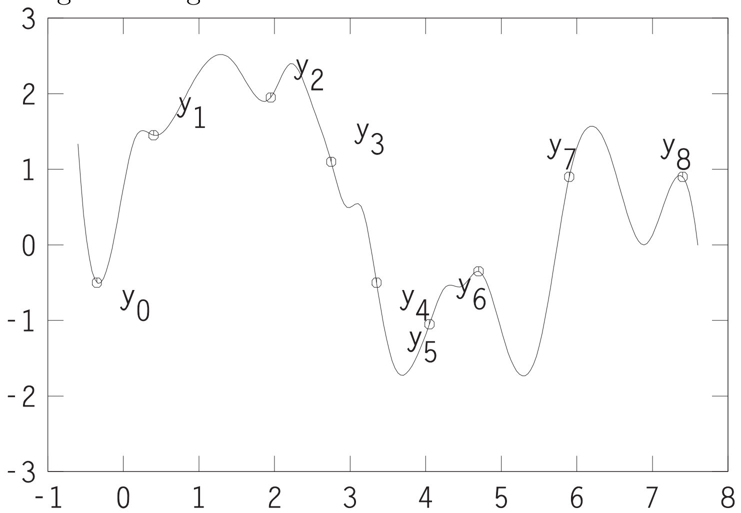


Abb. 8: Sonderbare Handzeichnung

so ist bei Ihrer Kurve deren mittlere zweite Ableitung (ihre Krümmung) wesentlich größer oder vielleicht sogar nicht mehr berechenbar! Wahrscheinlich haben Sie sich einen Scherz erlaubt!

2. Anhang: Bézierkurven

2.1. Allgemeines