Über die Arithmetik von 1–Motiven

Sei k ein Zahlkörper mit algebraischem Abschluss $\overline{k}$. Ein 1–Motiv über k ist ein Komplex

$$M = [Y \longrightarrow G]$$

wobei G eine semiabelasche Varietät über k ist, und Y eine endlich erzeugte freie kommutative Gruppe mit stetiger $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$–Wirkung. Informell ist ein 1–Motiv ein Amalgam aus einem Torus, einer abelschen Varietät und einem freien, endlich erzeugten Galoismodul.

Viele Konstruktionen die man aus der Theorie der abelschen Varietäten kennt kann man auf 1–Motive verallgemeinern. Zu einem 1–Motiv M gibt es ein duales 1–Motiv $M^\vee$, einen ℓ–adischen Tatemodul $\mathrm{T}_\ell M$ und eine Weil–Paarung

$$e_\ell : \mathrm{T}_\ell M \times \mathrm{T}_\ell M^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

mit allen wünschenswerten Eigenschaften. Die $\overline{k}$–Punkte $[Y \longrightarrow G(\overline{k})]$ von M formen einen Komplex von stetigen Galoismoduln, und so erhält man Galoiskohomologiegruppen $H^i(k, M)$, und Tate–Shafarevich Gruppen $Ш^i(k, M)$.

Ziel dieses Vortrages ist es zu zeigen, dass Sätze aus der arithmetischen Geometrie die typischerweise für abelsche Varietäten oder Tori bekannt sind, allgemeiner für 1–Motive gelten. So etwa Faltings berühmter Satz über Homomorphismen von abelschen Varietäten über Zahlkörpern, Poitou–Tate Dualität oder Chassels–Tate Dualität.

On the arithmetic of 1–motives

Let k be a number field with algebraic closure $\overline{k}$. A 1–motive over k is a complex

$$M = [Y \longrightarrow G]$$

where G is a semiabelian variety over k, and Y is a finitely generated free commutative group with continuous $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$–action. Informally speaking, a 1–motive is a compound of a torus, an abelian variety and a free, finitely generated Galois module.

Many constructions that are known from the theory of abelian varieties can be generalized to 1–motives. With a 1–motive M one can associate a dual 1–motive $M^\vee$, an ℓ–adic Tate module $\mathrm{T}_\ell M$ and a Weil–pairing

$$e_\ell : \mathrm{T}_\ell M \times \mathrm{T}_\ell M^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

having all properties one can hope for. The $\overline{k}$–points $[Y \longrightarrow G(\overline{k})]$ of M yield a complex of continuous Galois modules, and this way one defines Galois cohomology groups $H^i(k, M)$, and Tate–Shafarevich groups $Ш^i(k, M)$.

The aim of this talk is to show that many interesting theorems from arithmetic geometry, typically known for abelian varieties and tori, continue to hold 1–motives. Among them, Faltings's famous theorem on homomorphisms of abelian varieties over number fields, Poitou–Tate duality or Chassels–Tate duality.

Date: 18. Januar 2009.