Delignes Beweis der Weil-Vermutung

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

0	**Einleitung**	**3**
1	**Rationalität der Zetafunktion**	**9**
2	**Konstruierbare Garben**	**14**
3	**Konstruierbare $\mathbb{Z}_\ell$-Garben**	**22**
4	**Kohomologie mit kompakten Träger**	**25**
5	**Der Frobenius-Endomorphismus**	**28**
6	**Delignes Satz: Formulierung und erste Reduktionen**	**33**
7	**Gewichte und Determinanten-Gewichte**	**37**
8	**Kohomologie von Kurven und L-Reihen**	**43**
9	**Reinheit von reellen $\mathbb{Q}_\ell$-Garben**	**45**
10	**Der Formalismus naher und verschwindender Zykel**	**47**
11	**Kohomologie von affinen und projektiven Räumen und Reinheit**	**54**

0 Einleitung

Die Riemannsche Zetafunktion wird bekanntlich durch die für $Re(s) > 1$ konvergierenden Ausdrücke

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

definiert. Die Produktentwicklung, bei der p über die rationalen Primzahlen läuft, wird im allgemeinen Euler zugeschrieben, und man spricht deswegen von einem Eulerprodukt und Euerfaktoren. Formal erhält man die letzte Gleichung leicht durch die eindeutige Zerlegung von natürlichen Zahlen in Primzahlen sowie durch die geometrische Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \quad .$$

Die bis heute unbewiesene Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen sollen. Dies wird allgemeiner von den Dedekindschen Zetafunktionen

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-N\mathfrak{p}^{-s}}$$

vermutet. Hierbei ist K ein Zahlkörper, also eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{a}$ durchläuft die Ideale $\neq 0$ des Rings $\mathcal{O}_K$ der ganzen Zahlen von K, $\mathfrak{p}$ durchläuft die Primideale $\neq 0$, und es ist $N\mathfrak{a} = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$, wobei $|M|$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge M bezeichnet.

Artin betrachtete das Analogon für globale Funktionenkörper. Sei dazu $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Dann entsprechen sich

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_q(t)$ (der rationale Funktionenkörper),

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_q[t]$ (der Polynomring in einer Variablen),

und man kann die analoge Funktion betrachten:

$$\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathbb{F}_q[t]} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-N\mathfrak{p}^{-s}} \quad ,$$

wobei wieder $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{p}$ über die nicht-trivialen Ideale bzw. Primideale von $\mathbb{F}_q[t]$ läuft und $N\mathfrak{a} = |\mathbb{F}_q[t]/\mathfrak{a}|$ ist. Entsprechend kann man globale Funktionenkörper K behandeln, also endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_q(t)$. Man beachte aber: der Ring $\mathbb{F}_q[t]$ ist nicht mehr - wie $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ - durch den Körper $\mathbb{F}_q(t)$ bestimmt; man könnte auch $\mathbb{F}_q[\frac{1}{t}] \subseteq \mathbb{F}_q(t)$ betrachten. Dies gilt umso mehr für die allgemeinen Körper K, die nicht einmal mehr $\mathbb{F}_q(t)$ kanonisch enthalten. Besser und kanonischer ist es, die eindeutig bestimmte glatte projektive Kurve X über $\mathbb{F}_q$ mit Funktionenkörper K zu betrachten und zu definieren

$$\zeta_{\mathbb{F}_q(t)}(s) = \zeta(X,s) = \prod_{x\in X_0} \frac{1}{1-(Nx)^{-s}} = \prod_{x\in X_0} \frac{1}{1-q^{-deg(x)s}} \quad .$$

Hierbei bezeichnet X_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von X, und für $x \in X_0$ ist $Nx = |k(x)|$ die Mächtigkeit des Restklassenkörpers $k(x)$ von x. Mit $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ gilt dann offenbar $Nx = q^{\deg(x)}$ und damit die letzte Gleichheit. Die Punkte sind hier im Schema-theoretischen Sinne gemeint; man beachte, daßfür einen affinen offenen Teil $U = SpecR \subset X$ die Punkte $x \in U$ den Primidealen $\mathfrak{p}$ von R entsprechen, wobei $k(x)$ der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ ist. Die abgeschlossenen Punkte x entsprechen gerade den maximalen Idealen; für diese gilt also $Nx = |R/\mathfrak{p}|$, und man erhält dieselben Bildungen wie oben.

Nach der letzten Formel gilt $\zeta(X,s) = Z(X, q^{-s})$, wobei

$$Z(X,T) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - T^{\deg(x)}} \in \mathbb{Z}[[T]] \quad .$$

Es folgt die Gleichheit von formalen Potenzreihen

$$\begin{aligned} \log Z(X,T) &= \sum_{x \in X} - \log(1 - T^{\deg(x)}) = \sum_{x \in X} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{\deg(x) \cdot n}}{n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{\deg(x)|m} \deg(x)) \frac{T^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^m})| \frac{T^m}{m} \quad , \end{aligned}$$

wobei $X(\mathbb{F}_{q^m})$ die Menge der $\mathbb{F}_{q^m}$-rationalen Punkte von X über $\mathbb{F}_q$ ist: zu jedem $x \in X_0$ mit $\deg(x)|m$ gibt es genau so viele $\mathbb{F}_{q^m}$-rationale Punkte, wie es $\mathbb{F}_q$-lineare Einbettungen $\kappa(x) \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^m}$ gibt, und deren Anzahl ist $\deg(x)$.

Wir betrachten ein Beispiel. Die glatte projektive Kurve mit Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(t)$ ist $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, der eindimensionale projektive Raum über $\mathbb{F}_q$. Geometrisch, d.h., schematheoretisch ist $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} = U_1 \cup U_2$, mit $U_1 = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q[t] = \mathbf{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ (der eindimensionale affine Raum über $\mathbb{F}_q$) und $U_2 = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q[t^{-1}]$ (der affine Raum mit Koordinate t^{-1}). Dabei ist also $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q[t, t^{-1}]$ und $U_1 - U_2 =$ Punkt $t = 0$ und $U_2 - U_1 =$ Punkt $t^{-1} = 0$("$t = \infty$"). Da $\mathbf{A}^1_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}\mathbb{F}_{q^m}, \mathbf{A}^1_{\mathbb{F}_q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[t], \mathbb{F}_{q^m}) \cong \mathbb{F}_{q^m}$ ist (die letzte Bijektion bilden einen Ringhomomorphismus φ auf $\varphi(t)$ ab), erhält man

$$|\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m})| = q^m + 1 \quad .$$

Dies folgt auch aus der bekannten Beschreibung der Punkte

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m}) &= ((\mathbb{F}_{q^m})^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{F}^{\times}_{q^m} \\ &= \{[a_0 : a_1] | a_i \in \mathbb{F}_{q^m}, \text{ nicht beide null}\} \\ &= \{[1 : a_1] | a_1 \in \mathbb{F}_{q^m}\} \cup \{[0 : 1]\} \quad . \end{aligned}$$

Bei Wahl der Koordinate $t = \frac{a_1}{a_0}$ ist natürlich die erste Menge der Vereinigung gleich $U_1(\mathbb{F}_{q^m})$ und $[0 : 1]$ der Punkt "$t = \infty$". Damit berechnen wir nun

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}, t) &= exp(\sum_{m=1}^{\infty} (1 + q^m) \frac{T^m}{m}) \\ &= exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T^m}{m}) \cdot exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(qT)^m}{m})) = \frac{1}{(1-T)(1-qT)} \quad . \end{aligned}$$

Dies ist insbesondere eine rationale Funktion.

Allgemeiner kann man zeigen (dies geht auf E. Artin und F.K. Schmidt zurück), dass für eine glatte projektive (geometrisch irreduzible) Kurve X vom Geschlecht g über $\mathbb{F}_q$ gilt:

$$Z(X,T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)} \ ,$$

wobei $P(T)$ ein Polynom vom Grad $2g$ in $\mathbb{Z}[T]$ ist, welches konstanten Koeffizienten 1 hat. Weiter bewiesen Hasse (für $g = 1$, also für elliptische Kurven) und Weil (für beliebiges g), dass die Nullstellen von $P(q^{-s})$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Angewandt auf $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$ liefert dies das von Artin vermutete Analogon der Riemannschen Vermutung im Funktionenkörperfall.

Wir geben eine Uminterpretation. Schreibe

$$P(T) = \prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i T), \text{ mit } \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C} \ ,$$

wobei $\overline{\mathbb{Q}}$ den algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Für eine komplexe Zahl s ist offenbar $P(q^{-s}) = 0$ genau dann, wenn es ein i mit $\alpha_i \cdot q^{-s} = 1$ gibt. Weiter gilt in diesem Fall

$$Re(s) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \mid \alpha_i \mid = q^{\frac{1}{2}} \ .$$

A. Weil stellte nun fest, dass die Definition der Zetafunktion einen Sinn für beliebige Varietäten über $\mathbb{F}_q$ macht, und stellte nach Berechnung derselben in mehreren nicht-trivialen Fällen ([Weil]) die folgenden Vermutungen auf.

Weil-Vermutungen (bewiesen 1973 von Deligne): Sei X eine geometrisch irreduzible glatte projektive Varietät über $\mathbb{F}_q$. Definiere

$$Z(X, T) = exp(\sum_{n=1}^{\infty} \ |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{T^n}{n}) \in \mathbb{Q}[[T]] \ .$$

I: $Z(X, T)$ ist rational, d.h., in $\mathbb{Q}(T)$.

(Dies impliziert insbesondere eine meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$, für die die Reihe zunächst nur für $Re(s) >> 0$ konvergiert).

II: Es gilt die Funktionalgleichung

$$Z(X, \frac{1}{q^d T}) = \pm q^{\frac{dE}{2}} T^E Z(X, T) \ ,$$

wobei $d = \dim X$ die Dimension von X und $E = (\Delta \cdot \Delta)$ die Selbstschnittzahl der Diagonalen Δ auf $X \times X$ ist.

(Für die Zetafunktion in s bedeutet dies also

$$\zeta(X, d - s) = \pm q^{E(\frac{d}{2} - s)} \zeta(X, s) \ .$$

Für eine Kurve vom Geschlecht g zeigt man leicht, dass $E = 2 - 2g$ ist, und erhält den klassischen Funktionalgleichungstyp, der s und $1 - s$ verknüpft).

III: Es ist

$$Z(X, T) = \frac{P_1(T) P_3(T) \ldots \qquad P_{2d-1}(T)}{P_0(T) P_2(T) \ldots \qquad P_{2d}(T)} \quad ,$$

wobei $P_0(T) = 1 - T, P_{2d}(T) = 1 - q^d T$, und allgemein $P_i(X) \in \mathbb{Z}[T]$ mit konstantem Koeffizienten 1, wobei

$$P_i(T) = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - \alpha_j^{(i)} T) \quad \text{in} \quad \mathbb{C}[T] \, ,$$

mit

$$\mid \alpha_j^{(i)} \mid = q^{\frac{i}{2}} \qquad \text{für alle } j$$

(Dies ist der schwierigste Teil - das Analogon der Riemannschen Vermutung für beliebige Dimensionen).

IV: Kommt X durch Reduktion mod p (d.h., mod $\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}|p$) von einer Varietät über einem Zahlkörper $K \subseteq \mathbb{C}$, so ist $b_i = \deg P_i$ gleich der i-ten Bettizahl von $X(\mathbb{C})$ (das ist die Dimension der i-ten singulären Homologiegruppe von $X(\mathbb{C})$).

Wir schließen zwei Bemerkungen an. Aus III folgt, dass sich die $P_i(T)$ nicht gegenseitig wegkürzen lassen; sie sind also eindeutig durch $Z(X,T)$ bestimmt. In IV werden arithmetische Eigenschaften in interessanter Weise mit topologischen Invarianten verknüpft. Ist zum Beispiel X eine Kurve vom Geschlecht g über $\overline{\mathbb{Q}}$, so ist $X(\mathbb{C})$ eine Riemannsche Fläche mit "g Henkeln", und damit $b_0 = 1 = b_2, b_1 = 2g$ (dies gibt Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Hasse und Weil). Die Anzahl der Henkel hat also Konsequenzen für die Anzahl von Punkten mod p.

In der Tat wurde Weil bei seinen Vermutungen stark von topologischen Betrachtungen geleitet. Insbesondere bemerkte er, dass ein großer Teil der Vermutungen (nämlich I, II und IV) aus der Existenz einer "guten" Kohomologietheorie folgen würde, die dem üblichen topologischen Formalismus genügt, wie Lefschetz-Fixpunktformel, Poincaré-Dualität usw. Eine solche Kohomologietheorie wurde dann von M. Artin und A. Grothendieck mit der étalen Kohomologie gefunden, und diese bildet auch die Grundlage für Delignes Beweis, den wir im folgenden studieren wollen.

Zuvor noch einige Worte zu den Anwendungen. Die Weil-Vermutungen (d.h. Delignes Sätze) haben unzählige, ganz verschiedenartige Anwendungen gefunden und bilden einen Dreh- und Angelpunkt bei vielen Schlüssen der modernen Arithmetischen Geometrie. Wir skizzieren hier nur drei Anwendungen, die ganz elementar zu verstehen sind und die andererseits auch recht typisch sind.

Anwendung 1: (Weil) Ist X eine geometrisch irreduzible glatte (projektive) Kurve vom Geschlecht g über $\mathbb{F}_q$, so gilt

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| \leq q^n + 1 + 2g(\sqrt{q})^n \ .$$

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen erhält man durch Koeffizientenvergleich der Potenzreihen für $\log Z(X,T)$

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 + q^n - \sum_{j=1}^{2g} \alpha_j^n \leq 1 + q^n + 2g(\sqrt{q})^n \ .$$

Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Varietäten seien dem Leser über lassen, vergl. auch [De 1] 8.1.

Anwendung 2: (Hasse, Weil) Für die Kloostermann-Summe

$$K(p,a) := \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} e^{\frac{2\pi i}{p}(x + \frac{a}{x})} \in \mathbb{C} \qquad (p \ prim, a \in \mathbb{Z})$$

gilt die Abschätzung

$$|K(p,a)| \leq 2 \cdot \sqrt{p} \quad .$$

Dies folgt durch die Betrachtung der Kurve

$$T^p - T = x + \frac{a}{x} \quad .$$

Allgemeiner erhält man Abschätzungen des Typs

$$|\sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_q} \Psi(Q(x_1,\ldots,x_n))| \leq (d-1)^n q^{\frac{n}{2}} \quad ,$$

wobei Q ein Polynom vom Grad d in n Variablen und $\Psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ ein additiver Charakter ist, s. $[De1]$ und $[Ka1]$.

Anwendung 3: (Deligne) Die Ramanujan-Vermutung: Sei

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

die Ramanujan-Δ-Funktion. Dann gilt

$$\tau(n) = O(n^{\frac{11}{2}+\epsilon}) \qquad \text{für alle } \epsilon > 0 \quad .$$

Zunächst einige Worte zur Geschichte. Die folgenden Abschätzungen wurden vor Deligne erhalten - alle mit analytischen Methoden:

Ramanujan (1916)	$O(n^7)$
Hardy/Littlewood (1918)	$O(n^6)$
Kloostermann (1927)	$O(n^{\frac{47}{8}+\epsilon})$
Davenport/Salié (1933)	$O(n^{\frac{35}{6}+\epsilon})$
Rankin (1939)	$O(n^{\frac{29}{5}+\epsilon})$

(Zur Verdeutlichung: die letzten Brüche sind $6-\frac{1}{8}, 6-\frac{1}{6}$ und $6-\frac{1}{5}$; die Vermutung fordert $6-\frac{1}{2}$).

Ramanujan vermutete genauer ([Ra]):

(A) τ ist multiplikativ, d.h., für $(n,n')=1$ ist $\tau(nn') = \tau(n)\tau(n')$,

(B) $|\ \tau(n)\ | \leq\ n^{\frac{11}{2}} \cdot\ d(n)$, wobei $d(n)$ die Summe der Teiler von n ist,

(C) Für die assoziierte Dirichletreihe gibt es eine Produktentwicklung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}} \quad .$$

Weiter bemerkte er:

(i) (C) impliziert (A) (allgemeiner sind die Koeffizienten einer Dirichletreihe $\sum a_n n^{-s}$ multiplikativ, wenn diese eine Euler- Produktentwicklung besitzt),

(ii) (B) impliziert die obige Vermutung, durch die bekannte Abschätzung für $d(n)$,

(iii) Weiß man (C), so genügt es, (B) für Primzahlen zu zeigen, d.h., dass für Primzahlen p gilt

(B') $\quad | \tau(p) | \leq 2 \cdot p^{\frac{11}{2}}$

(denn das Euler-Produkt liefert auch eine Rekursionsformel für $\tau(p^m)$),

(iv) Eigenschaft (B') ist äquivalent dazu, dass die Nullstellen des Polynoms $1 - \tau(p)T + p^{11}T^2$ konjugiert komplex sind (die Diskriminante des zugehörigen normierten Polynoms ist $p^{-22}(\tau(p)^2 - 4p^{11})$).

Es ist bemerkenswert, dass Ramanujan, der vielen als Analytiker gilt, hier alles auf rein algebraische Fragen reduziert und dass die Vermutung dieser Reduktion folgend bewiesen wurde:

Schreibt man

$$1 - \tau(p)T + p^{11}T^2 = (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T) \quad ,$$

so sind die Nullstellen genau dann komplex konjugiert, wenn es ihre Reziproken α_1 und α_2 sind; wegen $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = p^{11}$ gilt dies genau dann, wenn

$$| \alpha_1 | = | \alpha_2 | = p^{\frac{11}{2}}$$

ist, und dies wurde von Deligne bewiesen. (C) wurde bereits 1917 von Mordell gezeigt.

Die Funktion Δ interessierte Ramanujan übrigens als q-Entwicklung einer besonders wichtigen Modulform, und er stellte ähnliche Vermutungen für gewisse Familien derselben auf. Diese folgen ebenfalls aus Delignes Resultaten, da er allgemeiner die Petersson-Vermutung beweis, die hier kurz formuliert sei, ohne näher auf die Theorie der Modulformen einzugehen. Hecke zeigte 1936, dass für eine normierte Spitzenform vom Gewicht k für $SL_2(\mathbb{Z})$ mit q-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad (q = e^{2\pi i z})$$

die assoziierte Dirichletreihe genau dann eine Produktentwicklung der Form

$$\sum_{n=1} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1} - p^{-2s}}$$

hat, wenn f Eigenform zu allen Heckeoperatoren ist (s.[Se 1]). In diesem Fall vermutete Petersson 1939 [Pet], dass

$$a_n = O(n^{\frac{k-1}{2}+\epsilon}) \qquad \text{für alle } \epsilon > 0 \quad .$$

Wie oben genügt es zu zeigen: Schreibt man

$$1 - a_p T + p^{k-1}T^2 = (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T)$$

so gilt

$$| \alpha_1 | = | \alpha_2 | = p^{\frac{k-1}{2}} \quad .$$

Nach Vorarbeit von Eichler, Ihara und Shimura führte Deligne diese Aussage 1969 in [De 1] auf die Weil-Vermutungen zurück, indem er zeigte, dass das obige Polynom das Polynom $P_{k-1}(T)$ für eine glatte projektive Varietät X über $\mathbb{F}_p$ teilt - für Δ ist $k = 12$. Für Formen höherer Stufe siehe [De 1]und [De 2].

1 Rationalität der Zetafunktion

Die Rationalität der Zetafunktionen wurde 1960 von B. Dwork mit p-adischen Methoden bewiesen. A. Grothendieck gab 1964 einen anderen Beweis, der auf der von ihm und M. Artin entwickelten étalen Kohomologie beruht und auch die Funktionalgleichung liefert.

Theorem 1.1 (Grothendieck) Sei X eine geometrisch irreduzible glatte, projektive Varietät der Dimension d über $\mathbb{F}_q$.

(a) Für $\ell \neq p = char(\mathbb{F}_q)$ ist

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T) \cdot P_3(T) \dots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T) \dots P_{sd}(T)} ,$$

wobei $P_0(T) = 1 - T, P_{2d}(T) = 1 - q^d T$ und allgemein

$$P_i(T) = det(1 - F^* T \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) ,$$

wobei $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ für einen algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{F}_q}$ von $\mathbb{F}_q$ ist, $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ die i-te ℓ-adische Kohomology bezeichnet und F^* der Endomorphismus ist, der hierauf durch den q-linearen Frobenius-Endomorphismus $F : X \to X$ induziert wird.

(b) Insbesondere ist $Z(X,T)$ rational, d.h., in $\mathbb{Q}(T)$.

(c) Es gilt die Funktionalgleichung

$$Z(\frac{1}{q^d T}) = \pm q^{\frac{dE}{2}} T^E Z(T) ,$$

mit der Euler-Poincaré-Charakteristik

$$E = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell) := \sum_{i=0}^{2d} (-1) \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) .$$

Diese ist auch gleich der Selbstschnittzahl $(\Delta.\Delta)$ der Diagonalen $X \overset{\Delta}{\hookrightarrow} X \times X$.

Erläuterung: Im folgenden bezeichnet $\mathbb{Z}/m$ oder $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auch die konstante Garbe mit diesen Halmen auf einem Schema S bezüglich der étalen Topologie. Für eine étale Garbe F auf S sei $H^i(S,F)$ deren i-te Kohomologie ($i \geq 0$). Dann ist nach Definition

$$\begin{aligned} H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n) , \\ H^i(S, \mathbb{Q}_\ell) &= H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell . \end{aligned}$$

Man beachte, dass $H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n)$ ein $\mathbb{Z}/\ell^n$-Modul ist, damit $H^i(S, \mathbb{Z}_\ell)$ ein Modul über dem Ring $\mathbb{Z}_\ell = \lim_{\leftarrow, n} \mathbb{Z}/\ell^n$ der ganzen ℓ-adischen Zahlen und $H^i(S, \mathbb{Q}_\ell)$ ein Vektorraum über dem Quotientenkörper $\mathbb{Q}_\ell$ der ℓ-adischen Zahlen.

Wir benötigen einige der folgenden Tatsachen über ℓ-adische Kohomologie. Hierbei sei $A = \mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Z}_\ell$ oder $\mathbb{Q}_\ell$.

KOH 1: Funktorialität: ein Morphismus $f : S \to S'$ induziert einen A-Modul-Morphismus

$$f^* : H^i(S', A) \to H^i(S, A)$$

Für $g : S' \to S''$ gilt $(gf)^* = f^* g*$. Insbesondere operiert für ein Schema X über einem Körper k mit separablem Abschluß k_s die absolute Galoisgruppe $Gal(k_s/k)$ stetig auf $H^i(X \times_k k_s\ , A)$: ordne $\sigma \in Gal(k_s/k)$ die durch $id \times \mathrm{Spec}(\sigma) : X \times_k k_s \to X \times_k k_s$ induzierte Operation zu.

