Algebraische Geometrie II

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

0 Erinnerung **1**

1 Verkleben und Faserprodukte **3**

1.A Darstellbare Funktoren und Limiten **16**

2 Endlichkeitseigenschaften von Schemata und Schema-Morphismen **27**

3 Garben **33**

3.A Adjungierte Funktoren und abelsche Kategorien **46**

4 Quasi-kohärente Modulgarben **54**

5 Tensorprodukte, Pushforwards und Pullbacks von $\mathcal{O}_X$-Moduln **62**

5.A Direkte Bilder von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln **70**

6 Abgeschlossene Unterschemata **72**

7 Divisoren und invertierbare Moduln **79**

7.A Diskrete Bewertungsringe **93**

8 Projektive Schemata und Aufblasungen **95**

8.A Projektive Schemata und homogene Ideale **116**

0 Erinnerung

0.1 Ein lokal geringter Raum ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$, so dass die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ lokale Ringe sind.

0.2 Ein Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von lokal geringten Räumen ist ein Paar $(f, f^\sharp)$ wobei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist und

$$f^\sharp \; : \; \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$$

ein Morphismus von Ringgarben, so dass für jedes $x \in X$ die kanonisch induzierte Abbildung

$$f_x^\sharp \; : \; \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

ein Homomorphismus von lokalen Ringen ist ($f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$).

0.3 Für jeden Ring A erhält man einen lokal geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei $X = \mathrm{Spec}(A)$ mit der Zariski-Topologie ist, und die Garbe $\mathcal{O}_X$ die beiden folgenden Eigenschaften hat

$$\begin{array}{rclcr} \mathcal{O}_X(D(f)) & = & A_f & \text{für} & f \in A \\ \mathcal{O}_{X,x} & = & A_\mathfrak{p} & \text{für} & x = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\,. \end{array}$$

0.4 Affine Schemata sind lokal-geringte Räume, die isomorph zu einem solchen $(X, \mathcal{O}_X)$ sind.

0.5 Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt Schema, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, so dass $(U, \mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U)$ ein affines Schema ist.

0.6 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein affines Schema, isomorph zu $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Hom((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) & \to & Hom(A, \mathcal{O}_X(X)) \\ (f, f^\sharp) & \mapsto & f_Y^\sharp : A = \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X) \end{array}$$

eine Bijektion (Alg.Geo. I, 10.1).

0.7 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subseteq X$ beliebig offen, so ist $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein Schema (Alg.Geo I, 10.6) und heißt offenes Unterschema. Man hat einen Morphismus $j : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$.

0.8 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Schemata (oder lokal geringte Räume). Ist $V \subseteq Y$ offen, so hat man eine Bijektion

$$Hom((X, \mathcal{O}_X), (V, \mathcal{O}_V)) = \{g : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y) \mid g(X) \subseteq V\}$$

$$f \mapsto jf\,,$$

wobei $j : (V, \mathcal{O}_V) \hookrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ der kanonische Morphismus ist (Alg.Geo. I. 10.7).

Im Folgenden lassen wir meist die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ in den Bezeichnungen weg und schreiben nur X statt $(X, \mathcal{O}_X)$.

0.9 Sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben von abelschen Gruppen auf X. Dann hat man eine Garbe $\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ von abelschen Gruppen auf X, definiert durch

$$\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \quad = \quad Hom_U(\mathcal{F}_{|_U}, \mathcal{G}_{|_U}),$$

wobei rechts die Gruppe der Morphismen von Garben auf U steht (Alg.Geo. I, Übungsblatt 13, Aufgabe 1). Entsprechendes gilt auch für Garben von Ringen, wobei dann aber $\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nur noch eine Garbe von Mengen ist (selbst überlegen!).