KOH 2: Cupprodukt: Es gibt A-bilineare Abbildungen

$$H^i(S, A) \times H^j(S, A) \to H^{i+j}(S, A)\,,\ (x, y) \mapsto x \cdot y\ .$$

Diese sind graduiert kommutativ ($y \cdot x = (-1)^{ij} x \cdot y$) und (in einem offensichtlichen Sinne) assoziativ.

KOH 3: Künneth-Formel: Sind X und Y glatt und eigentlich über einem separabel abgeschlossenen Körper L, und ist $\ell \neq char\,(L)$, so hat man Isomorphismen

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^j(Y, \mathbb{Q}_\ell) \to H^k(X \times_L Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$x \otimes y \mapsto p_1^* x \cdot p_2^* y\ ,$$

wobei $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ die Projektionen sind.

KOH 4: Poincaré-Dualität: Ist X glatt, eigentlich und rein d-dimensional über einem Körper k, und ist $\overline{X} = X \times_k k_s$ für einen separablen Abschluß k_s von k , so gibt es für $\ell \neq char(k)$ einen kanonischen Galois-äquivarianten $\mathbb{Z}/\ell^n$-Homomorphismus

$$tr : H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \to \mathbb{Z}/\ell^n\,,$$

und die Paarung

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n) \times H^{2d-i}(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \xrightarrow{tr} \mathbb{Z}/\ell^n$$

ist eine perfekte Dualität. Hierbei bezeichnet $M(m)$ den m-ten Tate-Twist eines $\mathbb{Z}/\ell^n - Gal(k_s/k)$-Moduls: $M(m) = M \otimes \mathbb{Z}/\ell^n(m)$, mit

$$\mathbb{Z}/\ell^n(m) = \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes m} & m \geq 0 \\ (\mu_{\ell^n}^{\otimes -m})^\vee & m \leq 0 \end{cases}\ .$$

Hierbei ist μ_{ℓ^n} der Galois-Modul der ℓ^n-ten Einheitswurzeln in $k_s^\times$, und $M^\vee = Hom(M, \mathbb{Z}/\ell^n)$ das $\mathbb{Z}/\ell^n$-Dual eines $\mathbb{Z}/\ell^n$-$Gal(k_s/k)$-Moduls M .

KOH 5: Endlichkeit: Ist X eigentlich von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L, so ist $H^i(X, A)$ ein endlich erzeugter A-Modul für alle $i \geq 0$, $A = \mathbb{Z}/\ell^n$, $\mathbb{Z}_\ell$ oder $\mathbb{Q}_\ell$, $\ell \neq char(L)$.

KOH 6: Frobenius-Endomorphismus: Sei X von endlich Typ über $\mathbb{F}_q$. Der $\mathbb{F}_q$-lineare Frobenius-Endomorphismus

$$F : X \to X$$

ist dadurch definiert, dass er die Indentität auf dem topologischen Raum und die q-Potenzierung auf der Strukturgarbe ist. Ist $\varphi \in Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ der arithmetische Frobenius:

$$\varphi(\alpha) = \alpha^q \ \text{ für } \alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}\ ,$$

und F^* die durch $F \times id : \overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \to X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ induzierte Abbildung auf der Kohomologie, so gilt

$$\mathbb{F}^* = \varphi^{-1} \text{ auf } H^i(\overline{X}, A) .$$

Zum Beweis von Theorem 1.1:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Lemma 1.2 (Bourbaki Algèbre IV 3, Exercise 3) Sei $u(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, T^n$ eine formale Potenzreihe über einem Körper K. Dann liegt $u(T)$ genau dann in $K(T)$ (d.h., ist die Taylorentwicklung einer gebrochen rationalen Funktion), wenn es ein $N > 0$ gibt derart, dass die Hankel-Determinanten

$$det(a_{i+j+M})_{0 \leq i,j \leq N} = det \begin{pmatrix} a_M & a_{M+1} & \dots & a_{M+N} \\ a_{M+1} & a_{M+2} & & \\ \vdots & & & \\ a_{M+N} & \dots & & a_{M+2N} \end{pmatrix}$$

für alle $M >> 0$ verschwinden.

Aus (a) folgt nun zunächst, dass $Z(X,T)$ in $\mathbb{Q}_\ell(T)$ liegt. Damit verschwinden die Hankel-Determinanten der Koeffizienten wie in Lemma 1.2. Aber die Koeffizienten liegen bereits in $\mathbb{Q}$, und nach demselben Kriterium liegt $Z(X,T)$ dann in $\mathbb{Q}(T)$ (dieser Beweis zeigt: $\mathbb{Q}[[T]] \cap \mathbb{Q}_\ell(T) = \mathbb{Q}(T)$) .

Bemerkung 1.3 Dieser Beweis zeigt *nicht*, dass die obigen $P_i(T)$ in $\mathbb{Q}[T]$ liegen.

(a) $\Longrightarrow$ (c): Nach Poincaré-Dualität KOH 4 und Endlichkeit KOH 5 hat man einen Isomorphismus von Galoismoduln

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee = H^{2d-i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(d)$$

(Bezeichnung: $M^\vee = Hom_{\mathbb{Q}_\ell}(M, \mathbb{Q}_\ell)$ für einen $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraum M, $M(m) = M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(m)$ für einen $\mathbb{Z}_\ell$-Galoismodul M, wobei $\mathbb{Z}_\ell(m) = \lim\limits_{\leftarrow, n} \mathbb{Z}/\ell^n(m)$). Da der arithmetische Frobenius φ auf $\mathbb{Q}_\ell(m)$ mit q^m operiert, gilt

$$\begin{array}{rl} & det(1 - F\frac{1}{q^d T} \mid H^i) \\ = & (q^d T)^{-b_i} det(F \mid H^i) \cdot (-1)^{b_i} det(d - F^{-1} q^d T \mid H^i) \\ = & (q^d T)^{-b_i} det(F \mid H^i) \cdot (-1)^{b_i} det(1 - FT \mid H^{2d-i}), \end{array}$$

wobei $H^i = H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $b_i = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i$. Sind $\alpha_{1,\dots,}\alpha_{b_i}$ die Eigenwerte von F auf H^i , so sind $q^d\alpha_1^{-1}, \dots, q^d\alpha_{b_i}^{-1}$ die Eigenwerte auf H^{2d-i} nach Poincaré-Dualität. Damit gilt

$$det(F \mid H^i) \cdot det(F \mid H^{2d-i}) = q^{b_i \cdot d} \text{ für } i \neq d .$$

Wir betrachten nun noch $i = d$. Seien N_+ (bzw. N_-) Eigenwerte von F auf H^d gleich $q^{\frac{d}{2}}$ (bzw. $-q^{\frac{d}{2}}$). Die restlichen Eigenwerte bilden Paare $\beta \neq q^d \beta^{-1}$, insbesondere ist $b_d - N_+ - N_-$ gerade.

Damit ist

$$\begin{array}{rcl} det(F, H^d) & = & q^{d(b_d - N_+ - N_-)/2} q^{N_+ + N_-)d/d} (-1)^{N_-} \\ & = & q^{db_d/2}(-1)^{N_-} \ , \end{array}$$

wobei man beachte, dass db_d immer gerade ist, da die Poincaré Paarung für ungerades d alternierend auf H^d ist. Es folgt nun

$$\begin{array}{rcl} Z(X, \frac{1}{q^d T}) & = & \prod_{i=0}^{2d} det(1 - F \frac{1}{d^d T} \mid H^i)^{(-1)^{i+1}} \\ & = & (q^d T)^\chi \ q^{\frac{-\chi d}{2}} (-1)^{N_+} \prod_{i=0}^{2d} det(1 - FT \mid H^{2d-i})^{(-1)^{i+1}} \\ & = & (-1)^{N_+} q^{\frac{\chi d}{2}} T^\chi Z(X, T), \end{array}$$

wobei $\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i b_i$ die Euler-Poincaré-Charakteristik ist.

Für die Deutung von χ als Schnittzahl benötigen wir das folgende Resultat

Theorem 1.4 (Lefschetz-Formel, 1. Version) Bezeichne mit $(\alpha \cdot \beta)$ das Bild von $\alpha \otimes \beta$ unter der Poincaré-Paarung für $X \times X$

$$H^{2d-r}(X \times X)(d) \times H^{2d-r}(X \times X)(d) \to H^{4d}(X \times X)(2d) \xrightarrow{tr} \mathbb{Q}_\ell \ ,$$

wo wir $H^i(-)$ für $H^i(-, \mathbb{Q}_\ell)$ schreiben. Dann gilt

$$(\alpha \cdot {}^t\beta) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \ tr(\beta \circ \alpha \mid H^i(X)) \ ,$$

wobei $\beta \mapsto {}^t\beta$ die Transposition bezeichnet, die durch die Vertauschung der Faktoren von $X \times X$ induziert wird, und auf der rechten Seite β und α als Endomorphismen der Kohomologie gedeutet werden, vermöge der Isomorphien

$$\begin{array}{rll} & H^{2d+r}(X \times X)(d) & \\ \cong & \bigoplus_{i=0}^{2d} H^{2d-i}(X)(d) \otimes H^{i+r}(X) & \text{(Künneth-Formel)} \\ \cong & \bigoplus_{i=0}^{2d} H^i(X)^\vee \otimes H^{i+r}(X) & \text{(Poincaré-Dualität)} \\ \cong & \bigoplus_{i=0}^{2d} Hom(H^i(X), H^{i+r}(X)) & \text{(lineare Algebra)} \ . \end{array}$$

Beweis Ohne Einschränkung sei $\alpha \in H^{2d-i}(X)(d) \otimes H^j(X)$ und $\beta \in H^{2d-j}(X)(d) \otimes H^i(X)$, etwa $\alpha = \sum_\ell a'_\ell \otimes b_\ell$ und $\beta = \sum_\ell c_\ell \otimes a_\ell$ mit $(a'_\ell \cdot a_m) = \delta_{\ell m}$. Dann ist

$$(\alpha \cdot {}^t\beta) = \sum_\ell (b_\ell \cdot c_\ell) \cdot a_\ell + \sum_{\ell' \neq \ell} (b_\ell \cdot c_{\ell'}) a_{\ell'}) \ ,$$

also $Tr(\beta \circ \alpha \mid H^i(X)) = (-1)^i \sum_\ell (b_\ell \cdot c_\ell) = (-1)^i (\alpha \cdot {}^t\beta)$.

Wir benötigen dann nur noch

KOH 7: Zykelabbildung: Es gibt Homomorphismen

$$cl : CH^j(X) \leftarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(d)$$

($CH^j(X)$ die Gruppe der algebraischen Zykel der Kodimension j auf X modulo rationaler Äquivalenz) derart, dass das Schnittprodukt $(x \cdot y)$ mit der Schnittzahl $(cl(x) \cdot cl(y))$ der Zykel übereinstimmt.

Dann berechnen wir nämlich für die Diagonale Δ, die die Identiät auf $H^{\cdot}(X)$ induziert:

$$(\Delta \cdot \Delta) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \; tr(id \mid H^i(X)) = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell) \; .$$

Mit denselben Methoden erhalten wir nun zwei Beweise von 1.1 (a):

1. Beweis von 1.1 (a): Mit der Schnitt-Theorie von algebraischen Zykeln zeigt man

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = (F^n \cdot \Delta) \; ,$$

wobei F hier auch für den Graphen von F in $X \times X$ steht. Zusammen mit der obigen Lefschetz-Formel 1.4 ergibt sich

Theorem 1.5 (Lefschetz-Formel, 2. Version)

(1.5.1)
$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \; tr(F^n \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) \, .$$

Außerdem hat man die bekannte Formel

(1.5.2)
$$exp(\sum_{n=1}^{\infty} \; tr(\alpha^n \mid V)\frac{T^n}{n}) = det(1 - \alpha T \mid V)^{-1}$$

für einen Endomorphismus α auf einem Vektorraum V über einem Körper L der Charakteristik 0 (durch Betrachtung der Eigenwerte braucht man die Formel nur für eine Zahl α in einem algebraischen Abschluß von L zu beweisen, wo die Behauptung wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{T^n}{n} = -log(1 - \alpha T)$ folgt). Aus (1.5.1) und (1.5.2) folgt offenbar 1.1(a).

2. Beweis von 1.1 (a): Man beweist Theorem 1.5 mit rein kohomologischen Methoden. In der Tat, man hat die allgemeinere Tatsache

KOH 8 = Theorem 1.6 (Lefschetz-Formel, 3. Version) Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ und $\mathcal{F}$ eine konstruierbare $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf X. Dann ist

$$\sum_{x \in \overline{X}^{F^n}} tr(F_x^n, \mathcal{F}_{\overline{x}}) = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i tr(F^n \mid H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})) \; .$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$:

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = |\overline{X}^{F^n}| = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i tr(F^n \mid H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) \; ,$$

und nach obiger Formel (1.5.2) also

$$Z(X,T) = \prod_{i=0}^{2\dim(X)} \; det(1 - FT \mid H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \; .$$

Die Bezeichnungen werden in den nächsten Paragraphen erläutert.

2 Konstruierbare Garben

Im Folgenden seien Garben immer Garben für die étale Topologie.

Erinnerung 2.1 (vgl. [Mi]; insbes. I §5 und V §1) Sei Z ein Schema.

(a) Ein geometrischer Punkt von Z ist ein Morphismus $\overline{x} \to Z$, wobei $\overline{x} = \mathrm{Spec}(\Omega)$ für einen separabel abgeschlossenen Körper Ω. Äquivalent ist also die Vorgabe eines Punktes $x \in Z$ (des Bildes von $\overline{x}$) und einer Einbettung des Restklassenkörpers $k(x)$ in Ω.

(b) Eine étale Umgebung von $\overline{x}$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd] \\ \overline{x} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Z \end{tikzcd} ,$$

wobei $U \to Z$ étale ist. Die étalen Umgebungen von $\overline{x}$ bilden ein projektives System, dabei bilden die Umgebungen, für die U affin, zusammenhängend und $U \to Z$ von endlichem Typ ist, ein cofinales System.

(c) Die strikte Henselisierung von Z in $\overline{x}$ ist definiert als

$$\mathcal{O}_{Z,\overline{x}} = \varinjlim \Gamma(U, O) \; ,$$

wobei U über die étalen Umgebungen von $\overline{x}$ läuft. Dann ist $\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}$ ein strikt henselscher Ring, d.h., lokal, henselsch, mit separabel abgeschlossenem Restklassenkörper.

(d) Ist $\mathcal{F}$ eine étale Garbe auf Z, so ist der Halm von $\mathcal{F}$ in $\overline{x}$ definiert als

$$\mathcal{F}_{\overline{x}} = \varinjlim \mathcal{F}(U) \; ,$$

wobei U über die étalen Umgebungen von $\overline{x}$ läuft (Insbesondere ist also $\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}$ der Halm der Ringgarbe $\mathbb{G}_a$ in $\overline{x}$).

(e) Sei Z zusammenhängend und $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von Z. Definiere den Funktor

$$\begin{array}{rccl} \phi = \phi_{\overline{x}} : & \begin{pmatrix} \text{endliche étale Morphismen} \\ Z' \to Z \end{pmatrix} & \to & (\text{endliche Mengen}) \\ & Z' & \mapsto & Hom_Z(\overline{x}, Z') \, . \end{array}$$

und die pro-endliche Gruppe

$$\pi_1(Z, \overline{x}) = Aut(\phi) = \varprojlim \; Aut_Z(Z') \; ,$$

wobei der Limes über die endlichen étalen Morphismen $Z' \to Z$, d.h., über die endlichen étalen Z-Schemata Z' läuft. Dann ist der induzierte Funktor

$$\phi : \begin{pmatrix} \text{endliche étale} \\ Z\text{-Schemata} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{endliche diskrete} \\ \pi_1(Z, \overline{x})\text{-Mengen} \end{pmatrix}$$

eine Kategorienäquivalenz. Für eine pro-endliche Gruppe G ist eine endliche diskrete G-Menge eine endliche Menge M mit einer Operation von G derart, daß der Stabilisator eines jeden Elementes $m \in M$ offen in G ist.

Definition 2.2 Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Z heißt **lokal-konstant**, wenn es eine étale Überdeckung $(U_i \to Z)$ gibt derart, dass $\mathcal{F} \mid U_i$ konstant ist für alle i.

Bemerkung 2.3 Hat $\mathcal{F}$ zusätzlich endliche Halme und ist Z quasi-kompakt, so folgt aus der Abstiegstheorie, dass $\mathcal{F}$ durch ein endliches étales Gruppenschema H über Z dargestellt wird (d.h., $\mathcal{F}$ ist isomorph zum Funktor $U \mapsto Hom_Z(U, H)$). Ist umgekehrt H ein endliches étales Gruppenschema, so ist die durch H dargestellte Garbe $\mathcal{F}$ lokal-konstant mit endlichen Halmen:

Ohne Einschränkung ist Z zusammenhängend. Dann ist H zusammenhängend, denn $H \to Z$ ist abgeschlossen (als endlicher Morphismus) und offen (als étaler Morphismus von endlichem Typ). Sei $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von Z. Dann entspricht H einer zusammenhängenden endlichen $\pi_1(Z, \overline{x})$-Menge $M = \pi_1(Z, \overline{x})/U$, wobei $U \subseteq \pi_1(Z, \overline{x})$ eine offene Untergruppe ist. Es gibt einen offenen Normalteiler $N \subseteq \pi_1(Z, \overline{x})$ mit $N \subseteq U$, und dieser entspricht einer étalen Überlagerung

$$H' \to H \to Z\,.$$

Ist $\overline{y}$ ein geometrischer Punkt von H' über $\overline{x}$, so ist $\pi_1(H', \overline{y}) \cong N$, und die Einschränkung von $M' = \pi_1(H, \overline{x})$ auf $\pi_1(H', \overline{x})$ ist trivial. Dies zeigt, dass das Pullback $H' \times_Z H' \to H'$ der Überlagerung $H' \to Z$ trivial ist, also auch das Pullback $H \times_Z H' \to H'$. Daher ist die Einschränkung von $Hom_Z(, H)$ auf H' konstant.

Nach dem Yoneda-Lemma erhält man also eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \text{endliche étale kommmutative} \\ \text{Gruppenschemata über } Z \end{array}\right) & \longleftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \text{lokal konstante Garben} \\ \text{mit endlichen Halmen auf } Z \end{array}\right) \\ H & \mapsto & Hom_Z(-, H) \end{array}$$

Wir berechnen noch den Halm von $\mathcal{F} = Hom_Z(-, H)$ in einem geometrischen Punkt $\overline{x} = \mathrm{Spec}(\Omega)$: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{\overline{x}} & = & \varinjlim Hom_Z(U, H) \xrightarrow[\sim]{(1)} Hom_Z(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}), H) \\ & = & Hom_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}})}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}), H \times_Z \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) \\ & \xrightarrow[\sim]{(2)} & Hom_{\mathrm{Spec}(k(\overline{x}))}(\mathrm{Spec}(k(\overline{x})), H \times_Z Spec(k(\overline{x}))) \\ & = & Hom_Z(\mathrm{Spec}(k(\overline{x})), H) \xrightarrow[\sim]{(3)} Hom_Z(\overline{x}, H) = \phi_{\overline{x}}(H)\,. \end{array}$$

Hierbei läuft der Limes ohne Einschränkung über affine étale Umgebungen von $\overline{x}$, deswegen ist (1) eine Bijektion [Mi] II 3.3), $k(\overline{x})$ ist der Restklassenkörper des henselschen Rings $\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}$, deswegen ist (2) eine Bijektion [Mi] I 4.4), und (3) ist eine Bijektion, da für einen Punkt $y \in H$ über dem Bildpunkt x von $\overline{x}$ die Restklassenerweiterung $k(y)/k(x)$ separabel ist und deswegen $Hom_{k(x)}(k(y), k(\overline{x})) = Hom_{k(x)}(k(y), \Omega)$ für die separabel abgeschlossenen Körper $k(\overline{x})$ und Ω.

Zusammen mit der Kategorienäquivalenz in 2.1 (e) ergibt sich eine Kategorienäquivalenz für zusammenhängendes quasi-kompaktes Z mit geometrischem Punkt $\overline{x}$:

$$\begin{pmatrix}\text{lokal-konstante Garben}\\ \text{mit endlichen Halmen}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\text{endliche diskrete}\\ \pi_1(z,\overline{x})\text{-Moduln}\end{pmatrix}$$
$$\mathcal{F} \qquad\qquad \mapsto \qquad\qquad \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Es gibt noch eine andere Charakterisierung von lokal-konstanten Garben.

Definition 2.4 (a) Ein geometrischer Punkt $\overline{x}$ eines Schemas Z heißt Spezialisierung eines anderen geometrischen Punktes $\overline{y}$ von Z, wenn es einen Ringhomomorphismus über Z

$$\varphi : \mathcal{O}_{Z,\overline{x}} \to \mathcal{O}_{Z,\overline{y}}$$

der strikten Henselisierungen gibt. Wir nennen φ (oder Spec(φ)) dann einen Spezialisierungsmorphismus.

(b) Ist $\mathcal{F}$ eine étale Garbe auf Z, so erhält man hieraus eine Spezialisierungsabbildung

$$\varphi_* : \mathcal{F}_{\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{y}}$$

wie folgt. Da $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) = \varprojlim_U U$, wo U über die étalen Umgebungen von $\overline{x}$ läuft, entspricht φ einem Element aus

$$\varprojlim_U Hom_Z(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}),\ U)\ .$$

Ohne Einschränkung seien dabei die U von endlichem Typ über Z. Da analog $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}) = \varprojlim_V V$, wobei V über die étalen Umgebungen von $\overline{y}$ läuft, die ohne Einschränkung als affin angenommen werden können, ist

$$Hom_Z(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}), U) = \varinjlim_V Hom_Z(V, U)$$

(vergl. [Mi] II 3.3). Daher entspricht φ einem Element in

$$\varprojlim_U \varinjlim_V Hom_Z(V, U)\ ,$$

also einem Morphismus zwischen Pro-Objekten $(V) \to (U)$. Dieser induziert dann einen Homomorphismus

$$\mathcal{F}_{\overline{x}} = \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_{\overline{y}}\ .$$

Bemerkung 2.5 (a) Unter Verwendung von Garben-Pullbacks zum kommutativen Diagramm

$$f = \mathrm{Spec}(\varphi): \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

kann man $\varphi_* = f^*$ auch als die folgende Komposition erhalten:

$$\mathcal{F}_{\overline{x}} = (\pi^*\mathcal{F})_{\overline{x}} \overset{(1)}{=} (\pi^*\mathcal{F})(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) \overset{f^*}{\to} (\pi'^*\mathcal{F})(\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}) \overset{(2)}{=} (\pi'^*\mathcal{F})_{\overline{y}} = \mathcal{F}_{\overline{y}}\ ,$$

wobei die Isomorphie (1) aus der Tatsache folgt, dass $\overline{x}$ für den strikten Henselschen Ring $\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}$ nur triviale étale Umgebungen besitzt, analog für (2) und $\overline{y}$. Der mittlere Pfeil ist von der (Adjunktions-)Abbildung

$$\pi^*\mathcal{F} \to f_*f^*\pi^*\mathcal{F} = f_*\pi'^*\mathcal{F}$$

induziert.

(b) Ist $\mathcal{F}$ eine konstante Garbe, mit Halm A, so ist φ_* offenbar ein Isomorphismus, da die obigen U und V alle so gewählt werden können, dass sie zusammenhängend sind: dann sind alle Gruppen gleich A und die Abbildungen Identitäten.

(c) Schließlich bemerken wir noch, dass $\overline{x}$ eine Spezialisierung von $\overline{y}$ ist, wenn der Bildpunkt $x \in Z$ eine Spezialisierung des Bildpunktes y von $\overline{y}$ ist, d.h., im Abschluß $\overline{\{y\}}$ enthalten ist. Für jede étale Umgebung U von $\overline{x}$ ist dann nämlich y im Bild von U enthalten und damit die Menge $Hom_Z(\overline{y}, U)$ nicht-leer und endlich. Weiter stimmt diese Menge mit $Hom_Z(Spec\ \mathcal{O}_{Z,\overline{y}}, U)$ überein, und der projektive Limes

$$Hom_Z(Spec\ \mathcal{O}_{Z,\overline{y}}, Spec\ \mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) = \varprojlim_U Hom_Z(Spec\ \mathcal{O}_{Z,\overline{y}}, U)$$

von endlichen Mengen ist nicht-leer.

Lemma 2.6 Sei Z ein lokal noethersches Schema. Eine étale Garbe $\mathcal{F}$ auf Z mit endlichen Halmen ist genau dann lokal konstant, wenn alle Spezialisierungsabbildungen bijektiv sind.

Beweis Eine Richtung folgt aus 2.5 (b). Seien umgekehrt alle Spezialisierungsabbildungen Isomorphismen. Da die Frage lokal ist, können wir annehmen, dass Z noethersch ist. Sei $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von Z, und sei $A = \mathcal{F}_{\overline{x}}$. Dann ist

$$A = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \cdot t_i$$

mit $t_1, \ldots, t_r \in A$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$.

Es gibt eine étale Umgebung U von $\overline{x}$ und Schnitte $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{F}(U)$, die auf $t_s, \ldots, t_r$ abgebildet werden. Weiter können wir (durch Übergang zu einer 'kleineren' étalen Umgebung) annehmen, dass s_i von m_i annulliert wird. Wir erhalten einen Morphismus von étalen Garben

$$\psi_U : \mathcal{G} = \left(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}\right)_U \to \mathcal{F}|_U\,,$$

der das Basiselement t_i von $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ auf s_i abbildert, wobei links die zu A assoziierte Garbe auf U steht. φ_U induziert einen Isomorphismus der Halme

$$\psi_{\overline{x}} : \mathcal{G}_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Seien $Z_1, \ldots, Z_k$ die irreduziblen Komponenten von Z, die den Bildpunkt x von $\overline{x}$ enthalten, seien $Z_{k+1}, \ldots, Z_m$ die restlichen Komponenten und sei $V \subseteq U$ die offene Teilmenge, die durch Entfernen der Urbilder von $Z_{k+1}, \ldots, Z_m$ entsteht. Sind dann $\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_k$ geometrische Punkte von V über den generischen Punkten $\eta_1, \ldots, \eta_k$ von $Z_1, \ldots, Z_k$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\overline{\eta}_i} \arrow[r, "\psi_{\overline{\eta}_i}"] & \mathcal{F}_{\overline{\eta}_i} \\
\mathcal{G}_{\overline{x}} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\psi_{\overline{x}}", "\sim"'] & \mathcal{F}_{\overline{x}}\,, \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

wobei wir vertikale Isomorphismen durch eine Spezialisierungsabbildung haben (für $\mathcal{G}$ nach 2.5 (b), und für $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung). Daher sind die $\psi_{\overline{\eta_i}}$ Isomorphismen. Ist nun $\overline{y}$ ein beliebiger geometrischer Punkt von V, auch aufgefasst als geometrischer Punkt von Z, so ist $\overline{y}$ Spezialisierung von (mindestens) einem $\overline{\eta}_i$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\overline{\eta}_i} \arrow[r, "\psi_{\overline{\eta}_i}", "\sim"'] & \mathcal{F}_{\overline{\eta}_i} \\
\mathcal{G}_{\overline{y}} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\psi_{\overline{y}}"] & \mathcal{F}_{\overline{y}} \arrow[u, "\wr"'] .
\end{tikzcd}$$

Also ist $\psi_{\overline{y}}$ ein Isomorphismus und, da $\overline{y}$ beliebig war, $\psi : \mathcal{G}|_V \to \mathcal{F}|_V$ ein Isomorphismus.

Definition 2.7 Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Z heißt **konstruierbar**, wenn es für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subset Z$ ein offenes nicht-leeres Unterschema $U \subset Y$ gibt, so dass $\mathcal{F}|_U$ lokal konstant mit endlichen Halmen ist.

Bemerkung 2.8 Ist Z noethersch, so ist dies äquivalent dazu, dass es eine Stratifizierung $Z = \dot{\bigcup} Z_i$ durch endlich viele lokal-abgeschlossene Unterschemata Z_i gibt, so dass $\mathcal{F}\mid_{Z_i}$ lokal konstant mit endlichen Halmen ist für alle i.

Beispiele 2.9 (a) Sei ℓ prim und $\mu_{\ell^n} = Ker(\mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m)$, d.h., die étale Garbe auf Z mit

$$\mu_{\ell^n}(U) = \{\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid \alpha^{\ell^n} = 1\}$$

für U étale über Z. Dann ist μ_{ℓ^n} darstellbar durch

$$\mu_{\ell^n, Z} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1)) \times_{Spec(\mathbb{Z})} Z \quad ,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} Hom_Z(U, \mu_{\ell^n, Z}) &= Hom(U, \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1))) \\ &= Hom_{Ringe}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1), \Gamma(U, \mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} \mu_{\ell^n}(U) \ , \end{aligned}$$

wobei die letzte Abbildung einen Ringhomomorphismus φ auf das Element $\varphi(T)$ abbildet. Ist ℓ invertierbar, so ist $\mu_{\ell^n, Z}$ endlich und étale über Z: Da diese Eigenschaften bei Basiswechsel respektiert werden, reicht es zu zeigen, dass

$$\mu_{\ell^n, Z[\frac{1}{\ell}]} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}][T]/(T^{\ell^n} - 1))$$

endlich und étale über $\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ ist (beachte, dass $Z \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ nach Voraussetzung über $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ faktorisiert). Die Endlichkeit ist klar, und μ_{ℓ^n} ist étale, da das von $T^{\ell^n} - 1$ und seiner Ableitung $\ell^n T^{\ell^n - 1}$ erzeugte Ideal die 1 enthält, falls ℓ invertierbar ist (vgl. das Kriterium [Mi] I 3.4). Ist ℓ invertierbar, so ist also μ_{ℓ^n} eine lokal-konstante Garbe mit endlichen Halmen. Ist $\overline{x} = \mathrm{Spec}(\Omega)$ ein geometrischer Punkt von $\overline{x}$, so berechnet sich der Halm weiter wie folgt:

$$(\mu_{\ell^n})_{\overline{x}} = \varinjlim \mu_{\ell^n}(U) = \mu_{\ell^n}(\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}) \underset{\sim}{\longrightarrow} \mu_{\ell^n}(k(\overline{x})) = \mu_{\ell^n}(\Omega) \ .$$

Hierbei läuft U über die étalen Umgebungen von $\overline{x}, k(\overline{x})$ ist der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{Z,\overline{x}}$, und der vorletzte Pfeil ist ein Isomorphismus nach dem Henselschen Lemma.

(b) Ist $j : U \hookrightarrow Z$ eine offene Immersion und $\mathcal{F}$ eine konstruierbare Garbe auf U, so ist $j_!\mathcal{F}$, die Fortsetzung durch null, konstruierbar auf Z. Ist $\mathcal{F}$ lokal-konstant, so ist $j_!\mathcal{F}$ aber im allgemeinen nicht mehr lokal-konstant, z.B. nicht, wenn Z zusammenhängend und $\emptyset \neq U \neq Z$ ist.

Lemma 2.10 Sei Z lokal noethersch.

(a) Quotienten und Untergarben von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar.

(b) Erweiterungen von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar, d.h., ist

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben, so ist mit $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ auch $\mathcal{F}$ konstruierbar.

(c) Tensorprodukte von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar.

(d) Ist Z noethersch, so sind die folgenden Aussagen äquivalent für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Z:
(i) $\mathcal{F}$ ist konstruierbar.
(ii) $\mathcal{F}$ ist eine noethersche Torsionsgarbe (d.h., ein noethersches Objekt in der Kategorie der Torsionsgarben).
(iii) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und $j : U \to Z$ étale von endlichem Typ, so dass $\mathcal{F}$ Quotient von $j_!\mathbb{Z}/m$ ist.

Beweis Wir behaupten zunächst: Ist

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

ein Morphismus von konstruierbaren Garben auf einem beliebigen Schema Z, so sind $\mathrm{Ker} f$ $\mathrm{Im}\, f$ und $\mathrm{Coker}\, f$ konstruierbar. Es reicht nämlich, die analoge Aussage zu beweisen, bei der "konstruierbar" durch "konstant mit endlichem Halm" ersetzt wird. Dann ist die Behauptung aber klar.

Nun zeigen wir (d).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Ohne Einschränkung ist Z irreduzibel. Sei $U \subset Z$ offen nicht-leer so, dass $\mathcal{F}$ lokal konstant auf U ist, und sei $\overline{\eta}$ ein geometrischer Punkt über dem generischen Punkt η von U. Nach 2.6 sind für alle geometrischen Punkte $\overline{x}$, die Spezialisierungsabbildungen

$$\mathcal{F}_{\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{\eta}}$$

Isomorphismen. Sei nun $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untergarben. Wir haben zu zeigen, dass die Folge stationär wird. Da $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ endlich ist, wird die Folge der $\mathcal{F}_{i,\overline{\eta}}$ stationär, ist also ohne Einschränkung konstant. Die Spezialisierungsabbildungen

$$\mathcal{F}_{i,\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{i,\overline{\eta}}$$

sind nach dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{i,\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_{i,\overline{\eta}} \arrow[d, hook, "\cong"] \\
\mathcal{F}_{\overline{x}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}_{\overline{\eta}}
\end{tikzcd}$$

injektiv. Seien $s_1, \dots, s_r$ Erzeuger von $\mathcal{F}_{1,\overline{\eta}}$, und sei V eine étale Umgebung von $\overline{\eta}$ so, dass $s_1, \dots, s_r$ alle von Schnitten in $\mathcal{F}_1(V)$ kommen. Dann sind für $\overline{x}$ über V die Halmabbildungen $\mathcal{F}_{1,\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{i,\overline{x}}$ bijektiv, wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1(V) \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \mathcal{F}_{1,\overline{\eta}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}_{i,\overline{\eta}} \\
& \mathcal{F}_{1,\overline{x}} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathcal{F}_{i,\overline{x}} \arrow[u, hook] .
\end{tikzcd}$$

Damit ist die Folge der $\mathcal{F}_i$ konstant auf dem offenen Bild V' von V in Z. Mit noetherscher Induktion zeigt man nun, dass die Folge auf dem abgeschlossenen Komplement $Z - V'$ ebenfalls konstant wird, und damit die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $j: U \to Z$ étale, so ist per definitionem $j_!$ linksadjungiert zu j^*; insbesondere gilt

$$Hom_Z(j_!\mathbb{Z}/m, \mathcal{F}) = Hom_U(\mathbb{Z}/m, j^*\mathcal{F}) = {}_m\mathcal{F}(U)\,,$$

wobei ${}_mA = \{a \in A \mid ma = 0\}$ für eine abelsche Gruppe A. Ist $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von Z und $f \in \mathcal{F}_{\overline{x}}$, so gibt es also $m \in \mathbb{N}$ und U wie oben, so dass f im Bild eines Morphismus $j_!\mathbb{Z}/m \to \mathcal{F}$ liegt (Dies bedeutet, dass die $j_!\mathbb{Z}/m$ eine Familie von Generatoren in der Kategorie der Torsionsgarben sind). Ist nun $\mathcal{F}$ noethersch, so gibt es also endlich viele $U_1, \dots, U_r$ und $m_1, \dots, m_r$ und einen surjektiven Morphismus

$$\bigoplus_{i=1}^{r} (j_i)_!\mathbb{Z}/m_i \twoheadrightarrow \mathcal{F}\,.$$

Es folgt die Behauptung, mit $U = \coprod U_i$ und $m = kgV(m_i)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Wähle eine Surjektion

$$\varphi : j_!\mathbb{Z}/m \twoheadrightarrow \mathcal{F}\,.$$

Da $j_!\mathbb{Z}/m$ offenbar konstruierbar ist, also noethersch, gibt es mit denselben Argumenten wie oben einen Epimorphismus

$$j'_!\mathbb{Z}/m \twoheadrightarrow Ker\varphi$$

für einen étalen Morphismus von endlichem Typ $j' : U' \to Z$. Also ist $\mathcal{F}$ konstruierbar, nach der anfangs des Beweises gezeigten Behauptung, als Kokern eines Morphismus

$$j'_!\mathbb{Z}/m \to j_!\mathbb{Z}/m\,.$$

Hieraus folgt nun leicht (a): Die Behauptung über Quotienten folgt sofort mit dem Kriterium (c) (iii); damit ist aber eine Untergarbe $\mathcal{F}'$ einer konstruierbaren Garbe konstruierbar als Kern des Morphismus von konstruierbaren Garben $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

(b): Es genügt, die entsprechende Aussage für lokal konstante Garben zu zeigen. Sei

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben. Haben $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ endliche Halme, so gilt dies offenbar auch für $\mathcal{F}$. Seien $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ lokal konstant. Sind $\overline{x}$ und $\overline{y}$ geometrische Punkte von Z, und ist

$\varphi : \mathcal{O}_{Z,\overline{x}} \to \mathcal{O}_{Z,\overline{y}}$ ein Spezialisierungsmorphismus, so haben wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'_{\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathcal{F}_{\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathcal{F}''_{\overline{x}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'_{\overline{y}} \arrow[r] & \mathcal{F}_{\overline{y}} \arrow[r] & \mathcal{F}''_{\overline{y}} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Sind die vertikalen Spezialisierungsabbildungen φ_* Isomorphismen für $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$, so auch für $\mathcal{F}$, nach dem Fünferlemma. Die Behauptung folgt also mit Lemma 2.6.

(c): Es genügt wieder, dies für lokal konstante und dann für konstante Garben zu zeigen, wo die Behauptung offensichtlich folgt.

3 Konstruierbare $\mathbb{Z}_\ell$-Garben

Definition 3.1 (siehe SGA 5 VI) (a) Eine $\mathbb{Z}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema Z ist ein projektives System

$$\ldots \to \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n \to \ldots \to \mathcal{F}_1$$

von Garben auf Z, so dass gilt

(i) $\mathcal{F}_n$ wird von ℓ^n annuliert, ist also eine $\mathbb{Z}/\ell^n$-Garbe,

(ii) $\mathcal{F}_{n+1}/\ell^n \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n$ ist ein Isomorphismus. Wir schreiben im Folgenden nur $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$.

(b) Morphismen von $\mathbb{Z}_\ell$-Garben sind Morphismen von projektiven Systemen, also kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{G}_{n+1} \arrow[r] & \mathcal{G}_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{G}_1 \end{tikzcd}$$

(Es *folgt* wegen (a) (ii):

$$Hom((\mathcal{F}_n),(\mathcal{G}_n)) = \varprojlim_n \; Hom(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n) \quad ,$$

wobei die Übergangsabbildungen durch

$$Hom(\mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{G}_{n+1}) \longrightarrow Hom(\mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{G}_n) \underset{\text{(ii)}}{\xrightarrow{\sim}} Hom(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$$

gegeben sind).

(c) $\mathbb{Q}_\ell$-Garben sind als Objekte dasselbe wie $\mathbb{Z}_\ell$-Garben, nur sind die Morphismenmengen mit $\mathbb{Q}_\ell$ tensoriert.

(d) (naive Definition) Die Kohomologie einer $\mathbb{Z}_\ell$-Garbe $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ ist definiert als

$$H^i(Z, \mathcal{F}) = \varprojlim_n H^i(X, \mathcal{F}_n) \quad .$$

Der Halm in einem geometrischen Punkt $\overline{x}$ von Z wird definiert als

$$\mathcal{F}_{\overline{x}} = \varprojlim_n (\mathcal{F}_n)_{\overline{x}} \quad .$$

Für $\mathbb{Q}_\ell$-Garben tensoriert man diese Gruppen mit $\mathbb{Q}_\ell$.

(e) Eine $\mathbb{Z}_\ell$- oder $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ heißt **getwistet konstant**, wenn die Komponenten $\mathcal{F}_n$ lokal konstante Garben sind. $\mathcal{F}$ heißt **konstruierbar**, wenn die Komponenten konstruierbar sind. Konstruierbare getwistet konstante Garben heißen auch **glatt**.

(f) Das Tensorprodukt zweier $\mathbb{Z}_\ell$- (oder $\mathbb{Q}_\ell$-)Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ wird definiert durch $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = (\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{G}_n)$, mit dem Tensorprodukt der Übergangsabbildungen. Das Dual wird definiert durch $\mathcal{F}^\vee = (\mathcal{F}_n^\vee)$, mit dem $\mathbb{Z}/\ell^n$-Dual $\mathcal{F}_n^\vee = \underline{Hom}(\mathcal{F}_n, \mathbb{Z}/\ell^n)$. Hierbei ist $\underline{\mathrm{Hom}}$ das Garben-Hom, und die Übergangsabbildungen sind analog wie in (b) gebildet.

(g) Eine Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

von $\mathbb{Z}_\ell$-Garben (bzw. $\mathbb{Q}_\ell$-Garben) heißt exakt, wenn für alle geometrischen Punkte $\overline{x}$ von Z die assoziierte Sequenz der Halme exakt ist.

Beispiel 3.2 Für ℓ invertierbar auf Z und $m \in \mathbb{Z}$ setze $\mathbb{Z}_\ell := (\mathbb{Z}/\ell^n(m))$ mit den offensichtlichen Übergangsabbildungen, wobei

$$\mathbb{Z}/\ell^n(m) = \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes m} & m \geq 0, \\ (\mu_{\ell^n}^{\otimes |m|})^\vee & m < 0 \end{cases}.$$

Dann ist $\mathbb{Z}_\ell = \mathbb{Z}_\ell(0)$ konstant und die $\mathbb{Z}_\ell(m)$ sind glatte $\mathbb{Z}_\ell$-Garben für alle $m \in \mathbb{Z}$ nach Beispiel 2.9 (a). Offenbar gelten die Regeln $\mathbb{Z}_\ell(m)^\vee = \mathbb{Z}_\ell(-m)$ und $\mathbb{Z}_\ell(m) \otimes \mathbb{Z}_\ell(n) = \mathbb{Z}_\ell(m+n)$.

Proposition 3.3 Sei Z lokal noethersch.

(a) Eine $\mathbb{Z}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ auf Z ist genau dann konstruierbar, wenn $\mathcal{F}_1$ konstruierbar ist.

(b) Eine $\mathbb{Z}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ auf Z ist konstruierbar genau dann, wenn es für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subset Z$ ein offenes nicht-leeres Unterschema $U \subset Y$ gibt derart, dass $\mathcal{F}\,|_U$ glatt ist.

(c) Ist Z noethersch und zusammenhängend und $\overline{x} \to X$ ein geometrischer Punkt, so gibt es eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} (\text{glatte } \mathbb{Z}_\ell\text{-Garben auf } Z) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \text{endlich erzeugte } \mathbb{Z}_\ell\text{-Moduln} \\ \text{mit stetiger Operation von } \pi_1(Z, \overline{x}) \end{array} \right) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}_{\overline{x}}\,. \end{array}$$

Dasselbe gilt, wenn $\mathbb{Z}_\ell$ durch $\mathbb{Q}_\ell$ ersetzt wird.

Beweis (a): Die Aussage ist lokal, es sei also ohne Einschränkung Z noethersch. Sei $\mathcal{F}_1$ konstruierbar. Wir zeigen durch Induktion über n, dass alle $\mathcal{F}_n$ konstruierbar sind. Ist dies für n bereits bewiesen, so betrachte die exakten Sequenzen

(3.3.1) $$0 \to \ell^n \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_{n+1}/\ell^n \mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n \to 0$$

(3.3.2) $$\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_{n+1}/\ell\, \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\ell^n} \ell^n \mathcal{F}_{n+1} \to 0\,,$$

wobei der erste Isomorphismus in (3.3.2) durch Iteration aus 3.1 (ii) folgt:

$$\mathcal{F}_{n+1}/\ell\mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n/\ell\mathcal{F}_n \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2/\ell\mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1\,.$$

Es folgt dann aus Lemma 2.10, dass $\ell^n\mathcal{F}_{n+1}$ und $\mathcal{F}_{n+1}$ konstruierbar sind.

(b): Für eine $\mathbb{Z}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ auf Z sei

$$gr^r\mathcal{F} := Ker(\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{F}_{r-1}) = \ell^{r-1}\mathcal{F}_r$$

für $r \in \mathbb{N}$ (wobei $\mathcal{F}_0 := 0$). Dann ist

$$gr\mathcal{F} := \bigoplus_{r\geq 1} gr^r\mathcal{F}$$

ein graduierter $\mathbb{F}_\ell[T]$-Modul wie folgt: erkläre

$$T^s: \qquad gr^r\mathcal{F} \longrightarrow gr^{r+s}\mathcal{F}$$

als Komposition der Morphismen

$$\ell^{r-1}\mathcal{F}_r \cong \ell^{r-1}(\mathcal{F}_{r+s}/\ell^r\mathcal{F}_{r+s}) \xrightarrow{\cdot\ell^s} \ell^{r+s-1}\mathcal{F}_{r+s} \quad ,$$

und setze die Operation $\mathbb{F}_\ell$-linear fort. (Erklärung: käme $\mathcal{F}$ wirklich von einem Objekt mit $\mathbb{Z}_\ell$-Operation, so wäre $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}/\ell^r\mathcal{F}$, und die obige die übliche Operation von $gr\ \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{r\geq 0} \ell^r\mathbb{Z}_p/\ell^{r+1}\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_\ell[T]$ auf $gr\ \mathcal{F} = \bigoplus_{r\geq 0} \ell^r\mathcal{F}/\ell^{r+1}\mathcal{F}$). Die im Beweis von (a) konstruierten Surjektionen $\mathcal{F}_1 \longrightarrow gr^p\mathcal{F}$ definieren eine Surjektion von graduierten $\mathbb{F}_\ell[T]$-Garben

$$\varphi : \mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow gr\ \mathcal{F} \quad .$$

Nun benötigen wir das bekannte

Hilbert-Lemma 3.4 Ist $\mathcal{F}_1$ eine noethersche Garbe, so ist $\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{F}_1$ noethersch als graduierte $\mathbb{F}_\ell[T]$-Garbe (dies gilt allgemeiner für ein Objekt in einer abelschen Kategorie).