0.10 Sind X und Y Schemata, so ist die Zuordnung

$$U \mapsto Hom(U, Y) \quad , \quad U \subseteq X \text{ offen}$$

mit den Restriktionsabbildungen

$$\begin{array}{rcl} Hom(U, Y) & \rightarrow & Hom(U', Y) \quad , \quad U' \subseteq U \\ f & \mapsto & f_{|_{U'}} \end{array}$$

eine Garbe von Mengen. Das heißt: Ist $U \subseteq X$ offen und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U, so gilt

(a) Sind $f, g : U \rightarrow Y$ Morphismen mit $f_{|_{U_i}} = g_{|_{U_i}}$ für alle $i \in I$, so ist $f = g$.

(b) Sind $f_i \ : \ U_i \rightarrow Y$ Morphismen ($i \in I$) mit

$$f_i{}_{|_{U_i \cap U_j}} \ = \ f_j{}_{|_{U_i \cap U_j}} \qquad \forall\, i, j \in I\,,$$

so gibt es einen (nach (a) eindeutig bestimmten) Morphismus $f : U \rightarrow Y$ mit

$$f_{|_{U_i}} \ = \ f_i \qquad \forall\, i \in I$$

(Alg.Geo. I, Übungsblatt 13, Aufgabe 2).

1 Verkleben und Faserprodukte

Satz 1.1 (Verkleben von Garben) Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Es seien gegeben
(i) für jedes $i \in I$ eine Garbe (von Mengen) $\mathcal{F}_i$,
(ii) für alle $i, j \in I$ ein Isomorphismus von Garben

$$\varphi_{ij} \ : \ \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \ ,$$

mit $U_{ij} = U_i \cap U_j$, so dass gilt
(iii) $\varphi_{ii} \ = \ id_{\mathcal{F}_i}$,
(iv) (Kozykelbedingung) für alle i, j, k:

$$\varphi_{ik}|_{U_{ijk}} \ = \ \varphi_{ik}|_{U_{ijk}} \ \circ \ \varphi_{ij}|_{U_{ijk}} \ ,$$

wobei $U_{ijk} \ := \ U_i \cap U_j \cap U_k$. Dann gibt eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X und Isomorphismen

$$\psi_i \ : \ \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$$

mit

(v) $$\psi_j|_{U_{ij}} \ = \ \varphi_{ij} \circ \psi_i|_{U_{ij}} \quad \text{für alle } i, j \in I \, .$$

Diese Garbe $\mathcal{F}$ ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig: Gibt es eine zweite Garbe $\mathcal{F}'$ mir entsprechenden Isomorphismen ψ_i', so gibt es genau einen Isomorphismus

$$\alpha \ : \ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \, ,$$

der für jedes $i \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}|_{U_i} \arrow[rr, "\alpha|_{U_i}"] \arrow[dr, "\psi_i"', "\sim"] & & \mathcal{F}'|_{U_i} \arrow[dl, "\psi_i'", "\sim"'] \\ & \mathcal{F}_i & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis (a) Existenz: Für jedes $U \subseteq X$ offen definiere

$$\mathcal{F}(U) = \{(s_i) \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \mid \ \forall\, i, j \in I \quad \text{gilt} \quad s_j|_{U\cap U_{ij}} = \varphi_{ij,U\cap U_{ij}}(s_i|_{U\cap U_{ij}})\} \, .$$

Die Restriktionen für die $\mathcal{F}_i$ definieren dann Restriktionen für $\mathcal{F}$, und man überprüft ohne Schwierigkeiten, dass $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Der Garbenmorphismus $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_{ij}} \to \mathcal{F}_i$ ist definiert durch

$$\begin{array}{rccc} \psi_{i,U} & : & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}_i(U) \\ & & (s_j)_{j\in I} & \mapsto & s_i \end{array}$$

für $U \subseteq U_i$ offen, und diese Abbildung ist bijektiv: Definiere die Umkehrabbildung $\varphi_{i,U}$ durch

$$\varphi_{i,U}(s_i) \ = \ (s_j)_{j\in I} \, , \ \text{mit}$$

$$s_j \;=\; \varphi_{ij,U\cap U_j}(s_i|_{U\cap U_j}) \in \mathcal{F}_j(U\cap U_j)$$

für $s_i \in \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U\cap U_i)$ (Dies ist wohldefiniert und invers zu $\psi_{i,U}$ nach (iii) und (iv)). Die Eigenschaft (v) ist klar.