Der Beweis dieser Aussage folgt leicht durch Betrachtung einer Doppelfiltrierung in $\mathcal{F}_1$, vgl. SGA 5 V 5.1.4.

Wie im Beweis von Lemma 2.10 (c) erhält man eine Surjektion von graduierten $\mathbb{F}_\ell[T]$-Garben

$$\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{G} \twoheadrightarrow Ker\ \varphi \quad ,$$

mit einer konstruierbaren, graduierten Garbe $\mathcal{G}$ auf Z. Damit ist $gr\mathcal{F}$ der Kokern von

$$\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_q[T] \otimes \mathcal{F}_1 \quad .$$

Da $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{G}$ konstruierbar sind, folgt nun, dass $gr\mathcal{F}$ konstruierbar ist in dem Sinne, dass es für jedes abgeschlossene Y in Z ein offenes U in Y gibt derart, dass $gr\mathcal{F}$ eingeschränkt auf U lokal konstant ist, d.h., dies gilt für alle $gr^p\mathcal{F}$. Da lokal konstante Garben abgeschlossen gegenüber Erweiterungen sind (siehe den Beweis von Lemma 2.10 (b)), folgt die Behauptung: auf U sind alle $\mathcal{F}_n$ lokal konstant.

Die Aussage (c) von Proposition 3.3 ist klar; man beachte, dass man die folgende Kategorienäquivalenz hat.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c}\text{endlich erzeugte}\\ \mathbb{Z}_\ell\text{-Moduln mit}\\ \text{stetiger Operation von } \pi_1(Z,\overline{x})\end{array}\right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c}\ell\text{-adische projektive}\\ \text{Systeme von endlichen}\\ \text{diskreten } \pi_1(Z,\overline{x})\text{-Moduln}\end{array}\right) \\ M & \mapsto & (M/\ell^n M) \\ \varprojlim_{n} (M_n) & \leftarrow\!\shortmid & (M_n)\,. \end{array}$$

Ein ℓ-adisches projektives System in einer abelschen Kategorie ist dabei ein projektives System

$$\cdots \to A_{n+1} \to A_n \to \cdots \qquad \to A_1$$

mit (i) $\ell^n A_n = 0$ und (ii) $A_{n+1}/\ell^n A_{n+1} \xrightarrow{\sim} A_n$. Schließlich erhält man aus der linksstehenden Kategorie die Kategorie der $\mathbb{Q}_\ell$-Darstellungen von $\pi_1(Z,\overline{x})$, d.h., der endlich-dimensionalen $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorräume, wenn man die Homomorphismenmengen über $\mathbb{Z}_\ell$ mit $\mathbb{Q}_\ell$ tensoriert.

4 Kohomologie mit kompakten Träger

Wir notieren weitere Definitionen und Eigenschaften der étalen Kohomologie, die zum Verständnis der Lefschetz-Formel KOH 8/Theorem 1.6 benötigt werden.

KOH 9 Kohomologie mit kompaktem Träger: Sei X separiert von endlichem Typ über einem Körper k. Nach Nagata gibt es eine offene Immersion $\mu : X \hookrightarrow X_1$ in ein eigentliches k-Schema X_1, und für eine Torsionsgarbe $\mathcal{F}$ auf X definiert man die Kohomologie mit kompaktem Träger durch

$$H_c^i(X, \mathcal{F}) := H^i(X_1, \mu_! \mathcal{F}) \ ,$$

wobei $\mu_! \mathcal{F}$ die Fortsetzung durch null von $\mathcal{F}$ auf X_1 ist: $\mu_! \mathcal{F}$ ist assoziiert zur Prägarbe $\mu_!^P \mathcal{F}$:

$$\mu_!^P \mathcal{F}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & V \to X_1 \text{ faktorisiert über } X, \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Lemma 4.1 (a) $H_c^i(X, \mathcal{F})$ hängt nicht von der Wahl der “Kompaktifizierung” $\mu : X \hookrightarrow X_1$ ab.

(b) $\mathcal{F} \mapsto H_c^i(X, \mathcal{F})$ ist ein exakter δ-Funktor.

(c) Ist $i : Z \hookrightarrow X$ abgeschlossen mit offenem Komplement $j : U \hookrightarrow X$, so hat man eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_c^{i-1}(Z, \mathcal{F}) \to H_c^i(U, \mathcal{F}) \to H_c^i(X, \mathcal{F}) \to H_c^i(Z, \mathcal{F}) \to H_c^{i+1}(U, \mathcal{F}) \to \ldots \ ,$$

wobei die Einschränkungen $i^* \mathcal{F}$, $i^* \mathcal{F}$ wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichnet sind.

Zum Beweis von (a) benötigt man

KOH 10 Eigentlicher Basiswechsel: Sei $f : X \to Y$ eigentlich.

(a) Ist $\mathcal{F}$ konstruierbar auf X, so ist $R^i f_* \mathcal{F}$ konstruierbar für alle $i \geq 0$.

(b) Für ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

und eine Torsionsgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist der Basiswechselmorphismus

$$g^* R^i f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i f'_* g'^* \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus für alle $i \geq 0$.

Bemerkungen 4.2 (a) Der schwierige Teil ist (a); Teil (b) folgt leicht daraus, vgl. [Mi] VI §2.

(b) Für $i = 0$ wird der Basiswechselmorphismus wie folgt definiert: da g^* linksadjungiert zu g_* ist, genügt es, einen Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \longrightarrow g_*f'_*g'^*\mathcal{F} = f_*g'_*g'^*\mathcal{F}$$

anzugeben; dieser ist das Bild unter f_* des Adjunktionsmorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow g'_*g'^*\mathcal{F}\,.$$

Für $i \geq 0$ erhält man den Morphismus durch Betrachtung injektiver Auflösungen.

(c) Sei X ein quasi-kompaktes Schema, k ein Körper mit separablem Abschluß k_s und $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ ein Morphismus. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und bezeichnet $\overline{x}$ den geometrischen Punkt $\mathrm{Spec}(k_s) \to \mathrm{Spec}(k)$, so hat man eine kanonische Isomorphie

$$(R^if_*\mathcal{F})_{\overline{x}} \cong H^i(X \times_k k_s, \overline{x}^*\mathcal{F})\,,$$

wobei $\overline{x}$ auch für den Basiswechsel $X \times_k k_s \to X$ von $\overline{x}$ steht. Da nämlich $R^if_*\mathcal{F}$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe $(g : U \to \mathrm{Spec}(k)) \longmapsto H^i(X \times_k U, g^*\mathcal{F})$ ist, und diese dieselben Halme hat, folgt die Behauptung aus der Verträglichkeit von Kohomologie mit Limiten (vergl. [Mi]III 1.16), nämlich aus der Gleichheit

$$\varinjlim_{K} H^i(X \times_k K, h_K^*\mathcal{F}) = H^i(X \times_k k_s, \overline{x}^*\mathcal{F})\,,$$

wobei $h_K : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ die zusammenhängenden étalen Umgebungen von $\overline{x}$ durchläuft, also die endlichen separablen Erweiterungen K von k in k_s.

Insbesondere folgt aus KOH 10 (a), dass für eigentliches f und konstruierbares $\mathcal{F}$ auf X die Gruppe $H^i(X \times_k k_s, \overline{x}^*\mathcal{F})$ endlich ist. Als Spezialfall ($k = k_s, \mathcal{F} = \mathbb{Z}/\ell^n$) folgt KOH 5.

(d) Ist $f : X \to Y$ eigentlich, $\overline{y} \to Y$ ein geometrischer Punkt und

$$\begin{tikzcd} X_{\overline{y}} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \overline{y} \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm, so folgt aus (c) und KOH 10 (b), dass es für Torsionsgarben $\mathcal{F}$ auf X kanonische Isomorphismen

$$(R^if_*\mathcal{F})_{\overline{y}} \quad \cong \quad H^i(X_{\overline{y}}, (\pi')^*\mathcal{F})$$

gibt, da die linke Seite gleich $(\pi^*R^if_*\mathcal{F})_{\overline{y}}$ ist, und die rechte Seite gleich $(R^if'_*\pi'^*\mathcal{F})_{\overline{y}}$.

Beweis von 4.1: Wir beweisen hier nur (a); (b) und (c) folgen leicht aus der Exaktheit von $\mu_!$, siehe [Mi] III 1.29.

Sei $\nu : X \hookrightarrow X_2$ eine zweite Kompaktifizierung von X. Durch Betrachtung des Abschlusses von X in $X_1 \times X_2$ kann man ohne Einschränkung annehmen, dass es einen Morphismus $g : X_1 \to X_2$ gibt mit $g\mu = \nu$. Die Behauptung folgt dann aus der Leray-Spektralsequenz für $\mu_!\mathcal{F}$,

$$E_2^{p,q} = H^p(X_2, g_*\mu_!\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X_1, \mu_!\mathcal{F})\,,$$

wenn man zeigt

$$R^q g_* \mu_! \mathcal{F} = \begin{cases} \nu_! \mathcal{F} & q = 0, \\ 0 & q > 0 \end{cases} .$$

Es reicht, dies auf den Halmen in einem geometrischen Punkt $\overline{x}$ von X_2 zu zeigen (für $q = 0$ beachte, dass $g_* \mu_! \mathcal{F}$ und $\nu_! \mathcal{F}$ Untergarben von $g_* \mu_* \mathcal{F} = \nu_* \mathcal{F}$ sind). Nach eigentlichem Basiswechsel (siehe 4.2 (d)) gilt aber

$$(R^q g_* \mu_! \mathcal{F})_{\overline{x}} = H^q(X_{1,\overline{x}}, \mu_! \mathcal{F}|X_{1,\overline{x}}) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\overline{x}} & q = 0 \quad \text{und} \quad x \in X \, , \\ 0 & \text{sonst} \, , \end{cases}$$

da $\mu_! \mathcal{F}|X_{1,\overline{x}} = 0$, falls das Bild x von $\overline{x}$ in X_2 nicht in X liegt, und da $X_{1,\overline{x}}$ nur aus dem Punkt $\overline{x}$ besteht, falls x in X liegt.

Alles Gesagte überträgt sich auf $\mathbb{Z}_\ell$- und $\mathbb{Q}_\ell$-Garben. Insbesondere ist für ein eigentliches Schema X_1 von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L und eine konstruierbare $\mathbb{Z}_\ell$-(bzw. $\mathbb{Q}_\ell$-)Garbe $\mathcal{F}$ auf X die Kohomologie $H^q(X_1, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_\ell$-(bzw. $\mathbb{Q}_\ell$-)Modul. Ist $j : X \hookrightarrow X_1$ eine offene Immension und $\mathcal{F}$ eine (konstruierbare) $\mathbb{Z}_\ell$-(bzw. $\mathbb{Q}_\ell$)-Garbe auf X, so gilt dies auch für $j_! \mathcal{F}$ auf X_1. Es folgt, dass $H^q_c(X, \mathcal{F}) = H^q(X_1, j_! \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_\ell$-(bzw. $\mathbb{Q}_\ell$-)Modul ist.

5 Der Frobenius-Endomorphismus

Um auch noch die letzten Bezeichnungen in 1.6 zu erklären, betrachten wir die folgende Funktorialität.

Für jeden Morphismus $f : X' \to X$ von Schemata hat man einen Homomorphismus

(5.1.1) $$H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, f^*\mathcal{F}),$$

definiert durch die Komposition

$$H^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} H^i(X, f_*f^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} H^i(X', f^*\mathcal{F}),$$

wobei α vom Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \to f_*f^*\mathcal{F}$ induziert wird und β der Kantenmorphismus für die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^qf_*\mathcal{G}) \Rightarrow H^{p+q}(X', \mathcal{G}),$$

für $\mathcal{G} = f^*\mathcal{F}$. Alternativ wird

$$\beta : H^0(X, f_*\mathcal{G}) = H^0(X' \times_X X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^0(X', \mathcal{G})$$

durch die kanonische Identifizierung $X' \times_X X = X'$ definiert und mittels injektiver Auflösungen von $\mathcal{G}$ und $f_*\mathcal{G}$ auf die höheren Kohomologiegruppen fortgesetzt.

Mittels des kommutativen Diagramms

(5.1.2)
$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\
& X' \times_X X \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"] & X \arrow[d, "id"] \\
& X' \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

kann $X' \times_X X$ mittels der zueinander inversen Morphismen pr_1 und g mit X' identifiziert werden.

Nun betrachten wir den Fall, dass X ein Schema über $\mathbb{F}_q$ ist, $\mathcal{F}$ eine (gewöhnliche oder $\mathbb{Z}_\ell$- oder $\mathbb{Q}_\ell$-) Garbe auf X, und dass $f = F : X \to X$ der q-Frobenius ist.

Lemma 5.1 Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$F^*_{/X} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F_*\mathcal{F}.$$

Beweis: Sei U étale über X, dann induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "F"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
X \arrow[r, "F"] & X
\end{tikzcd}$$

einen Morphismus von X-Schemata

$$F_{U/X} : U \longrightarrow X_F{\times}_X U\,.$$

Da $U \to X$ und damit $X_F{\times}_X U \to X$ étale sind, ist $F_{U/X}$ étale ([MI] I 3.6), und da F ganz und radiziell ist, sieht man leicht, dass $F_{U/X}$ ein Isomorphismus ist (vergl. SGA 5 XV). Wir erhalten einen Isomorphismus

$$F^*_{U/X} : (F_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(X_F{\times}_X U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)\,,$$

der funktoriell in U ist, und daher den gewünschten Isomorphismus.

Durch Adjunktion liefert $(F^*_{/X})^{-1}$ einen Morphismus

$$F^* : F^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}\,.$$

Lemma 5.2 Der induzierte Homomorphismus in der Kohomologie

$$H^i(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X,F^*\mathcal{F}) \xrightarrow{F^*} H^i(X,\mathcal{F})$$

ist die Identität.

Beweis Für $i = 0$ erhalten wir dies wie folgt. Seien

$$Ad : \mathcal{F} \to F_*F^*\mathcal{F} \quad \text{und} \quad ad : F^*F_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

die Adjunktionsmorphismen. Per Definition ist dann F^* durch die Komposition

$$F^*\mathcal{F} \xrightarrow{F^*((F^*{}_{/x})^{-1})} F^*F : *\mathcal{F} \xrightarrow{ad} \mathcal{F}$$

gegeben. Die Behauptung folgt nun aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "Ad"] \arrow[d, "(F^*_{/x})^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H^0(X,F_*F^*\mathcal{F}) \arrow[r, "\beta", "\approx"'] \arrow[d, "F_*F^*(F^*_{/x})^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H^0(X,F^*\mathcal{F}) \arrow[d, "F^*(F^*_{/x})^{-1}"] \\
H^0(X,F_*\mathcal{F}) \arrow[r, "AdF_*"] \arrow[dr, equal] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "(3)"] & H^0(X,F_*F^*F_*\mathcal{F}) \arrow[r, "\beta", "\sim"'] \arrow[d, "F_*ad"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & H^0(X,F^*F_*\mathcal{F}) \arrow[d, "ad"] \\
 & H^0(X,F_*\mathcal{F}) \arrow[r, "\beta", "\sim"'] & H^0(X,\mathcal{F})\,.
\end{tikzcd}$$

Hier sind (1) und (4) kommutativ, da Ad und ad natürliche Transformationen sind, (3) ist kommutativ nach Definition der Adjunktionsmorphismen, und (2) ist kommutativ, da β funktoriell ist. Schließlich sind $(F^*_{/X})^{-1}$ und β zueinander invers wie in (5.1.2) bemerkt.

Für $i > 0$ folgt die Behauptung aus der Betrachtung injektiver Auflösungen, da die funktorielle Isomorphie $\mathcal{F} \cong F_*\mathcal{F}$ auch zeigt, dass F_* exakt ist.

Sei nun $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ und $\pi : \overline{X} \to X$ die Projektion. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r, "F\times id"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{X} \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "F"] & X
\end{tikzcd}$$

und einen induzierten Homomorphismus

$$(F \times id)^* \pi^* \mathcal{F} = \pi^* F^* \mathcal{F} \xrightarrow{\pi^*(F^*)} \pi^* \mathcal{F} .$$

Es ergibt sich ein Homomorphismus in der Kohomologie durch Komposition

$$F = F^* : H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \to H^i(\overline{X}, (F \times id)^* \pi^* \mathcal{F}) \to H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) .$$

Bemerkung 5.3 Dies überträgt sich auf die Kohomologie mit kompaktem Träger für ein separiertes $\mathbb{F}_q$-Schema von endlichem Typ, da F endlich ist und damit eine Abbildung

$$H^i_c(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_c(\overline{X}, (F \times id)^* \pi^* \mathcal{F})$$

induziert: für eine Kompaktifizierung $\mu : X \hookrightarrow X_1$ gilt $\mu_! F_* = F_* \mu_!$. Dies liefert den Frobenius-Endomorphismus in 1.6.

Sei andererseits $\sigma : \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q \to \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q$ der q-Frobenius (also der arithmetische Frobenius). Dann haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, "id\times\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

und daher eine Gleichheit $(id \times \sigma)^* \pi^* \mathcal{F} = \pi^* \mathcal{F}$. Damit ergibt sich eine induzierte Abbildung

$$\sigma : H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}, (id \times \sigma)^* \mathcal{F}) = H^i(\overline{X}, \mathcal{F}) ,$$

die eine Operation der Galoisgruppe liefert.

Offenbar ist $Fr \times \sigma = (Fr \times id) \circ (id \times \sigma) = (id \times \sigma) \circ (Fr \times id)$ der q-Frobenius von $\overline{X}$. Aus Lemma 5.2 folgt also:

Satz 5.4 Es gilt $F = \sigma^{-1}$.

Hieraus folgt insbesondere KOH 6.

Schließlich erklären wir die Frobenius-Operation auf den Halmen. Zunächst gibt es kanonische Bijektionen

(5.5.1) $$\overline{X}_0 \xrightarrow{\sim} \overline{X}(\overline{\mathbb{F}}_q) = \operatorname{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}_q}, \overline{X}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q, X) = X(\overline{\mathbb{F}}_q) ,$$

(wobei $\overline{X}_0$ die Menge der abgeschlossenen Punkte von $\overline{X}$ bezeichnet), die wie folgt definiert sind: Ist $\overline{x} \in \overline{X}_0$, so ist die Komposition

$$p_{\overline{x}} : \operatorname{Spec} k(\overline{x}) \xrightarrow{i_{\overline{x}}} \overline{X} \xrightarrow{p} \operatorname{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)$$

notwendigerweise ein Isomorphismus, und wir ordnen $\overline{x}$ den Morphismus $\varrho_{\overline{x}} = i_{\overline{x}} p_{\overline{x}}^{-1}$ zu. Die zweite Abbildung in (5.5.1) ist die Hinterschaltung der Projektion $\pi : \overline{X} \to X$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k(\overline{x})) \arrow[r] \arrow[dd] & \overline{X} \arrow[dr] \arrow[dd, "F\times id"] & \\
& & \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) \\
\mathrm{Spec}(k((F\times id)\overline{x})) \arrow[r] & \overline{X} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass dabei die Operation von $F \times id$ auf $\overline{X}$ der Operation von $F \times id$ auf $\overline{X}(\overline{\mathbb{F}_q})$ (Operation durch Hinterschalten) entspricht. Diese wiederum entspricht unter der zweiten Bijektion der Frobeniusoperation auf $X(\overline{F}_q)$, die wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & X \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

für jeden Morphismus f wahlweise durch Vor- oder Hinterschaltung definiert werden kann.

Insbesondere erhalten wir durch Betrachtung der Potenzen von F:

Lemma 5.5 Es gibt eine Bijektion der Fixmoduln

$$\overline{X}^{(F^n\times id)} \xrightarrow{\sim} X(\mathbb{F}_{q^n}).$$

Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Der Morphismus

$$F^* : \ F^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

induziert für jedes $\overline{x} \in \overline{X}_0$, aufgefaßt als geometrischer Punkt von X, einen Homomorphismus der Halme

$$F_{\overline{x}} = F^*_{\overline{x}} : \mathcal{F}_{F\overline{x}} \cong (F^*\mathcal{F})_{\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{x} \in \overline{X}^{(F^n\times id)} = X(\overline{F}_q)^{F^n}$ erhält man also durch Iteration einen Endomorphismus

$$F^n_{\overline{x}} : \mathcal{F}_{\overline{x}} = \mathcal{F}_{F^n\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Ist x das Bild von $\overline{x}$ in X, so kann man $n = \deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ wählen und setzt

$$F_x = F^{\deg(x)}_{\overline{x}} : \mathcal{F}_{\overline{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Das Paar $(F_x, \mathcal{F}_{\overline{x}})$ hängt bis auf Isomorphie nicht von der Wahl von (einem der $\deg(x)$ vielen) $\overline{x}$ über x ab, und daher ist der Ausdruck

$$\det(1 - F_xT \mid \mathcal{F}_{\overline{x}})$$

wohldefiniert, d.h., hängt nur von x ab; insbesondere gilt dies für

$$tr(F_x \mid \mathcal{F}_{\overline{x}})\,.$$

Bemerkungen 5.6 (a) Die Operation auf den Halmen kann auch mittels $F \times id$ auf $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ erklärt werden. $F_{\overline{x}}$ identifiziert sich nämlich auch mit dem Homomorphismus

$$F_{\overline{x}} = (F \times id)^*_x : (\pi^*\mathcal{F})_{(F\times id)\overline{x}} = ((F \times id)^*\pi^*\mathcal{F})_{\overline{x}} \longrightarrow (\pi^*\mathcal{F})_{\overline{x}}\,,$$

der vom Homomorphismus $(F \times id)^* : (F \times id)^*\pi^*\mathcal{F} \longrightarrow \pi^*\mathcal{F}$ im geometrischen Punkt $\overline{x}$ von $\overline{X}$ induziert wird (vermöge der kanonischen Isomorphie $(\pi^*\mathcal{F})_{\overline{x}} = \mathcal{F}_{\overline{x}}$, wobei $\overline{x}$ links $\rho_{\overline{x}}$ und rechts $\pi_{\overline{x}} := \pi\rho_{\overline{x}}$ bezeichnet). Dies führt alles auf Objekte (Garben, Endomorphismen etc.) zurück, die für $\overline{X}/\overline{F}_q$ erklärt sind.