(b) Eindeutigkeit: Da $\alpha|_{U_i}$ eindeutig festgelegt ist, folgt die Existenz von α aus der Garbeneigenschaft von $\underline{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ (siehe 0.10).

Bemerkung 1.2 Der Satz gilt entsprechend für Garben von Gruppen, bzw. von Ringen, wobei die f_{ij}, ψ_i und α entsprechende Morphismen sind.

Satz 1.3 (Verkleben von (lokal) geringten Räumen) Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von (lokal) geringten Räumen, und seien gegeben:
(i) für alle $i,j \in I$ offene Mengen $V_{ij} \subseteq V_i$,
(ii) für alle $i,j \in I$ Isomorphismen von (lokal) geringten Räumen

$$f_{ij} \,.\, V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$$

wobei gilt
(iii) $V_{ii} = V_i$ und $f_{ii} = id_{V_{ii}}$,
(iv) $f_{ij}(V_{ij}\cap V_{ik}) = (V_{ji}\cap V_{jk})$ und $f_{ik} = f_{ik}\circ f_{ij}$ auf $V_{ij}\cap V_{ik}$.
Dann gibt es einen (lokal) geringten Raum X, eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X und Isomorphismen von (lokal) geringten Räumen

$$g_i \;:\; V_i \xrightarrow{\sim} U_i$$

so dass gilt

$$\text{(v)}\qquad \begin{array}{rcl} V_{ij} &=& g_i^{-1}(U_i\cap U_j) \quad \text{und} \\ f_{ij} &=& g_j^{-1}|_{U_j\cap U_i}\circ g_i|_{V_{ij}} \quad (= (g_j|_{V_{ji}})^{-1}\circ g_i|_{V_{ij}})\,. \end{array}$$

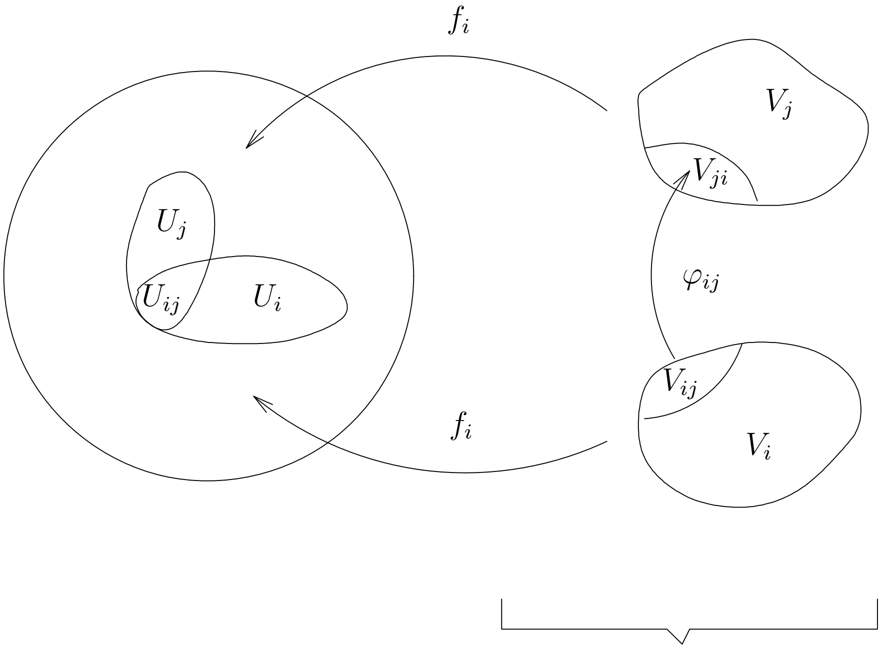
Dieser (lokal) geringte Raum X ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig: Gibt es einen zweiten (lokal) geringten Raum X' mit entsprechenden Isomorphismen $g_i' : V_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subseteq X_i$, so gibt es genau einen Isomorphismus von (lokal) geringten Räumen