(b) Andererseits kann in der obigen Situation, wo alles von $X/\mathbb{F}_q$ herkommt, die Operation auf den Halmen auch Galois-theoretisch erklärt werden. Dazu beachte man, dass auf dem Halm $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ im geometrischen Punkt $\overline{x}$ von X immer die Galoisgruppe $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/k(x))$ operiert (x das Bild von $\overline{x}$ in X). Ist $\varphi_x : a \mapsto a^{q\cdot \deg(x)}$ der arithmetische Frobenius von $\overline{\mathbb{F}}_q$ über $k(x)$, so ist

$$F_x = \varphi_x^{-1} \text{ auf } \mathcal{F}_{\overline{x}}\,.$$

Um dies einzusehen, beachte man, dass man dies nur für $\deg(x) = 1$ zeigen muß (nach Basiswechsel zu $k(x) = \mathbb{F}_{q^{\deg(x)}}$), da $F^{\deg(x)}$ der $q^{\deg(x)}$-Frobenius ist. Dann identifiziert sich $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ mit dem Galoismodul $H^0(\overline{\mathbb{F}}_q, \pi^*_{\overline{x}}\mathcal{F}) = H^0(\mathrm{Spec}(k(x)) \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \pi^*(i_x^*\mathcal{F}))$ (wobei $i_x : \mathrm{Spec}(k(x)) \to X$, $\pi : \mathrm{Spec}(k(x)) \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q \to \mathrm{Spec}(k(x))$ die kanonischen Morphismen sind), und die Behauptung folgt aus Satz 5.4 für $X = Spec(k(x))$ und die Garbe $i_x^*\mathcal{F}$ hierauf.

6 Delignes Satz: Formulierung und erste Reduktionen

Zusammen mit Grothendiecks Formel erhält man die Weil-Vermutungen I - III offenbar aus dem folgenden Resultat.

Satz 6.1 (Deligne) Sei X eine glatte projektive Varietät über $\mathbb{F}_q$. Für jedes $i \geq 0$ hat das charakteristische Polynom

$$\det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) \quad (\ell \neq p)$$

ganze Koeffizienten, die unabhängig vom ℓ sind. Ist

$$\det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) = \prod_\alpha (1 - \alpha T) \quad \text{mit}\, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}\,;$$

so gilt

$$\mid \alpha \mid = q^{\frac{i}{2}} \quad \text{für alle}\ \alpha\,.$$

Man beachte: die α sind gerade die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Reduktion 1 Es genügt zu zeigen:

W(X,i): Für jedes $i \geq 0$ und jedes $\ell \neq p$ sind die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α alle den Betrag

$$\mid \alpha \mid = q^{\frac{i}{2}}$$

haben.

Beweis Sei ℓ fest, $P_i(T) = \det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))$ und M_i die Menge der Nullstellen von $P_i(T)$. Setze

$$\begin{aligned} P(T) &= \prod_{i \,\text{ungerade}} P_i(T)\,, \\ Q(T) &= \prod_{i \,\text{gerade}} P_i(T)\,, \end{aligned}$$

so dass

$$Z(X,T) = \frac{P(T)}{Q(T)}\,.$$

Sei K ein galoisscher Zahlkörper, der alle Nullstellen enthält. Dann kann die letzte Gleichung als Gleichung in $K[[T]]$ aufgefaßt werden, und die Galoisgruppe $Gal(K/\mathbb{Q})$ operiert auf diesem Ring, indem sie auf den Koeffizienten der Potenzreihen operiert. Für $\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})$ ist $\sigma Z(X,T) = Z(X,T)$, da $Z(X,T) \in \mathbb{Z}[[T]]$. Andererseits ist nach $W(X,i)$ für alle i das Polynom $\sigma P_i(T)$ prim zu $P_j(T)$ für $j \neq i$, da $\sigma(M_i)$ disjunkt ist zu M_j für $i \neq j$. Da alle $P_i(T)$ konstanten Koeffizienten 1 haben, ist $\sigma P_i(T) = P_i(T)$, also $P_i(T) \in \mathbb{Q}[T]$, da dies für alle σ gilt. Das folgende Lemma zeigt, dass P und Q sogar aus $\mathbb{Z}[T]$ sind.

Lemma 6.2 Seien $P, Q \in \mathbb{Q}[T]$ prim zueinander mit konstanten Koeffizienten 1 und $P/Q = Z \in \mathbb{Z}[[T]]$. Dann sind $P, Q \in \mathbb{Z}[T]$.

Beweis Sei p eine Primzahl und $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ eine Nullstelle von $Q(T)$. Wir behaupten, dass λ^{-1} p-ganz ist. Ist dies nicht der Fall, so ist λ p-ganz, also $\mid \lambda \mid_p < 1$ für die auf $\mid p \mid_p = \frac{1}{p}$ normierte p-adische Bewertung von $\mathbb{Q}_p$. Da Z ganze Koeffizienten hat, konvergiert $Z(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $\mid x \mid_p < 1$, und wir erhalten

$$P(\lambda) = Q(\lambda) \cdot Z(\lambda) = 0\,,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass P und Q prim sind. Da dies für alle p gilt, sind also die Inversen der Nullstellen von $Q(T)$ ganz. Weil Q konstanten Koeffizienten 1 hat, folgt, dass die rationalen Koeffizienten ganz sind. Damit ist auch $P(T) = Q(T) \cdot Z(T) \in \mathbb{Z}[T]$.

Wir schließen nun weiter, dass auch die $P_i(T)$ ganze Koeffizienten haben, da sie konstanten Koeffizienten 1 haben und ihre reziproken Nullstellen ganz sind als reziproke Nullstellen von P oder Q (man kann auch das Lemma von Gauss benutzen). Die Unabhängigkeit der Koeffizienten von ℓ folgt so: Die reziproken Nullstellen von $P_i(T)$ sind diejenigen reziproken Nullstellen von $P(T)$ oder $Q(T)$, deren komplexe Konjugierte alle den Betrag $q^{\frac{i}{2}}$ haben. Da die Nullstellen von $P(T)$ und $Q(T)$ durch $Z(X,T)$ bestimmt sind, ist diese Beschreibung unabhängig von ℓ.

Bemerkung 6.3 (a) Der obige Beweis ist [Fr-K] entnommen (dort Seite 258). Er liefert unabhängig die Rationalität von $Z(X,T)$, ohne die Hankel-Determinanten zu benutzen, wie das bei Deligne ([D1] Seite 276) geschieht. Lemma 6.2 scheint das Lemma von Fatou zu sein, dass bei Deligne zitiert wird.

(b) Deligne hat allgemeiner bewiesen ([D2]3.3.4), dass für ein separiertes Schema X von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ die Frobenius-Eigenwerte auf $H^i_c(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ für jedes $i \geq 0$ und $\ell \neq p = char(\mathbb{F}_q)$ algebraische Zahlen sind. Es ist aber bis jetzt nicht bekannt, ob diese Zahlen unabhängig von ℓ ($\neq p$) sind; man weiß nicht einmal, ob $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_c(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ unabhängig von ℓ ist.

Reduktion 2 Es reicht, $W(X,i)$ nach Übergang zu einer endlichen Erweiterung $\mathbb{F}_{q^n}$ von $\mathbb{F}_q$ zu zeigen. Genauer gilt: $W(X,i) \Leftrightarrow W(X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}, i)$, da bei Basiswechsel zu $\mathbb{F}_{q^n}$ die Eigenwerte α zu α^n werden und q zu q^n.

Reduktion 3 Es reicht, geometrisch irreduzible X über beliebigem $\mathbb{F}_q$ zu betrachten. Dies folgt aus Reduktion 2 und der folgenden offensichtlichen Tatsache: Ist $X = \amalg X_j$, so gilt: $W(X,i) \Leftrightarrow W(X_j,i)$ für alle j.

Sei also im folgenden X geometrisch irreduzibel, von der Dimension d.

Reduktion 4 Es reicht, $W(X,i)$ für $i \leq d$ zu zeigen. Wegen Poincaré-Dualität ist nämlich $W(X,i) \Leftrightarrow W(X, d-i)$: sind $\{\alpha\}$ die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, so sind $\{q^d\alpha^{-1}\}$ die Eigenwerte auf $H^{2d-i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Reduktion 5 Es reicht, $W(X,d)$ zu zeigen (für alle X wie oben). Es gilt nämlich

KOH 11 Schwacher Lefschetz: Ist X glatt projektiv der Dimension d und $Y \subseteq X$ ein glatter Hyperebenenschnitt, so ist die Restriktionsabbildung

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$$

bijektiv für $0 \leq i \leq d-2$ und injektiv für $i = d-1$.

Die Reduktion erfolgt dann durch Induktion über die Dimension von X: Weiß man in der Situation von KOH 11 schon $W(Y, i)$ für alle $i \leq \dim(Y) = d-1$, so gilt wegen der Injektion auch $W(X, i)$ für alle $i \leq d-1$. Man beachte dazu: es gibt nach Bertini immer einen glatten Hyperebenenschnitt von X, der über einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{F}_q$ definiert ist.

Bevor wir mit den Reduktionen fortfahren, zeigen wir noch, wie man KOH 11 aus den folgenden fundamentalen Eigenschaften der étalen Kohomologie ableitet.

KOH 12 Schwacher Lefschetz (2. Version): Ist X affin und von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L, so gilt für die kohomologische Dimension $cd(X)$ von X

$$cd(X) = \dim(X)\,,$$

d.h., für alle étalen Torsionsgarben $\mathcal{F}$ auf X ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für $i > \dim(X)$ (siehe etwa [Mi] VI 7.2).

KOH 13 Poincaré-Dualität (2. Version): Sei X ein glattes, separiertes Schema der reinen Dimension d über einem Körper k mit separablem Abschluß k_s, und sei ℓ prim zur Charakteristik von k.

(a) Es gibt kanonische, Galois-äquivalente Homomorphismen (wobei $\overline{X} = X \times_k k_s$)

$$tr : H_c^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n\,,$$

die verträglich mit den Projektionen $\mathbb{Z}/\ell^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n$ sind.

(b) Ist $\mathcal{F}$ eine konstruierbare lokal-konstante $\mathbb{Z}/\ell^n$-Garbe auf X, so ist die Komposition von Cupprodukt und tr

$$H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(\overline{X}, \mathcal{F}^\vee)(d) \longrightarrow H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \xrightarrow{tr} \mathbb{Z}/\ell^n$$

eine perfekte Dualität (die Kohomologiegruppen sind endlich nach 2.9 (c)). (Siehe etwa [Mi] VI 11.2).

Lemma 6.4 KOH 11 folgt aus KOH 12 und KOH 13.

Beweis Ist X glatt, projektiv, geometrisch irreduzibel über einem Körper k und ist $Y \subseteq X$ ein glatter Hyperebenenschnitt, so ist das Komplement $U = X - Y$ affin (für eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}^N$ ist $\mathbb{P}^N - H \cong \mathbb{A}^N$ affin, und eine abgeschlossene Immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ ist affin). Nach KOH 12 und KOH 13 gilt dann

$$H_c^i(\overline{U}, \mathcal{F}) = 0 \text{ für } i < d = \dim X$$

für jede lokal-konstante $\mathbb{Z}/\ell^n$-Garbe $\mathcal{F}$ mit endlichen Halmen auf U ($\ell \neq char(k)$ und $\overline{U} = U \times_k k_s$ wie oben). Für eine solche Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist also die Restriktionsabbildung

$$H^i(\overline{X}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, \mathcal{F})$$

bijektiv für $i < d-1$ und injektiv für $i = d-1$, nach der langen exakten Kohomologiesequenz in 2.8 (c) (beachte, dass $H^i = H_c^i$ für X und Y). Die Behauptung folgt nun aus dieser Aussage für $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/\ell^n$ durch Übergang zum Limes.

Reduktion 6 ("Rankin-Trick") Es reicht, die folgende Aussage zu zeigen: Für jedes q existiert ein $N \geq 0$ so, dass für alle geometrisch irreduziblen glatten projektiven Varietäten der Dimension d über $\mathbb{F}_q$ gilt:

$\mathbf{W(X, d; N)}$: Die Eigenwerte von F auf $H^d(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ sind algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α alle den Betrag

$$\mid \alpha \mid \leq q^{\frac{d}{2}+\frac{N}{2}}$$

haben.

Weiter kann man sich auf Dimensionen d beschränken, die von einer festen natürlichen Zahl M geteilt werden.

Beweis Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Künneth-Formel α^k Eigenwert von F auf $H^{kd}(\overline{X}^k, \mathbb{Q}_\ell)$. Nach $W(X^k, kd; N)$ gilt dann

$$\mid \alpha^k \mid \leq q^{\frac{dk}{2}+\frac{N}{2}} ,$$

also

$$\mid \alpha \mid \leq q^{\frac{d}{2}+\frac{N}{2k}} .$$

Da dies für alle k gilt, muss gelten

$$\mid \alpha \mid \leq q^{\frac{d}{2}} .$$

Nach Poincaré-Dualität ist $q^d\alpha^{-1}$ auch Eigenwert, also auch $\mid q^d\alpha^{-1} \mid \leq q^{\frac{d}{2}}$, d.h.,

$$\mid \alpha \mid \geq q^{\frac{d}{2}} ,$$

womit Gleichheit und damit $W(X, d)$ gilt. Schließlich können wir uns auf solche k beschränken, die von M geteilt werden.

Bemerkung 6.5 Der Trick, höhere Potenzen zu betrachten, sei es von X oder von Garben auf X, taucht an verschiedenen Stellen in Delignes Beweis auf. Deligne schreibt ([D 1] S. 283), dass er von Rankins Arbeit [Ran] inspiriert wurde, in der dieser seine Abschätzung für die Ramanujan-Funktion erhält (vergl. §0 Anwendung 1!), indem er statt $\sum \tau(n)n^{-s}$ die Dirichlet-Reihe

$$\sum \tau(n)^2 n^{-s}$$

betrachtet.

Reduktion 7 In den obigen Aussagen kann man die Bedingung "die Eigenwerte des Frobenius sind algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α den Betrag $\mid \alpha \mid \leq r \in \mathbb{R}$ haben", jeweils ersetzen durch die Bedingung "die Eigenwerte $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ des Frobenius haben die Eigenschaft, dass $\mid \iota\alpha \mid \leq r$ für jede Einbettung $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$". Aus der letzteren Eigenschaft folgt nämlich automatisch, dass α algebraisch ist: ist α transzendent über $\mathbb{Q}$, so gibt es für jede transzendente Zahl $\beta \in \mathbb{C}$ eine Einbettung: $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $\iota(\alpha) = \beta$; denn offenbar gibt es eine solche Einbettung für $\overline{\mathbb{Q}}(\alpha)$, und diese läßt sich auf $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ fortsetzen. Damit kann aber $\mid \iota\alpha \mid$ groß werden.

Bemerkung 6.6 Für die Fortsetzung der Einbettung $\mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$ auf $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ benötigt man das Auswahlaxiom. Will man dieses hier nicht verwenden, so ist es im folgenden immer möglich, einen endlich erzeugten Körper $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ auszuwählen, in dem alle jeweils betrachteten Eigenwerte liegen, so dass man nur die unproblematischen Einbettungen von K benötigt. Die Einbettungen von $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dienen eher einer bequemen Sprechweise.

7 Gewichte und Determinanten-Gewichte

Die bisherigen Betrachtungen legen die folgenden Definitionen nahe.

Definition 7.1 Sei q eine Primzahlpotenz und $n \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl α heißt rein vom Gewicht n, bezüglich q, wenn sie algebraisch ist und alle ihre komplexen Konjugierten den Betrag $q^{\frac{n}{2}}$ haben.

Definition 7.2 Sei X ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ und sei $\mathbb{F}$ eine konstruierbare $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf X.

(a) $\mathcal{F}$ heißt **rein** vom Gewicht $n \in \mathbb{Z}$, wenn für alle abgeschlossenen Punkte x von X die Eigenwerte von F_x auf $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ rein vom Gewicht n sind, bezüglich $N(x)$ (hierbei ist $\overline{x}$: $\mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) \longrightarrow X$ ein geometrischer Punkt über x, $F_x \in Gal(\overline{k(x)}/k(x))$ der geometrische Frobenius, der auf $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ operiert, und $N(x) = |k(x)|$).

(b) $\mathcal{F}$ heißt **gemischt**, wenn es eine endliche Filtrierung $\ldots \subseteq \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots \mathcal{F}$ durch konstruierbare Untergarben besitzt derart, dass die sukzessiven Quotienten $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1}$ rein sind. Die Gewichte der nichttrivialen Quotienten heißen die Gewichte von $\mathcal{F}$.

Beispiele 7.3 (a) $\mathbb{Q}_\ell(m)$ ist rein vom Gewicht $-2m$ (F_x operiert durch Multiplikation mit $N(x)^{-m}$).

(b) Sei X glatt und projektiv über $\mathbb{F}_q$. Fasst man die $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-Darstellung $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ als $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ auf, so besagt $W(X, i)$, dass $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ rein vom Gewicht i ist.

Lemma 7.4 (a) Die Kategorie der Garben, die rein vom Gewicht n sind, ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Quotienten, Untergarben, Erweiterungen, inversen Bildern sowie direkten Bildern bei endlichen Morphismen.

(b) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ rein vom Gewicht m bzw. n, so ist $\mathcal{F}^\vee$ rein vom Gewicht $-m$ und $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ rein vom Gewicht $m + n$.

(c) Die Kategorie der gemischten Garben ist abgeschlossen gegenüber den Bildungen in (a) sowie unter Bildung von Tensorprodukt und Dual.

Die Aussagen folgen sofort aus der Verträglichkeit der Operationen mit Halmbildung: man beachte, dass man für einen endlichen Morphismus $f : X \to Y$ und $y \in Y$ einen Galois-äquivarianten Isomorphismus

$$(f_*\mathcal{F})_{\overline{y}} \cong \bigoplus_{f(x)=y} \mathcal{F}_{\overline{x}}$$

hat. Weiter ist das Tensorprodukt exakt auf der Kategorie der $\mathbb{Q}_\ell$-Garben.

Die letzte Reduktion in §6 motiviert die folgende

Definition 7.5 Sei $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathbb{C}$ eine Einbettung.

(a) Für eine Primzahlpotenz q heißt $\iota\text{-}w_q(\alpha) := 2\ log_q|\iota\alpha| \in \mathbb{R}$ das ι-Gewicht, bezüglich q, einer Zahl $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. (Also $|\iota\alpha| = q^{\frac{\iota - w_q(\alpha)}{2}}$).

(b) Sei X von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ und $\mathcal{F}$ eine konstruierbare $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf X. $\mathcal{F}$ heißt ι-rein vom Gewicht $\beta \in \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in |X|$ und alle Eigenwerte α von F_x auf $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ gilt: ι-$w_{N(x)}(\alpha) = \beta$, d.h., $|\iota\alpha| = N(x)^{\frac{\beta}{2}}$.

(c) Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt ι-gemischt, wenn sie eine endliche Filtrierung mit sukzessiven ι-reinen Quotienten besitzt.

Es gelten die offensichtlichen Analoga von 7.4. Die ersten nicht-trivialen Aussagen über Gewichte werden mit den sogenannten Determinanten-Gewichten erhalten. Sei dazu X ein normales geometrisch zusammenhängendes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ und sei $\overline{y}$ ein geometrischer Punkt. Man hat eine exakte Sequenz der Fundamentalgruppen

(7.6.1) $$1 \to \pi_1(\overline{X}, \overline{y}) \to \pi_1(X, \overline{y}) \to Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \to 1\,,$$

wobei $\overline{y}$ auch einen über $\overline{y}$ liegenden geometrischen Punkt von $\overline{X}$ bezeichnet: Für normales X folgt dies sofort aus der Galoistheorie von Körpern: ohne Einschränkung liegt $\overline{x}$ über dem generischen Punkt von X, dann sind $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ und $\pi_1(X, \overline{y})$ die Galoisgruppen der maximalen Erweiterungen der Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(\overline{X})$ bzw. $\mathbb{F}_q(X)$, die unverzweigt über $\overline{X}$ bzw. X sind, und $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ ist isomorph zur Galoisgruppe der unverzweigten Erweiterung $\mathbb{F}_q(X) \cdot \overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q(X)$.

Definition 7.6 Die Weilgruppe $W(X, \overline{y})$ ist das volle Urbild in $\pi_1(X, \overline{y})$ der Untergruppe $\{F^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \subseteq Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

Wir haben also eine exakte Sequenz

(7.6.2) $$1 \to \pi_1(\overline{X}, \overline{y}) \to W(X, \overline{y}) \to \mathbb{Z} \to 0\,,$$

wobei man den Homomorphismus $W(X, \overline{y}) \to \mathbb{Z}$ mit deg bezeichnet und die Gradabbildung nennt.

Im folgenden betrachten wir glatte $\mathbb{Q}_\ell$-Garben auf X. Diese entsprechen stetigen $\mathbb{Q}_\ell$-Darstellungen von $\pi_1(X, \overline{y})$, aber für die folgenden Schlüsse ist es zweckmäßig, mit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-Koeffizienten zu arbeiten. Wir definieren daher:

Definition 7.7 Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist eine stetige endlich-dimensionale $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Darstellung von $\pi_1(X, \overline{y})$.

Da $\pi_1(X, \overline{y})$ kompakt ist, kommt jede $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Darstellung durch Tensorieren mit $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ von einer E-Darstellung für eine endliche Erweiterung E von $\mathbb{Q}_\ell$. Umgekehrt gibt jede glatte $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$- Garbe durch Tensorieren mit $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Für einen anderen geometrischen Punkt $\overline{x}$ von X ist $\pi_1(X, \overline{x})$ isomorph zu $\pi_1(X, \overline{y})$, und dieser Isomorphismus ist eindeutig bis auf innere Automorphismen. Daher erhält man für jedes $\overline{x} \in X(\overline{\mathbb{F}_q})$, mit Bild x in X, einen Homomorphismus

$$Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/k(x)) = \pi_1(\{x\}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \overline{y})\,,$$

der wohldefiniert ist bis auf Konjugation in $\pi_1(X, \overline{y})$. Der Halm einer $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe in $\overline{x}$ ist die $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Darstellung von $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/k(x))$, die man durch Restriktion mittels des obigen Homomorphismus erhält. Insbesondere sind dann die Eigenwerte von F_x definiert, und man kann die Begriffe Reinheit, ι-Gewicht etc. übertragen.

Proposition 7.8 Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe $\mathcal{F}$ vom Rang 1 ist ι-rein für jedes $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Genauer gilt:

(a) Sei $\chi : W(X, \overline{y}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ der durch $\mathcal{F}$ induzierte Charakter. Dann ist χ Produkt eines endlichen Charakters und eines Charakters der Form

$$w \mapsto c^{\deg(w)}$$

für ein $c \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$.

(b) $\mathcal{F}$ ist ι-rein vom Gewicht ι-$w_q(c)$.

Beweis Offenbar folgt (b) aus (a), da

$$| \iota\chi(F_x) |=| (\iota c)^{\deg(x)} |=| \iota c |^{\deg(x)}= N(x)^{\frac{\iota - w(c)}{2}}$$

für alle $x \in |X_0|$. Für (a) genügt es zu zeigen, dass die Einschränkung von χ auf $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ endliche Ordnung hat. Dann ist nämlich χ^n von der Form $w \mapsto b^{\deg(b)}$ für n genügend groß, und die Behauptung folgt mit einer n-ten Wurzel c aus b. Es gilt aber, dass $\chi(\pi_1(\overline{X}, \overline{y}))$ als kompakte Untergruppe in $E^\times$ für eine endliche Erweiterung $E/\mathbb{Q}_\ell$ Produkt einer endlichen und einer pro-ℓ-Gruppe ist. Andererseits kann man zeigen (beachte, dass $\ell \neq p$):

Satz 7.9 Das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ in der Faktorkommutatorgruppe $W(X, \overline{y})^{ab}(= W(X, \overline{y})$ modulo dem Abschluß der Kommutatorgruppe) ist Produkt einer endlichen Gruppe und einer pro-p-Gruppe.

Beweis Wir zeigen dies nur für eine glatte Kurve X, da nur dieser Fall später benötigt wird. Sei X_1 die glatte Kompaktifizierung von X und sei $S = X_1 - X$.

1. Beweis, mit Klassenkörpertheorie: Nach dieser ist

$$W(X, \overline{y})^{ab} \cong k^\times \setminus A^\times / \prod_{x \in X_0} O_x^\times ,$$

wobei K der Funktionenkörper von X ist, $A^\times$ die Idealgruppe von K und O_x die Komplettierung des lokalen Rings von X bei x. Das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ ist der Kern der Gradabbildung hierauf. Der Kern der Abbildung

$$W(X, \overline{y})^{ab} \longrightarrow W(X_1, \overline{y})^{ab} = K^\times \setminus A^\times / \prod_{x \in (X_1)_0} O_x^\times$$

ist aber Produkt einer endlichen und einer pro-p-Gruppe, als Quotient von $\prod_{x \in S} O_x^\times$, und der Kern der Gradabbildung auf $W(X_1, \overline{y})^{ab}$ ist die endliche Klassengruppe $Pic^0(X_1)$ von X_1.

2. Beweis, geometrisch: Es genügt zu zeigen, dass für $\ell \neq p$ die Ordnung der Fixmoduln unter dem Frobenius F

$$Hom(\pi_1(\overline{X}, \overline{y}), \mathbb{Z}/\ell^n)^F = H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)^F$$

beschränkt ist, unabhängig von ℓ und n. Nach Poincaré-Dualität ist dies dual zu $H_c^1(\overline{X}, \mu_{\ell^n})_F$, dem Kofixmodul für F. Wegen der exakten Sequenz

$$H^0(\overline{S}, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H_c^1(\overline{X}, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^1(\overline{X}_1, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow 0$$

reicht es, die Ordnungen von $H^0(\overline{S},\mu_{\ell^n})_F$ und $H^1(\overline{X}_1,\mu_{\ell^n})_F$ zu beschränken, und wegen der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A^F \longrightarrow A \xrightarrow{F-1} A \longrightarrow A_F \longrightarrow 0 \tag{7.9.1}$$

für einen F-Modul A kann man die Ordnung der Fixmoduln betrachten, denn für endliches A folgt aus (7.9.1), dass A^F und A_F dieselbe Ordnung haben. Es sind aber

$$H^0(\overline{S},\mu_{\ell^n})^F = H^0(S,\mu_{\ell^n}) = \bigoplus_{x\in S} \mu_{\ell^n}(k(x)) \subseteq \bigoplus_{x\in S} k(x)^\times$$

und

$$H^1(\overline{X}_1,\mu_{\ell^n})^F \overset{(1)}{=} {}_{\ell^n}Pic(\overline{X}_1)^F = {}_{\ell^n}Pic^0(\overline{X}_1)^F \overset{(2)}{\subseteq} Pic^0(X_1)$$

in endlichen Gruppen enthalten, da wir uns über einem endlichen Körper befinden. Die Gleichung (1) folgt aus der Isomorphie $Pic(\overline{X}_1) \cong H^1(\overline{X}_1,\mathbb{G}_m)$ und der Kohomologiesequenz zur Kummersequenz

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0\,,$$

da $H^0(\overline{X}_1,\mathbb{G}_m) = \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ ℓ-divisibel ist. Die Inklusion (2) folgt aus der Hochschild-Serre Spektralsequenz, da $H^1(\mathbb{F}_q,\overline{\mathbb{F}}_q^\times) = 0$ (Hilbert 90) und $H^2(\mathbb{F}_q,\overline{\mathbb{F}}_q^\times) = 0$ ($cd(\mathbb{F}_q) = 1$). Ein geometrischer Beweis der Endlichkeit von $Pic^0(X_1)$ ergibt sich z.B. daraus, dass dies die Menge der $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte einer abelschen Varietät über $\mathbb{F}_q$ ist, nämlich der Jacobi-Varietät von X_1.

Nach 7.8 macht die folgende Definition Sinn.

Definition 7.10 Sei $\mathcal{F}$ eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X und $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung. Die ι-Determinanten-Gewichte von $\mathcal{F}$ sind die Zahlen $\frac{1}{g}\cdot$ (ι-Gewicht von $\Lambda^g\mathcal{G}$), wobei $\mathcal{G}$ ein Kompositionsfaktor (= irreduzibler Subquotient) von $\mathcal{F}$ ist und $g = \dim\mathcal{G}$.

Nicht-triviale Aussagen über Determinanten-Gewichte folgen aus der Theorie der algebraischen (Monodromie-) Gruppen.

Definition 7.11 Sei $\mathcal{F}$ eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X. Sei G_1 der Zariski-Abschluss des Bildes von $\pi_1(X,\overline{y})$ in $GL(\mathcal{F}_{\overline{y}})$ und sei G das semi-direkte Produkt von $\mathbb{Z}$ mit G_1, welches das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(\overline{X},\overline{y}) & \longrightarrow & W(X,\overline{y}) & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & Gl(\mathcal{F}_{\overline{y}}) & & & &
\end{array}$$

kommutativ macht (ist $F \in \deg^{-1}(1)$, so normalisiert F den Normalteiler $\pi_1(\overline{X},\overline{y})$, also auch G_1, die Operation ist algebraisch, und G ist semi-direktes Produkt von $< F >$ und G_1).

Satz 7.12 (Grothendieck) Sei G_1° die Zusammenhangskomponente der Eins von G_1. Das Radikal von G_1° ist unipotent.

Zum Beweis benutzen wir:

Lemma 7.13 Ist $\mathcal{F}$ halbeinfach, so ist G_1° halbeinfach. (Eine Darstellung heißt halbeinfach, wenn sie direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist. Analog werden halbeinfache Objekte in einer abelschen Kategorie definiert).

Beweis Ist $\mathcal{F}$ halbeinfach, so ist auch die Einschränkung auf den Normalteiler $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ halbeinfach: ist $W \subset V = \mathcal{F}_{\overline{y}}$ ein einfacher $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$-Modul, so ist die Summe W' seiner $W(X, \overline{y})$- Konjugierten ein halbeinfacher $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$-Modul und besitzt ein Komplement in V (für $W(X, \overline{y})$ und daher für $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$). Dann ist G_1° reduktiv, d.h., das unipotente Radikal ist trivial (Ohne Einschränkung ist hierfür V einfach; dann benutzt man, dass eine unipotente Gruppe immer einen Fixvektor $\neq 0$ hat, also das unipotente Radikal einen Fixmodul $0 \neq V' \neq V$ hätte). Es ist zu zeigen, dass der maximale zentrale Torus T_1 trivial ist.

$W(X, \overline{y})$ operiert durch Konjugation auf T_1 und daher auf dem Charaktermodul $X(T_1) = Hom(T_1, \mathbb{G}_m)$, wobei die endliche Menge E der Charaktere respektiert wird, mit denen T_1 auf V operiert. Diese Menge E erzeugt $X(T_1)$, da T_1 nach Voraussetzung treu auf V operiert. Also faktorisiert die Operation von $W(X, \overline{y})$ über einen endlichen Quotienten von $\mathbb{Z}$, und wir können ohne Einschränkung den Kern dieser Operation betrachten, was einem Basiswechsel zu einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{F}_q$ entspricht. Dann ist die Operation auf T_1 trivial. Aber es gibt nur endlich viele äußere Automorphismen, die trivial auf T_1 sind, durch weiteren Basiswechsel sei also die Operation auf G_1° trivial. Durch Übergang zu einer offenen Untergruppe von $\pi_1(X, \overline{y})$, d.h., einer endlichen Überlagerung von X, ist schließlich ohne Einschränkung $G_1 = G_1^\circ$.

Wir können also annehmen, dass $G = G_1^\circ \times \mathbb{Z}$. Sei T der maximale Torus-Quotient von G_1°. Dieser ist isogen zu T_1, es ist also zu zeigen, dass T_1 trivial ist. Die Abbildung $W(X, \overline{y}) \longrightarrow G \longrightarrow G_1^\circ \longrightarrow T$ hat die Eigenschaft, dass das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ Zariski-dicht ist. Da T kommutativ ist, ist dieses Bild aber endlich nach Satz 7.9, also $T = \{1\}$.

Beweis von Satz 7.12 Sei $F^\cdot$ eine Jordan-Hoelder-Filtrierung von V, P die Untergruppe von $GL(V)$, die die Filtrierung $F^\cdot$ respektiert und $N \subseteq P$ die Untergruppe, die trivial auf den Quotienten von $F^\cdot$ operiert, und $L = P/N$. Dann ist $G_1 \subseteq P$, das Bild G_2 in L der Zariski-Abschluss von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ in $GL(Gr_F^\cdot V)$ und der Kern von $G_1 \twoheadrightarrow G_2$ ein unipotenter Normalteiler von G_1 (da N unipotenter Normalteiler von P ist). Nach 7.13 ist G_2° reduktiv, und die Behauptung folgt.

Corollar 7.14 Sei $\mathcal{F}$ halbeinfach und Z das Zentrum von G. Dann sind Kern und Kokern von $\deg : Z \to \mathbb{Z}$ endlich.

Beweis $Z \cap G_1$ ist im Zentrum von G_1 enthalten und daher endlich. Weiter wurde im Beweis von 7.13 gezeigt, dass ein Element g in G mit $\deg(g) = n \neq 0$ existiert, welches mit G_1° vertauscht. Eine geeignete Potenz vertauscht dann mit G, d.h., liegt in Z:

Zunächst können wir wir nämlich annahmen, dass g trivial durch Konjugation auf G_1/G_1° operiert. Sei dann für $h \in G_1$ das Element $x_h \in G_1^\circ$ definiert durch

$$ghg^{-1} = x_h \cdot h\,.$$

Dann ist $x_{hh'} = x_h$ und $x_{h'h} = h'x_h(h')^{-1}$ für $h' \in G_1^\circ$. Da G_1° ein Normalteiler in G_1 ist, folgt $h'x_h(h')^{-1} = x_h$, d.h., x_h liegt im Zentrum von G_1°. Da dieses endlich ist, gibt es ein $m \neq 0$

mit

$$g^m h g^{-m} = x_h^m \cdot h = h$$

für alle $h \in G_1$.

Corollar 7.15 Sei $\mathcal{F}$ halbeinfach und g ein zentrales Element in G mit $\deg(g) = n \neq 0$. Sei $\mathcal{F}'$ eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X, die durch eine Darstellung V' von G induziert wird. Dann ist $\beta \in \mathbb{R}$ ein ι-Determinantengewicht auf $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es einen Eigenwert α von g auf V' gibt mit $|\iota\alpha| = q^{\frac{n\beta}{2}}$.

Beweis Ohne Einschränkung ist V' einfach. Dann ist g skalar (hier benötigt man $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Koeffizienten, nämlich das Lemma von Schur!), etwa gleich der Multiplikation mit α, und der Eigenwert auf $\det V'$ gleich α^r, $r = \dim V'$. Nach Proposition 7.8 ist das Determinantengewicht β gleich $\frac{1}{n} \cdot \iota\text{-}w(\alpha)$: Ist χ der Charakter zu $\det V'$, so ist $|\iota\chi(w)| = q^{\frac{\deg(w)\cdot\beta\cdot r}{2}}$; wählt man w mit $\deg(w) = n$, so ist $|\iota\chi(w)| = |\iota\alpha|$).

Satz 7.16 (a) Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei $n(\beta)$ die Summe der Ränge der Kompositionsfaktoren mit ι-Determinanten-Gewicht β. Dann sind die Determinantengewichte von $\Lambda^a \mathcal{F}$ die Summen

$$\sum m(\beta)\beta$$

mit $m(\beta) \in \mathbb{Z}$, $\sum m(\beta) = a$ und $0 \leq m(\beta) \leq n(\beta)$.

(b) Sind die glatten $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ von reinem ι-Determinantengewicht β und β', so ist $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ von reinem ι-Determinantengewicht $\beta + \beta'$.

(c) Sei $f : X' \to X$ ein dominanter Morphismus normaler zusammenhängender Schemata, die von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ sind. Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann von reinem ι-Determinantengewicht β, wenn $f^*\mathcal{F}$ es ist.

Beweis (a) Die Eigenwerte von Z auf $\Lambda^a\mathcal{F}$ sind Produkte von a Eigenwerten auf $\mathcal{F}$, die zu verschiedenen Eigenvektoren in $\mathcal{F}$ gehören. Durch ι-Betragsbildung und Logarithmieren sieht man, dass man gerade alle Summen von a Determinanten-Gewichten erhält, bei denen höchstens $n(\beta)$ gleich β sind.

(b) ist analog, durch Betrachtung der algebraischen Monodromiegruppe von $\mathcal{F} \otimes G$.

(c) Aus der Voraussetzung folgt, dass das Bild von $\pi_1(\overline{X'})$ in $\pi_1(\overline{X})$ von endlichem Index ist: da die Schemata normal sind, genügt es, die Faser über dem generischen Punkt η von $\overline{X}$ zu betrachten ($Gal(\overline{k(\eta)}/k(\eta)) \to \pi_1(\overline{X})$ ist surjektiv), und diese besitzt einen rationalen Punkt in einer endlichen Erweiterung von $k(\eta)$. Es folgt, dass für die entsprechenden Zariski-Abschlüsse G_1' und G_1 das Bild von G_1' endlichen Index in G_1 hat, also G_1° enthält. Das Bild des Zentrums Z' von G' zentralisiert also G_1°, und mit demselben Schluß wie im Beweis von 7.14 sieht man, dass es endlichen Index im Zentrum Z von G hat. Hieraus folgt offenbar die Behauptung.

8 Kohomologie von Kurven und L-Reihen

Sei X eine glatte geometrisch irreduzible Kurve über $\mathbb{F}_q$ und sei $\mathcal{F}$ eine glatte $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf X, mit Halm $V = \mathcal{F}_{\overline{y}}$ in einem geometrischen Punkt $\overline{y}$ von X. Sei $\mathcal{F}'$ (bzw. $\mathcal{F}''$) die größte Untergarbe (bzw. Quotientengarbe) von $\mathcal{F}$, die konstant auf $\overline{X}$ ist. Wegen (7.6.1) sind dann $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ Urbilder von Garben auf Spec$(\mathbb{F}_q)$, d.h., kommen von $\mathbb{Q}_\ell$-Darstellungen F' und F'' von $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$.

Lemma 8.1 (a) $H^0(\overline{X}, \mathcal{F}) = V^{\pi_1(\overline{X}, \overline{y})} = F'$.

(b) $H^0_c(\overline{X}, \mathcal{F}) = \begin{cases} H^0(\overline{X}, \mathcal{F}) & \text{falls } X \text{ eigentlich ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(c) $H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F}) = V_{\pi_1(\overline{X}, \overline{y})}(-1) = F''(-1)$.

(d) Ist $\mathcal{F}$ eine beliebige konstruierbare $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen, so ist $H^2_c(\overline{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F})$.

Beweis (a) folgt aus der Kategorienäquivalenz zwischen glatten Garben und Darstellungen der Fundamentalgruppe. (b) für nichteigentliches X folgt aus der Tatsache, dass eine glatte Garbe keine Schnitte mit Träger in endlich vielen Punkten hat (es reicht, dies für konstante Garben einzusehen). Alternativ kann man Poincaré-Dualität und schwachen Lefschetz verwenden. (c) folgt aus (a) mit Poincaré-Dualität. (d) folgt aus der relativen Kohomologiesequenz für $U \subset X \supset X - U$, da $H^i(\overline{X - U}, \mathcal{F}) = 0$ für $i > 0$ ($\overline{X - U}$ besteht aus endlich vielen Kopien von Spec$(\overline{\mathbb{F}_q})$).

Corollar 8.2 Sei α ein Eigenwert von F auf $H^0(\overline{X}, \mathcal{F})$ oder $H^0_c(\overline{X}, \mathcal{F})$ (bzw. auf $H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F})$).

(a) Für jedes $x \in X^0$ ist $\alpha^{\deg(x)}$ (bzw. $(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)}$) ein Eigenwert von F_x auf $\mathcal{F}$ (d.h., auf V).

(b) Die Zahl ι-$w_q(\alpha)$ (bzw. ι-$w_q(\alpha) - 2$) ist ein ι-Determinantengewicht von $\mathcal{F}$ (d.h., der assoziierten $\overline{Q}_\ell$-Garbe).

Für das Folgende benutzen wir die Grothendieck-Lefschetz-Formel

$$(8.3.1) \qquad \prod_{x \in X_0} \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F})^{-1} = \prod_{i \geq 0} \det(1 - FT | H^i_c(\overline{X}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

für eine konstruierbare $\mathbb{Q}_\ell$-Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema X von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$, die aus Theorem 1.6 und (1.5.2) folgt. Die linke Seite wird kontrolliert durch

Proposition 8.3 Gilt ι-$w_{N(x)}(\alpha) \leq \beta$ für alle Eigenwerte α von F_x auf $\mathcal{F}$, für alle $x \in X_0$, so konvergiert $\iota \prod_{x \in X_0} \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F})^{-1}$ absolut für $|T| < q^{-\frac{\beta}{2} - \dim(X)}$ (d.h., für $Re(s) > \frac{\beta}{2} + \dim(X)$ falls $T = q^{-s}$), hat also weder Pol- noch Nullstelle in diesem Gebiet.

Beweis Sei $d = \dim(X)$; dann gibt es eine endliche Überdeckung von X so, dass jedes Mitglied quasi-endlich über einem affinen Raum $A^d_{\mathbb{F}_q}$ ist (Noether-Normalisierung). Hieraus folgt

$$\sharp\{x \in X_0 \text{ mit } \deg(x) = n\} \leq C \cdot q^{dn}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ (die die Summe der generischen Grade abschätzt), da $\mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathbb{F}^d_{q^n}$. Die Konvergenz folgt somit aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\sum_n q^{nd}\, q^{\frac{n\beta}{2}} |T|^n \,.$$

Corollar 8.4 Ist X eine affine glatte geometrisch irreduzible Kurve, so gilt für die Eigenwerte α von F auf $H^1_c(\overline{X}, \mathcal{F})$

$$\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2 \,.$$

Beweis Die rechte Seite der Formel (8.3.1) wird

$$\frac{\det(1 - FT|H^1_c(\overline{X}, \mathcal{F}))}{\det(1 - FT|H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F}))}$$

Nach 8.2 (a) gilt $\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2$ für die reziproken Nullstellen α des Nenners, und nach 8.3 gilt dies auch für die reziproken Nullstellen des Gesamtbruchs.

Sei nämlich α ein Eigenwert von F auf $H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F})$. Nach 8.2 (a) ist dann $(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)}$ Eigenwert von F_x auf $\mathcal{F}$, also nach Voraussetzung

$$\beta \geq \iota\text{-}w_{N(x)}(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)} = -2 + \iota\text{-}w_q(\alpha) \,.$$

Ist andererseits α ein Eigenwert von F auf $H^1_c(\overline{X}, \mathcal{F})$, so muss nach (8.3.1) und 8.3 $(1 - \iota\alpha T) \neq 0$ für alle $|T| < q^{-\frac{\beta}{2}-1}$ sein, also $|\iota\alpha| \leq q^{\frac{\beta}{2}+1}$, d.h., $\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2$.

9 Reinheit von reellen $\mathbb{Q}_\ell$-Garben

Dieser Abschnitt behandelt eine wichtige Methode, die in beiden Arbeiten von Deligne zur Weil-Vermutung benutzt wird.

Definition 9.1 Sei $\mathcal{F}$ eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf einem Schema X, welches von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

(a) $\mathcal{F}$ heißt total reell, wenn die Koeffizienten von

$$\det(1 - F_x T|\mathcal{F}) := \det(1 - F_x T \mid \mathcal{F}_{\overline{x}})$$

für jedes $x \in X_0$ total reelle algebraische Zahlen sind.

(b) $\mathcal{F}$ heißt ι-reell für $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$\iota \det(1 - F_x T|\mathcal{F})$$

für alle $x \in X_0$ reelle Koeffizienten hat.

Bemerkungen 9.2 Ist $\mathcal{F}$ rein (bzw. ι-rein), so ist $\mathcal{F}$ direkter Summand einer total reellen (bzw. ι-reellen) Garbe, nämlich von $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\vee(-n)$, falls n das Gewicht (bzw. ι-Gewicht) von $\mathcal{F}$ ist: zu $\iota\alpha$ mit $|\iota\alpha| = N(x)^{\frac{n}{2}}$ ist $N(x)^n \cdot \iota\alpha^{-1}$ komplex konjugiert.

Satz 9.3 Sei X eine glatte geometrisch irreduzible Kurve über $\mathbb{F}_q$. Die Kompositionsfaktoren einer glatten, ι-reellen $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X sind ι-rein.