$$h \;:\; X \to X'$$

so dass für alle $i \in I$ gilt: $h(U_i) = U_i'$, und das Diagramm

$$h|_{U_i} \qquad : \qquad \begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, "\sim"] & & U_i' \\ & V_i \arrow[ul, "g_i"] \arrow[ur, "g_i'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.



Diese Daten reichen, um
X zu definieren

Beweis: (a) Konstruktion von X: Setze

$$X \;=\; \Big(\coprod_{i\in I} V_i\Big) \,/\sim,$$

wobei $\coprod V_i$ die disjunkte Vereinigung der V_i ist und $\sim$ die folgende Äquivalenzrelation

$$x_i \sim x_j \quad :\Leftrightarrow \quad x_i \in V_{ij} \quad \text{und} \quad f_{ij}(x_i) = x_j$$

für $x_i \in V_i$ und $x_j \in V_j$ (in X werden also x_i und x_j identifiziert). Weiter sei $\coprod_i V_i$ mit der Summentopologie versehen ($U' \subseteq \coprod_i V_i$ offen $\Leftrightarrow$ $U' \cap V_i$ offen für alle $i \in I$) und X mit der Quotiententopologie ($U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow$ das Urbild von U unter der kanonischen Surjektion $p : \coprod_i V_i \twoheadrightarrow X$ ist offen). Sei

$$\begin{array}{rccccc} g_i & : & V_i & \to & \coprod\limits_{i\in I} V_i \stackrel{p}{\to} & X \\ & & x_i & & \mapsto & \text{Klasse von } x_i \end{array}$$

die kanonische Abbildung. Dann ist g_i injektiv (dies folgt aus Eigenschaft (iii)) und stetig. Genauer ist eine Menge $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn $g_i^{-1}(U)$ offen für alle $i \in I$ ist (Übungsaufgabe). Insbesondere ist

$$U_i \;:=\; g_i(V_i)$$

offen in X, und

$$g_i \,:\, V_i \xrightarrow{\sim} U_i$$

ein Homöomorphismus. Weiter ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und es gelten die Eigenschaften (v), d.h.,

$$V_{ij} \;=\; g_i^{-1}(U_i \cap U_j) \quad \text{und} \quad f_{ig} \;=\; g_j^{-1}|_{U_i\cap U_j} \circ g_i|_{V_{ij}}\,.$$

Wir definieren nun die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ durch Verklebung der Ringgarben

$$\mathcal{O}_i \;:=\; (g_i)_*\mathcal{O}_{V_i} \quad \text{auf } U_i$$

mittels der Isomorphismen

$$\varphi_{ij} \;:\; \mathcal{O}_i|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_j|_{U_i\cap U_j}\,,$$

die die Inversen zu den Isomorphismen

$$\mathcal{O}_j|_{U_i\cap U_j} \;=\; (g_j)_*\mathcal{O}_{V_{ji}} \xrightarrow{(g_j)_*(f_{ij}^\sharp)} (g_j)_*(f_{ij})_*\mathcal{O}_{V_{ij}} = (g_i)_*\mathcal{O}_{V_{ij}}$$

sind. Dies liefert den gewünschten lokal geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, zusammen mit den Isomorphismen

$$(g_i, g_i^\sharp) \;:\; (V_i, \mathcal{O}_{V_i}) \xrightarrow{\sim} (U_i, \mathcal{O}_{U_i})\,,$$

mit

$$g_i^\sharp \;:\; \mathcal{O}_{U_i} \;\cong\; \mathcal{O}_i \;=\; (g_i)_*\mathcal{O}_{V_i}\,.$$

(b) Eindeutigkeit : selbst.