Wir benutzen:

Lemma 9.4 Sei $\mathcal{F}$ eine glatte ι-reelle $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X und sei ϱ das größte ι-Determinatengewicht von $\mathcal{F}$. Für jedes $x \in X_0$ und jeden Eigenwert α von F_x auf $\mathcal{F}$ gilt dann ι-$w_{N(x)}(\alpha) \le \varrho$.

Beweis Durch eventuelles Weglassen eines Punktes, den man gerade nicht betrachtet, ist ohne Einschränkung X affin. Die Lefschetz-Formel gibt dann für jede positive ganze Zahl k

$$\prod_{x \in X_0} \iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} \mid \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1} = \frac{\iota \det(1 - FT \mid H^1_c(\overline{X}, \mathcal{F}^{\otimes 2k}))}{\iota \det(1 - FT \mid H^2_c(\overline{X}, \mathcal{F}^{\otimes 2k}))} \tag{9.3.1}$$

Hierbei ist

$$\iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} \mid \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1} = \exp(\sum_{n \ge 1} \iota Tr F_x^n \mid \mathcal{F}^{\otimes 2k}) \frac{T^{n \cdot \deg(x)}}{n}$$

eine formale Potenzreihe mit nicht-negativen reellen Koeffizienten, da nach Voraussetzung

$$\iota Tr(F_x^n \mid \mathcal{F}^{\otimes 2k}) = \iota Tr(F_x^n \mid \mathcal{F})^{2k}$$

nicht-negativ reell ist. Nach 7.16 (b) sind die ι-Determinanten-Gewichte von $\mathcal{F}^{\otimes 2k}$ höchstens gleich $2k\varrho$, und nach 8.2 (b) hat also die rechte Seite der Lefschetz-Formel (9.3.1) keinen

Pol für $|T| < q^{-\frac{1}{2}(2k\varrho+2)}$ (d.h., für die reziproken Nullstellen α' des Nenners gilt $\iota\text{-}w_q(\alpha') \leq 2k\varrho + 2$). Nach dem folgenden Lemma hat also auch

$$\iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} \mid \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1}$$

keinen Pol für $|T| < q^{\frac{1}{2}(2k\varrho+2)}$. Für einen Eigenwert α von F_x auf $\mathcal{F}$ ist $\iota\alpha^{-2k/\deg(x)}$ ein Pol; es folgt

$$|\iota\alpha|^{2k/\deg(x)} \;\leq\; q^{(2k\varrho+2)/2}\,,$$

d.h.,

$$|\iota\alpha| \;\leq\; N(x)^{(\varrho+\frac{1}{k})/2}\,.$$

Da dies für alle k gilt, folgt die Behauptung.

Lemma 9.5 Sei $f_i = \sum\limits_n a_{i,n}T^n$ eine Folge von formalen Potenzreihen, mit konstanten Term 1 und nicht-negativen reellen Koeffizienten. Die Ordnung von $f_i - 1$ gehe gegen unendlich mit i, und es sei $f = \prod\limits_i f_i$. Dann ist der absolute Konvergenzradius für jedes f_i mindestens so groß wie für f. Sind f und die f_i Taylorentwicklungen von meromorphen Funktionen, so gilt

$$\inf\{|z| \mid f(z) = \infty\} \leq \inf\{|z| \mid f_i(z) = \infty\}$$

für jedes i.

Beweis Ist $f = \sum\limits_n a_nT^n$, so folgt die erste Aussage daraus, dass $a_{i,n} \leq a_n$ ist für alle i. Für meromorphe Funktionen sind die angegebenen Infima gerade die absoluten Konvergenzradien.

Beweis von Satz 9.3. Sei $\mathcal{F}$ eine glatte ι-reelle $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-Garbe auf X. Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{F}(\beta)$ die Summe der Kompositionsfaktoren von $\mathcal{F}$ mit ι-Determinantengewicht β und $n(\beta)$ der Rang von $\mathcal{F}(\beta)$. Sei $x \in X_0$, und seien $\alpha_1^\beta, \ldots, \alpha_{n(\beta)}^\beta$ die Eigenwerte von F_x auf $\mathcal{F}(\beta)$. Es ist zu zeigen, dass $\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\beta) = \beta$ für alle i.
Nach Definition des Determinantengewichts ist

$$\sum_i \iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\beta) = n(\beta)\beta\,. \tag{9.3.2}$$

Sei ohne Einschränkung $\mathcal{F}(\beta) \neq 0$, und N die Summe der $n(\gamma)$ mit $\gamma > \beta$. Nach 7.16 (a) sind die ι-Determinanten-Gewichte der $(N+1)$-ten äußeren Potenz von $\mathcal{F} \leq \beta + \sum\limits_{\gamma>\beta} n(\gamma)\gamma$.

Da jedes $\alpha_i^\beta \prod\limits_{\gamma>\beta} \prod\limits_{i=1}^{n(\gamma)} \alpha_i^\gamma$ Eigenwert von F_x auf $\Lambda^{N+1}\mathcal{F}$ ist, gilt nach dem obigen Lemma 9.4

$$\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i) + \sum_{\gamma>\beta}\sum_i \iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\gamma) \leq \beta + \sum_{\gamma>\beta} n(\gamma)\gamma\,.$$

Nach der Gleichung (9.3.2) (für jedes $\gamma > \beta$) folgt

$$\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i) \leq \beta\,.$$

Durch Aufsummieren über i muss man die Gleichung (9.3.2) für β erhalten, also muss hier die Gleichheit gelten.

10 Der Formalismus naher und verschwindender Zykel

Um Induktion über Dimension zu benutzen, benutzt Deligne Faserungen $f : X \to S$ über einer glatten Kurve S, wobei f über einer offenen Menge $U \subseteq S$ glatt ist, und nur an den endlich vielen Punkten $s \in S - U$ Fasern X_s mit (milden) Singularitäten hat. Die Kohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ wird mittels der Grothendieck-Leray-Spektralsequenz

$$H^p(S, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

studiert. Um die Garben $R^q f_* \mathcal{F}$ an den schlechten Stellen $s \in S - U$ zu untersuchen, geht man zum lokalen Ring $\mathcal{O}_{S,s}$ über (der ein diskreter Bewertungsring ist) bzw. zu seiner Henselisierung $\mathcal{O}^h_{S,s}$; dies ist ein henselscher diskreter Bewertungsring.

Ein strikter henselscher diskreter Bewertungsring A ist für die étale Topologie das Analogon der offenen Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ in $\mathbb{C}$: Es ist $\pi_1(D) = 0$ und $\pi_1(D \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$; entsprechend ist $\pi_1(\mathrm{Spec}(A)) = 0$ und

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(A) - \{s\}) = \prod_{\ell \neq char(k(s))} \mathbb{Z}_\ell \,,$$

wobei s der abgeschlossene Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$ ist. Der Punkt s entspricht also dem Punkt $0 \in D$, und der generische Punkt η entspricht einem "allgemeinen Punkt" $t \in D^* - \{0\}$.

In der klassischen Topologie hat man die Theorie verschwindender Zykel für eine Faserung $f : X \to D$, mit f glatt auf D^* und eventuell singulärer Faser X_0 über 0. In der étalen Topologie betrachtet man das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] & X_s \arrow[l] \arrow[d] \\ \eta \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) & s \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Vorüberlegungen 10.1 Sei $T = \mathrm{Spec}\, A$ für einen henselschen diskreten Bewertungsring A.

(a) Nach dem Zerlegungssatz gibt es eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie $Sh(T_{et})$ der étalen Garben auf T und der Kategorie aller Tripel $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi)$, wobei

(i) $\mathcal{F}_0$ eine Garbe auf dem abgeschlossenen Punkt $s \overset{i}{\hookrightarrow} T$ ist,

(ii) $\mathcal{F}_1$ eine Garbe auf dem generischen Punkt $\eta \overset{j}{\hookrightarrow} T$ ist, und

(iii) $\varphi : \mathcal{F}_0 \longrightarrow i^* j_* \mathcal{F}_1$ ein Morphismus von Garben ist.

Hierbei wird eine Garbe $\mathcal{F}$ auf T auf das Tripel

$$(i^*\mathcal{F}, j^*\mathcal{F},\ sp : i^*\mathcal{F} \to i^* j_* j^* \mathcal{F})$$

abgebildet, wobei man den sogenannten Spezialisierungsmorphismus sp durch Anwenden von i^* auf den Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \to j_* j^* \mathcal{F}$ erhält.

(b) Dies besitzt die folgende Uminterpretation mittels Galoismoduln: Sei $\overline{k(\eta)}$ ein separabler Abschluss von $k(\eta)$ und $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{k(\eta)}) \longrightarrow T$ der zugehörige geometrische Punkt über η.

Dies definiert einen geometrischen Punkt $\overline{s} \to T$ über s wie folgt. Sei $\tilde{A}$ der ganze Abschluss von A in $\overline{k(\eta)}$, d.h., $\widetilde{T} = \mathrm{Spec}\ (\tilde{A})$ die Normalisierung von T in $\overline{\eta}$. Dann ist $\tilde{A}$ lokal und der Restklassenkörper eine separabel abgeschlossene Erweiterung von $k(s)$ und definiert einen geometrischen Punkt $\overline{s} \to T$ über s. Weiter erhält man eine Surjektion

$$G_\eta = Gal(k(\overline{\eta})/k(\eta)) \twoheadrightarrow G_s = Gal(k(\overline{s})/k(s))\,;$$

der Kern I heißt die Trägheitsgruppe. Die strikte Henselisierung $O^h_{T,\overline{s}}$ von T in $\overline{s}$ identifiziert sich mit $\tilde{A}^I$.

Die Tripel in (a) entsprechen dann Tripeln (M_0, M_1, ϕ), wobei

(i) M_0 ein diskreter G_s-Modul,

(ii) M_1 ein diskreter G_η-Modul, und

(iii) $\phi : M_0 \to M_1^I$ ein Morphismus von G_s-Moduln ist.

Der Übergang von den Tripeln in (a) hierzu erfolgt durch Halmbildung, d.h., mittels

$$M_0 = \mathcal{F}_{\overline{s}} = (i^*\mathcal{F})_{\overline{s}} \quad \text{und} \quad M_1 = \mathcal{F}_{\overline{\eta}} = (j^*\mathcal{F})_{\overline{\eta}}\,,$$

wobei man sich überlegt, dass i^*j_* der Fixmodulbildung unter I entspricht.

(c) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Komposition

$$\mathcal{F}_{\overline{s}} \xrightarrow{sp} \mathcal{F}_{\overline{\eta}}^I \hookrightarrow \mathcal{F}_{\overline{\eta}}$$

gerade die Spezialisierungsabbildung der Halme ist, die vom Morphismus

$$\mathcal{O}^h_{T,\overline{s}} \hookrightarrow \mathcal{O}^h_{T,\overline{\eta}} = k(\eta)_s$$

induziert wird (vergl. 2.4). Insbesondere ist $\mathcal{F}$ lokal konstant genau dann, wenn I trivial auf $\mathcal{F}_{\overline{\eta}} = M_1$ operiert und sp ein Isomorphismus ist.

(d) Ist nun $f : X \to T$ ein Morphismus und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so ist also die höhere Bildgarbe $R^\nu f_*\mathcal{F}$ beschrieben durch das Tripel

$$((R^i f_*\mathcal{F})_{\overline{s}}\ ,\ (R^i f_*\mathcal{F})_{\overline{\eta}},\ sp:\ (R^i f_*\mathcal{F})_{\overline{s}} \longrightarrow (R^i f_*\mathcal{F})^I_{\overline{\eta}}).$$

Ist f eigentlich, so identifiziert sich dies nach dem eigentlichen Basiswechsel mit einem Tripel

$$(H^i(X_{\overline{x}}, \mathcal{F}),\ H^i(X_{\overline{\eta}}, \mathcal{F})\ ,\ sp:\ H^i(X_{\overline{s}}, \mathcal{F}) \to H^i(X_{\overline{\eta}}, \mathcal{F})^I)\,,$$

wobei $X_{\overline{s}} = X \times_T \overline{s} = X_s \times_{k(s)} k(\overline{s})$ und $X_{\overline{\eta}} = X \times_T \overline{\eta} = X_\eta \times_{k(\eta)} k(\overline{\eta})$ die geometrischen Fasern von f bei $\overline{s}$ und $\overline{\eta}$ sind.

10.2 Das Hilfsmittel zur Berechnung der Spezialisierungsabbildung ist die allgemeine Theorie der verschwindenden Zykel. Dafür betrachten wir ein kartesisches Diagramm

(10.2.1)

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \\ \eta \arrow[r] & T & s \arrow[l] \end{tikzcd}\,,$$

wobei zunächst f beliebig von endlichem Typ sei. Sei $k(\overline{\eta})^I \subset L \subset k(\overline{\eta})$ ein beliebiger Zwischenkörper und B der ganze Abschluss von A in L ist, d.h., $\overline{T} = \text{Spec } B$ die Normalisierung von T in Spec L (in der Literatur werden sowohl $L = K(\overline{\eta})^I$, d.h., $B = O^h_{T,\overline{s}}$, als auch $L = K(\overline{\eta})$, d.h., $B = \tilde{A}$ betrachtet). Ist $\overline{X} = X \times_T \overline{T}$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

(10.2.2)
$$\begin{tikzcd}
X_{\overline{\eta}} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[d, "f"] & X_{\overline{s}} \arrow[l, "\overline{i}"'] \arrow[d] \\
\overline{\eta} \arrow[r] & \overline{T} & \overline{s} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

welches aus (10.2.1) durch Basiswechsel mit der unteren Zeile hervorgeht, und in dem die beiden Quadrate wieder kartesisch sind.

Definition/Lemma 10.3 Sei Y ein Schema über einem Körper k mit separablem Abschluss $\overline{k}$, sei $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ und $u : G \to Gal(\overline{k}/k)$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen.

(a) Eine G-Garbe auf $\overline{Y}$ ist eine Garbe $\mathcal{F}$ auf $\overline{Y}$ mit einer stetigen Operation von G, die verträglich ist mit der (Recht-) Operation von $Gal(\overline{k}/k)$ auf $\overline{Y}$; d.h., für jedes $\sigma \in G$ habe man einen Morphismus
$$\sigma_* : \mathcal{F} \longrightarrow (\text{Spec}(u(\sigma))_*\mathcal{F} ,$$
so dass $\tau_*\sigma_* = (\tau\sigma)_*$. Dabei operiere G für jedes quasikompakte étale $U \to Y$ diskret auf $\mathcal{F}(\overline{U}) = \mathcal{F}((\text{Spec}\,\sigma)^{-1}\overline{U})$, $\overline{U} = U \times_k \overline{k}$. Sei $Sh(\overline{Y}, G)$ die Kategorie der G-Garben auf $\overline{X}$.

(b) Sei $\pi \cdot \overline{Y} \to Y$ die Projektion. Dann gibt es eine Kategorienäquivalenz (wobei immer Garbe = ètale Garbe)
$$\begin{array}{ccc}
Sh(Y) = (\text{Garben auf } Y) & \leftrightarrow & Sh(\overline{Y}, Gal(\overline{k}/k)) = (Gal(\overline{k}/k)\text{-Garben auf } Y) \\
\mathcal{F} & \mapsto & \pi^*\mathcal{F} \\
(\pi_*\mathcal{G})^{Gal(\overline{k}/k)} & \leftarrow\!\shortmid & \mathcal{G} ,
\end{array}$$

Für den Beweis von (b) siehe SGA7 XIII 1.1. Wir bemerken nur, dass der Morphismus
$$\sigma_* : \pi^*\mathcal{F} \longrightarrow (\text{Spec}\,\sigma)_*\pi^*\mathcal{F} \overset{(1)}{=} (\text{Spec}\,\sigma)_*(\text{Spec}\,\sigma)^*\pi^*\mathcal{F}$$
der Adjunktionsmorphismus ist ((1) kommt daher, dass $\pi = \pi\text{Spec}\,\sigma$ ist).

Dies erlaubt die Definition der folgenden Kategorie und Funktoren.

Definition 10.4 Sei $Sh(X_{\overline{s}} \times_s T)$ die abelsche Kategorie der Tripel $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi)$, wobei

(i) $\mathcal{F}_0$ eine G_s-Garbe auf $X_{\overline{s}}$,

(ii) $\mathcal{F}_1$ eine G_η-Garbe auf $X_{\overline{s}}$ (bezüglich $G_\eta \to G_s$), und

(iii) $\varphi : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$ ein G_η-äquivarianter Morphismus ist.

Definition 10.5 Seien $\pi : \overline{X} \to X$, $\pi_0 : X_{\overline{s}} \to X_s$ und $\pi_1 : X_{\overline{\eta}} \to X_\eta$ die Projektionen. Definiere dann
$$\begin{array}{rcccl}
\Psi_{\overline{s}} & : & Sh(X_s) & \longrightarrow & Sh(X_{\overline{s}}, G_s) \\
\Psi_{\overline{\eta}} & : & Sh(X_\eta) & \longrightarrow & Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta) \qquad \text{(Operation bezüglich } G_\eta \to G_s) \\
\Psi & : & Sh(X) & \longrightarrow & Sh(X_{\overline{s}} \times_s T)
\end{array}$$

durch

$$\begin{array}{rcl}
\Psi_{\overline{s}}\mathcal{F} & = & \pi_0^*\mathcal{F} \\
\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F} & = & \overline{i}^*\overline{j}_*\pi_1^*\mathcal{F} \\
\Psi\mathcal{F} & = & (\overline{i}^*\pi^*\mathcal{F},\, \overline{i}^*\overline{j}_*\overline{j}^*\pi^*\mathcal{F},\, \overline{i}^*\pi^*\mathcal{F} \xrightarrow{\overline{i}^*ad} \overline{i}^*\overline{j}_*\overline{j}^*\pi^*\mathcal{F}) \\
 & = & (\pi_0^*\; i^*\mathcal{F},\, \overline{i}^*\overline{j}_*\overline{j}^*\pi_1^*j^*\mathcal{F},\, \varphi_F\; = \overline{i}^*ad) \\
 & = & (\Psi_{\overline{s}}i^*\mathcal{F},\, \Psi_{\overline{\eta}}j^*\mathcal{F},\, \varphi_F)\,.
\end{array}$$

Diese Funktoren sind additiv, linksexakt und besitzen Rechtsableitungen $R^i\Psi_{\overline{s}}$, $R^i\Psi_{\overline{\eta}}$ und $R^i\Psi$, bzw. $R\Psi_{\overline{s}}$, $R\Psi_{\overline{\eta}}$ und $R\Psi$ in den derivierten Kategorien: Ist $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung, so wird $R\Psi\mathcal{F}$ durch $\Psi I^\bullet$ repräsentiert (eindeutig bis auf eindeutige Homotopie), und es ist $R^i\Psi\mathcal{F} = H^i(\Psi I^\bullet)$ (i-tes Homologieobjekt, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus), entsprechend hat man $R^i\Psi_{\overline{\eta}}$ und $R\Psi_{\overline{\eta}}$, während $\Psi_{\overline{s}}$ exakt ist und keine höheren Ableitungen hat.

Einen Komplex in $Sh(X_{\overline{s}} \times_s T)$ kann man deuten als ein Objekt $(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi)$, wobei $\mathcal{F}_0^\bullet$ ein Komplex in $Sh(X_{\overline{s}}, G_s)$ ist, $\mathcal{F}_1^\bullet$ ein Komplex in $Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta)$ und $\varphi : \mathcal{F}_0^\bullet \to \mathcal{F}_1^\bullet$ ein äquivarianter Morphismus von Komplexen ist. Definieren wir den Funktor

$$sp^* : Sh(X_{\overline{s}}, G_s) \longrightarrow Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta)$$

durch $sp^*\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$, mit G_η-Operation via $G_\eta \to G_s$, so können wir φ auch als Morphismus

$$\varphi : sp^*\mathcal{F}_0^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_1^\bullet$$

von Komplexen in $Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta)$ deuten. Jedem $(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi)$ kann man dann funktoriell eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}_1^\bullet \to Cone(\varphi) \to sp^*\mathcal{F}_0^\bullet[1] \to 0$$

zuordnen, wobei $Cone(\varphi)$ der Kegel von φ ist (siehe etwa [Mi]S.174,167). Setzen wir

$$\Phi(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi) = Cone(\varphi)\,,$$

so führt Φ Quasiisomorphismen in Quasiisomorphismen über, und für eine Garbe $\mathcal{F}$ mit injektiver Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ ist

$$R\Phi\mathcal{F} \;:=\; \Phi R\Psi\mathcal{F} \quad (= \Phi\Psi I^\bullet)$$

eindeutig bis auf eindeutigen Quasiisomorphismus, also wohldefiniert in der derivierten Kategorie von $S(X_{\overline{s}}, G_\eta)$.

Definition 10.6 $R\Phi\mathcal{F}$ heisst der Komplex der verschwindenden Zykel. Setze

$$R^i\Phi\mathcal{F} = H^i(R\Phi\mathcal{F}) \quad (= H^i(\Phi\psi I^\bullet))$$

für die i-te Garbe der verschwindenden Zykel von $\mathcal{F}$.

Nach Konstruktion haben wir funktoriell für jedes $\mathcal{F}$ in $Sh(X_{et})$ ein ausgezeichnetes Dreieck von Komplexen in $Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta)$

$$sp^*i^*\mathcal{F} \longrightarrow R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F} \longrightarrow R\Phi\mathcal{F} \longrightarrow sp^*i^*\mathcal{F}[1]\;, \tag{10.6.1}$$

welches wohldefiniert in der derivierten Kategorie von $Sh(X_{\overline{s}}, G_\eta)$ ist. Hierbei hätten wir eigentlich $sp^*\Psi_{\overline{s}}i^*\mathcal{F}$ schreiben müssen, identifizieren aber im folgenden $Sh(X_s)$ und $Sh(X_{\overline{s}}, G_s)$

via $\Psi_{\overline{s}}$ und schreiben auch sp^* für $sp^*\Psi_{\overline{s}}$. Für eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ wird (10.6.1) durch

$$\overline{i}^* I^\bullet \xrightarrow{\overline{i}^* ad} \overline{i}^* \overline{j}_* \overline{j}^* I^\bullet \longrightarrow Cone(\overline{i}^* ad) \longrightarrow$$

repräsentiert, wobei wir hier π^* unterdrückt haben. Wir lassen π^*, π_0^* und π_1^* auch im Folgenden oft weg. Beachte, dass $\overline{i}^*\mathcal{F}$ quasiisomorph zu $\overline{i}^* I^\bullet$ ist.

Etwas ungenauer können wir (10.6.1) auch schreiben als

$$\overline{i}^*\mathcal{F} \longrightarrow \overline{i}^* R\overline{j}_*\overline{j}^*\mathcal{F} \longrightarrow R\Phi\mathcal{F} \longrightarrow .$$

Bei dieser Schreibweise ist nicht so deutlich, dass es sich um Komplexe von G_η-Garben handelt; außerdem lässt sich $R\Phi\mathcal{F}$ hierdurch nicht definieren: beachte, dass die Kegelbildung nicht wohldefiniert in der derivierten Kategorie ist.

10.7 Im Formalismus verschwindender Zykel wird die Operation der Trägheitsgruppe I durch die sogenannte Variation beschrieben: Ist $\sigma \in I$, so faktorisiert der Endomorphismus $\sigma - 1$ von $R\Phi\mathcal{F}$ wegen der trivialen Operation von I auf $sp^*i^*\mathcal{F}$ über $R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F}$, und wir erhalten, funktoriell in $\mathcal{F}$, ein kanonisches kommutatives Diagramm

(10.7.1)
$$\begin{tikzcd}
sp^*i^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma-1"', "Var(\sigma)"] & R\Phi\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma-1"] \arrow[dl] & {} \\
sp^*i^*\mathcal{F} \arrow[r] & R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F} \arrow[r] & R\Phi\mathcal{F} \arrow[r] & {} .
\end{tikzcd}$$

Der induzierte Morphismus

$$Var(\sigma) : R\Phi\mathcal{F} \to R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F}$$

(und die davon in der Kohomologie induzierte Abbildung) heißt die Variation von σ. Wegen der trivialen Formel

$$(\sigma\tau - 1) = (\sigma - 1) + (\tau - 1) + (\sigma - 1)(\tau - 1)$$

hat man dabei

(10.7.2)
$$\begin{aligned} Var(\sigma\tau) &= Var(\sigma) + Var(\tau) + (\sigma - 1)Var(\tau) \\ &= Var(\sigma) + Var(\tau) + Var(\sigma)(\tau - 1) . \end{aligned}$$

10.8 Die Theorie verschwindender Zykel hat die folgende Anwendung: Durch Bildung der Kohomologie auf $X_{\overline{s}}$ bekommt man aus (10.6.1) eine lange exakte Sequenz von G_η-Moduln

(10.8.1)
$$\to H^\nu(X_{\overline{s}}, i^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma} H^\nu(X_{\overline{s}}, R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F}) \to H^\nu(X_{\overline{s}}, R\Phi\mathcal{F}) \to H^{\nu+1}(X_{\overline{s}}, \mathcal{F}) \to \ldots .$$

Ist f eigentlich und $\mathcal{F}$ eine Torsionsgarbe auf X, so ist die kanonische Abbildung

$$\Psi : H^\nu(X_{\overline{\eta}}, j^*\mathcal{F}) \underset{\sim}{\overset{(1)}{=}} H^\nu(\overline{X}, R\overline{j}_*\overline{j}^*\mathcal{F}) \underset{\sim}{\xrightarrow{(2)}} H^\nu(X_{\overline{s}}, \overline{i}^* R\overline{j}_*\overline{j}^*\mathcal{F}) = H^\nu(X_{\overline{s}}, R\Psi_{\overline{\eta}}\mathcal{F})$$

ein Isomorphismus: Der Isomorphismus (1) gilt immer (Komposition von derivierten Funktoren), und die Restriktionsabbildung (2) ist ein Isomorphismus nach dem eigentlichen Basiswechsel. Weiter folgt leicht aus der Definition des Basiswechselmorphismus, dass $\Psi sp = \gamma$

ist, für die Spezialisierungsabbildung $\gamma : H^\nu(X_{\overline{s}}, i^*\mathcal{F}) \to H^\nu(X_{\overline{\eta}}, j^*\mathcal{F})$ aus 10.1 (d). Damit wird (10.8.2) zu einer exakten Sequenz

$$\ldots \to H^\nu(X_{\overline{s}}, i^*\mathcal{F}) \stackrel{sp}{\to} H^\nu(X_{\overline{\eta}}, j^*\mathcal{F}) \to H^\nu(X_{\overline{s}}, R\Phi\mathcal{F}) \to H^{\nu+1}(X_{\overline{s}}, i^*\mathcal{F}) \to \ldots . \tag{10.8.2}$$

Die Betrachtung von sp wird also auf die Berechnung der $R\Phi\mathcal{F}$ zurückgeführt.

Dies ist ein lokales Problem, und zwar in dem folgenden präzisen Sinne: für einen geometrischen Punkt $\overline{a}$ von $X_{\overline{s}}$ hängt der Halm $(R\Phi\mathcal{F})_{\overline{a}}$ in $\overline{a}$ nur von der strikten Henselisierung $O^h_{X,\overline{a}}$ von X in $\overline{a}$ ab, da dies für $\mathcal{F}_{\overline{a}}$ und $(R\overline{j}_*\overline{j}^*\mathcal{F})_{\overline{a}}$ gilt, und man ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathcal{F}_{\overline{a}} \longrightarrow (R\overline{j}_*\overline{j}^*\mathcal{F})_{\overline{a}} \longrightarrow (R\Phi\mathcal{F})_{\overline{a}} \longrightarrow$$

hat. Nach dem nächsten Lemma ist $R\Phi\mathcal{F}$ nur in den singulären Punkten von f konzentriert, falls $\mathcal{F}$ lokal-konstant auf dem glatten Ort von f ist.

Lemma 10.9 Ist f glatt und $\mathcal{F}$ lokal-konstant, so ist $R\Phi\mathcal{F} = 0$.

Beweis Da man das Verschwinden auf étalen Umgebungen testen kann, ist ohne Einschränkung $\mathcal{F} = \Lambda$ konstant. Es ist zu zeigen, dass

$$\overline{i}^*\Lambda \quad \stackrel{\overline{i}^*ad}{\longrightarrow} \quad \overline{i}^*R\overline{j}_*\overline{j}^*\Lambda \tag{10.9.1}$$

ein Quasiisomorphismus ist. Wir betrachten dazu das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_{\overline{\eta}} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, "f_{\overline{\eta}}"'] & \overline{X} \arrow[d, "f"] & X_{\overline{s}} \arrow[l, "\overline{i}"'] \arrow[d, "f_{\overline{s}}"] \\ \overline{\eta} \arrow[r, "\overline{j}"] & \overline{T} & \overline{s}\,. \arrow[l, "\overline{i}"'] \end{tikzcd}$$

Zunächst bemerken wir, dass die kanonischen Morphismen

$$\Lambda_{\overline{T}} \stackrel{ad}{\longrightarrow} \overline{j}_*\overline{j}^*\Lambda_{\overline{T}} \longrightarrow R\overline{j}_*\overline{j}^*\Lambda_{\overline{T}}$$

Isomorphismen nach Anwendung von $\overline{i}^*$ werden, da für $\pi_1 : \overline{\eta} \to \eta$ gilt:

$$(R^\nu\overline{j}_*\Lambda)_{\overline{s}} = (R^\nu j_*\pi_{1*}\Lambda)_{\overline{s}} = H^\nu(I, Ind_I(\Lambda))\,,$$

wobei $Ind_I(\Lambda)$ den induzierten Modul bezeichnet. Weiter ist bekanntlich ein induzierter Modul kohomologisch trivial, also $H^\nu(I, Ind_I(\Lambda)) = 0$ für $\nu > 0$, während $H^0(I, Ind_I(\Lambda)) = \Lambda$.

Damit folgt die Behauptung von 10.9 durch Anwenden von $\overline{i}^*$ auf den Basiswechselmorphismus

$$f^*R\overline{j}_*\Lambda_{\overline{\eta}} \longrightarrow R\overline{j}_*f^*_{\overline{\eta}}\Lambda_{\overline{\eta}} \; = \; R\overline{j}_*\overline{j}^*\Lambda_{\overline{X}}\,,$$

denn letzterer ist ein Quasiisomorphismus nach dem glatten Basiswechselsatz, an den wir jetzt erinnern:

KOH 14 Glatter Basiswechsel:Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y' \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm mit quasi-kompaktem π und glattem f. Ist $\mathcal{F}$ eine Torsionsgarbe auf X, deren Torsion prim ist zu $char(X)$ (d.h., für alle $x \in X$ ist $char(k(x)) = 0$ oder die Multiplikation mit $char(k(x))$ ein Isomorphismus auf $\mathcal{F}$), so ist der Basiswechselmorphismus

$$f^* R^i \pi_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i \pi'_* f'^* \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus für alle $i \geq 0$.

Für den Beweis siehe etwa [Mi] VI §4: Im Beweis von Lemma 10.9 ist $f = f$ und $\pi = \overline{j}$.

11 Kohomologie von affinen und projektiven Räumen und Reinheit

In diesem Kapitel leiten wir einige wichtige und von Deligne benötigte Sätze aus dem glatten Basiswechsel ab.

Satz 11.1 (Homotopie-Invarianz) Sei S ein lokal noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine Torsionsgarbe auf S, deren Torsion prim zu den Charakteristiken auf S sind (Ist $U \to S$ étale und $a \in \mathcal{F}(U)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot a = 0$, so ist m invertierbar auf S, d.h., in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, d.h., in $k(s)$ für jedes $s \in S$). Für $\pi : \mathbb{A}^1_S \to S$ ist dann

$$\pi^* : H^i(S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathbb{A}^1_S, \pi^*\mathcal{F})$$

für alle $i \geq 0$ ein Isomorphismus.

(Durch Iteration erhält man hieraus $H^i(S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathbb{A}^n_S, \mathcal{F})$ für alle $i \geq 0$).

Beweis: Durch Betrachtung der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q\pi_*\pi^*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{A}^1_S, \pi^*\mathcal{F})$$

genügt es zu zeigen:

(i) $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{F}$,

(ii) $R^\nu\pi_*\pi^*\mathcal{F} = 0$ für $\nu > 0$ (d.h., $\mathcal{F} \to R\pi_*\pi^*\mathcal{F}$ ist ein Quasiisomorphismus).

Beweis von (i) und (ii): Es genügt, die für eine konstante konstruierbare Garbe $\mathcal{F}$ zu zeigen, also für $\mathbb{Z}/r$ mit r invertierbar auf S. Weiter gilt die Aussage, wenn sie für die Henselisierungen in allen Punkten von S gilt. Wir führen Induktion über die Dimension von S. Sei $S = \mathrm{Spec}(R)$ für einen reduzierten strikt Henselschen Ring mit abgeschlossenem Punkt s, und sei $U = S \smallsetminus \{s\}$. Für $\dim(S) = 0$ ist $R = k$ ein separabler abgeschlossener Körper, und wir erhalten, da r invertierbar in k ist:

$$\begin{array}{rcl} H^0(A^1_k, \mathbb{Z}/r) & = & \mathbb{Z}/r\,, \\ H^1(A^1_k, \mathbb{Z}/r) & \cong & H^1(A^1_k, \mu_r) \xrightarrow{\sim} Pic(A^1_k)[r] = 0\,, \\ H^\nu(A^1_k, \mathbb{Z}/r) & = & 0 \quad \text{für} \quad \nu > 1 \quad \text{schwacher Lefschetz.} \end{array}$$

Für $\dim(S) > 0$ ist $\dim(U) < \dim(S)$ und wir können annehmen, dass die Aussage bereits für $U \overset{j}{\hookrightarrow} S$ bewiesen ist. In dem ausgezeichneten Dreieck

$$\mathbb{Z}/r \to Rj_*j^*\mathbb{Z}/r \to \mathcal{G} \to \tag{11.1.1}$$

ist $\mathcal{G}$ in s konzentriert, und damit ist $\mathcal{G} \to R\pi_*\pi^*\mathcal{G}$ ein Quasiisomorphismus. Es reicht zu zeigen, dass

$$Rj_*j^*\mathbb{Z}/r \to R\pi_*\pi^*Rj_*j^*\mathbb{Z}/r \tag{11.1.2}$$

ein Quasiisomorphismus ist, dann folgt die Behauptung wegen (11.1.1) auch für $\mathbb{Z}/r$. Aber (11.1.2) ist die Komposition von

$$Rj_*j^*\mathcal{F} \underset{\sim}{\overset{(1)}{\to}} Rj_*R\pi_*\pi'^*j^*\mathcal{F} = R\pi'_*Rj'_*\pi'^*j^*\mathcal{F} \underset{\sim}{\overset{(2)}{\to}} R\pi_*\pi^*Rj_*j^*\mathcal{F}$$

($\mathcal{F} = \mathbb{Z}/r$) für das kartesische Diagramm

(11.1.3)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_U \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathbb{A}^1_S \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & S\,. \end{tikzcd}$$

Dabei ist (1) ein Quasiisomorphismus durch Gültigkeit der Behauptung auf U, und (2) ist ein Quasiisomorphismus nach dem glatten Basiswechsel für (11.1.3) (glatter Morphismus $= p$, Strukturmorphismus $= j$).

Wir betrachten nun projektive Räume.

Satz 11.2 Sei $q : P = P^m_S \to S$ der m-dimensionale projektive Raum über dem Schema S, und sei $r \in \mathbb{N}$ invertierbar auf S. Es gibt kanonische Isomorphismen

$$R^i q_* \mathbb{Z}/r \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/r(-j) & , \quad i = 2j \text{ gerade, } 0 \le i \le 2m, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Genauer gilt für $m \ge 1$:
(i) $R^2 q_* \mathbb{Z}/r \cong \mathbb{Z}/r(-1)$, und
(ii) das Cupprodukt induziert einen Isomorphismus $(R^2 q_* \mathbb{Z}/r)^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} R^{2j} q_* \mathbb{Z}/r$ für $j \le m$.

Beweis Die Kummersequenz $0 \to \mu_r \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{r} \mathbb{G}_m \to 0$ liefert ein kanonisches Element $\eta \in H^2(\mathbb{P}^m_S, \mu_r)$, das Bild der Klasse das kanonischen $\mathcal{O}_P$-Moduls $\mathcal{O}(1)$ unter dem Verbindungsmorphismus
$$Pic(P) = H^1(P, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\delta} H^2(P, \mu_r)\,.$$
Bezeichne mit η auch das Bild unter dem kanonischen Morphismus (beachte, dass $R^2 q_* \mu_r$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe $U \mapsto H^2(\mathbb{P}^m_U, \mu_r)$ ist)

$$H^2(P, \mu_r) \to H^0(S, R^2 q_* \mu_r)\,.$$

Wir behaupten, dass $R^2 q_* \mu_r \cong \mathbb{Z}/r$, mit Basis η und $R^i q_* \mathbb{Z}/r = 0$ für i ungerade oder $i > 2m$. Nach dem eigentlichen Basiswechsel genügt es, dies auf den Fasern von q zu beweisen, d.h., für $S = \operatorname{Spec}, k$ k separabel abgeschlossen. Wir haben dann eine Zerlegung

$$H = \mathbb{P}^{m-1}_k \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^m_k \overset{j}{\hookleftarrow} \mathbb{A}^m_k = \mathbb{P}^m_k - H\,,$$

wobei eine Hyperebene im $\mathbb{P}^m_k$ ist. Die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^\nu_c(\mathbb{A}^m_k) \to H^\nu(\mathbb{P}^m_k) \xrightarrow{i^*} H^\nu(\mathbb{P}^{m-1}_k) \to H^{\nu+1}_c(\mathbb{A}^m_k) \to \ldots$$

(konstante Koeffizienten) und die Tatsache, dass kanonisch

$$H^\nu_c(\mathbb{A}^m_k) \cong H^{2m-\nu}(\mathbb{A}^m_k, \mathbb{Z}/r(m))^\vee = \begin{cases} 0 & , \quad \nu \neq 2m \\ \mathbb{Z}/r(-m) & , \quad \nu = 2m \end{cases}$$

nach Poincaré-Dualität und Satz 11.1 ist, zeigen durch Induktion

$$H^2(\mathbb{P}^m_k, \mu_r) \cong \mathbb{Z}/r, \text{ mit Basis } \eta\,,$$

$$H^i(\mathbb{P}^m_k) = \begin{cases} 0 & , \quad i \text{ ungerade oder } i > 0, \\ \mathbb{Z}/r(-j) & , \quad 0 \le i = 2j \le 2m\,. \end{cases}$$

Um (ii) zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $H^{2m}(\mathbb{P}^m_k, \mathbb{Z}/r(m))$ von η^m erzeugt wird. Dies folgt aus der Tatsache, dass $tr(\eta^m) = \deg(\eta^m) = 1$ ist.

Wir kommen nun zur sogenannten Reinheit.

KOH 15= Satz 11.3 (Reinheit): Sei S ein Schema und (Y, X) ein glattes S-Paar der Kodimension c, d.h., man hat ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

wobei f und g glatt sind, und i eine abgeschlossene Immersion derart, dass die geometrischen Fasern $Y_{\overline{s}} \to X_{\overline{s}}$ für alle $s \in S$ konstante Kodimension c haben. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal konstante konstruierbare $\mathbb{Z}/r$-Garbe, r invertierbar auf S. Dann gilt

$$R^\nu i^! \mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \nu \neq 2c, \\ i^*\mathcal{F} \otimes R^{2c} i^! \mathbb{Z}/r \quad , & \nu = 2c. \end{cases}$$

Weiter ist $R^{2c} i^! \mathbb{Z}/r$ (étale) lokal isomorph zu $\mathbb{Z}/r(-c)$ und verträglich mit Basiswechsel auf S.

Äquivalent: Sei $j : U \hookrightarrow X$ das offene Komplement von Y, dann ist $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_* j^* \mathcal{F}$, $R^i j_* j^* \mathcal{F} = 0$ für $i \neq 0, 2c-1$, und $i^* R^{2c-1} j_* j^* \mathcal{F}$ lokal isomorph zu $i^*\mathcal{F}(-c)$, verträglich mit Basiswechsel auf S.

Beweis Die Äquivalenz der Bedingungen folgt aus dem ausgezeichneten Dreieck

$$i_* R i^! \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to R j_* j^* \mathcal{F} \to \ . \tag{11.3.1}$$

Wir zeigen die zweite Version. Die Behauptung ist lokal auf X für die étale Topologie, deswegen ist ohne Einschränkung $\mathcal{F} = \Lambda$ konstant und (Y, X) das glatte S-Paar

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{m-c}_S \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbb{A}^m_S \arrow[dl] \\ & S\,. & \end{tikzcd}$$

Durch Induktion genügt es weiter, den Fall $c = 1$ zu betrachten, und dann kann man als Basis $\mathbb{A}^{m-1}_S$ nehmen, d.h., ohne Einschränkung betrachten wir $S \hookrightarrow \mathbb{A}^1_S$ (den 0-Schnitt). Genauso können wir den Nullschnitt $S \hookrightarrow \mathbb{P}^1_S$ betrachten (beachte, dass für $i : S \xrightarrow{i'} \mathbb{A}^1_S \xrightarrow{j'} \mathbb{P}^1_S$ gilt: $i' = (i')^!(j')^*$), d.h., wir haben die Aussage für das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y = S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "q"] & \mathbb{A}^1_S = U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

zu zeigen.

Dazu betrachten wir die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{s,t} = R^s q_* R^t j_* \Lambda \quad \Rightarrow \quad R^{s+t} p_* \Lambda \,.$$

Für $t > 0$ ist $R^t j_* \Lambda$ in S konzentriert, da dann $j^* R^t j_* \Lambda = 0$ ist (es ist $j^* R j_* \cong \Lambda$). Für $t = 0$ behaupten wir, dass $j_* \Lambda = \Lambda$ ist. Dies kann in den Halmen in geometrischen Punkten $\overline{x}$ von X nachgeprüft werden. Für $\overline{x}$ über U ist die Behauptung klar; sei also $\overline{x}$ über S und $\tilde{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}^h_{X,\overline{x}}$ die strikte Henselisierung von X in x. Dann ist bekanntlich

$$(j_* \Lambda)_{\overline{x}} = H^0(U \times_X \tilde{X}, \Lambda) \,,$$

und es ist zu zeigen, dass $U \times_X \tilde{X}$ zusammenhängend ist. Da wir in $\overline{x}$ henselisiert haben, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \operatorname{Spec}(A)$ affin ist, und die Situation

$$S \overset{i}{\hookrightarrow} A^1_S = \operatorname{Spec}(A[T]) \overset{j}{\hookleftarrow} \mathbb{G}_{m,S} = \operatorname{Spec}(A[T, T^{-1}])$$

betrachten. Dann ist $U \times_X \tilde{X} = \operatorname{Spec}(R[T, T^{-1}])$, wobei $R = \mathcal{O}^h_{X,\overline{x}}$ ist und T auch das Bild von T in R bezeichnet. Da T Nichtnullteiler in R ist, ist $D(T) = \operatorname{Spec}(R[T, T^{-1}])$ dicht in $\operatorname{Spec}(R)$ (Ist $\emptyset \neq D(f) = \operatorname{Spec} R_f$ eine Standard-affine Menge, so ist fT nicht nilpotent, also $\emptyset \neq D(fT) = D(f) \cap D(T)$). Da R zusammenhängend ist, gilt dies also auch für $R[T, T^{-1}]$.

In der obigen Spektralsequenz gilt also $R^s q_* R^t j_* \Lambda = 0$ für $s > 0$ und $t > 0$, da $R^s q_* i_* \mathcal{F} = R^s id_* \mathcal{F} = 0$ für $s > 0$ und jede Garbe $\mathcal{F}$ auf S. Da weiter $R^{s+t} p_* \Lambda = 0$ für $s + t > 0$ nach Satz 10.1, folgt

$$q_* R^t j_* \Lambda \underset{\sim}{\overset{d_{t+1}^{0,t}}{\to}} R^{t+1} q_* (j_* \Lambda) = R^{t+1} q_* \Lambda$$

für $t \geq 1$. Wegen $R^t j_* \Lambda \overset{\sim}{\to} i_* i^* R^t j_* \Lambda \, (t \geq 1)$ folgt hieraus

$$i^* R^t j_* \Lambda \overset{\sim}{\to} R^{t+1} q_* \Lambda \cong \begin{cases} \Lambda(-1) & t = 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

nach Satz 11.2, und damit die Behauptung – die Basiswechseleigenschaft folgt daraus, dass $R^t j_* \Lambda$ universell (d.h., in einer beliebigen durch Basiswechsel erhaltenen Situation $U' \hookrightarrow X'$) lokal konstruierbar ist (vergleiche [Mi] VI Beweis von 2.3, V 1.7).

Bemerkung 11.4 Ist in der Situation von 11.3 $S = \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k, so kann man zeigen, dass kanonisch

$$R^{2c} i' \Lambda \cong \Lambda(-c)$$

ist. Dies liefert einen kanonischen Isomorphismus $\Lambda \overset{\sim}{\to} R^{2c} i' \Lambda(c)$, bzw. ein kanonisches Element in $H^0(Y, R^{2c} i' \Lambda(c))$ welches man auch die lokale Zykelklasse von Y nennt.