Bemerkung 1.4 Sind in 1.3 alle V_i Schemata, so ist X offenbar ein Schema.

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff des Faserprodukts.

Satz 1.5 Sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

von Morphismen von Schemata gegeben. Dann existiert ein Schema $X \times_S Y$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: Ist Z ein Schema und sind $f : Z \to X$ $g : Z \to Y$ Morphismen mit $\alpha f = \beta g$, so gibt es genau einen Morphismus $h : Z \to X \times_S Y$ mit $f = pr_1 h$ und $g = pr_2 h$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S\,. \end{tikzcd}$$

$X \times_S Y$ heißt das **Faserprodukt** von X und Y über S, und der zu f und g assoziierte Morphismus h wird auch mit (f, g) bezeichnet. Die Morphismen pr_1 und pr_2 heißen die erste bzw. zweite Projektion.

Definition 1.6 Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

heißt **kartesisch**, wenn der induzierte Morphismus

$$Z \to X \times_S Y$$

ein Isomorphismus ist. Der Morphismus α' heißt der **Basiswechsel** von α mit β (entsprechend heißt β der Basiswechsel von β mit α).

Bemerkungen 1.7 (a) Für ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

von Abbildungen von **Mengen** definiert man das Faserprodukt von M und N über T als

$$M \times_T N \ := \ \{(m,n) \in M \times N \mid \alpha(m) = \beta(n)\}\,.$$

Es hat eine entsprechende universelle Eigenschaft für Abbildungen von Mengen. Die universelle Eigenschaft von 1.5 ist dann äquivalent dazu, dass für jedes Schema Z die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Hom(Z, X \times_S Y) & \to & Hom(Z,X) \times_{Hom(Z,S)} Hom(Z,Y) \\ h & \mapsto & (pr_1 \circ h,\, pr_2 \circ h) \end{array}$$

bijektiv ist. Hierdurch sind auch pr_1 und pr_2 bestimmt (betrachte $Z = X \times_S Y$ und $h = id$).

(b) Warnung: für Schemata ist der unterliegende topologische Raum von $X \times_S Y$ im Allgemeinen nicht gleich dem Faserprodukt der topologischen Räume!

Beweis von Satz 1.5: Wir benötigen einige Lemmata, die auch für sich von Interesse sind.

Lemma 1.8 Wenn das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert, so ist es bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

Beweis Dies folgt wie bei allen universellen Problemen (siehe auch den Anhang 1.A): Ist Z_0 eine weitere Lösung des universellen Problems, so betrachte die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S\,. \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $X \times_S Y$ liefert einen kanonischen Morphismus

$$\alpha \ : \ Z_0 \to X \times_S Y\,,$$

und die universelle Eigenschaft von Z_0 liefert einen kanonischen Morphismus

$$\beta \;:\; X \times_S Y \to Z_0\,.$$

Ebenfalls liefern die universellen Eigenschaften, dass

$$\beta \circ \alpha = id_{Z_0} \quad \text{und} \quad \alpha \circ \beta = id_{X \times_S Y}\,.$$

Lemma 1.9 Sind $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ und $S = \operatorname{Spec}(R)$ alle affin, so ist

$$X \times_S Y \;=\; \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)\,,$$

mit den Projektionen

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(B) \\ \operatorname{Spec}(A) & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

die durch die Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A \otimes_R B \\ a & \mapsto & a \otimes 1 \end{array} \;,\; \begin{array}{ccc} B & \to & A \otimes_R B \\ b & \mapsto & 1 \otimes b \end{array} \tag{1.2}$$

gegeben sind.

Beweis: Dies folgt aus 0.6 (und Bemerkung 1.7): Ist Z ein beliebiges Schema, so gilt:

$$\begin{aligned} & Hom(Z, \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)) \\ \cong\; & Hom_{\text{Ringe}}(A \otimes_R B, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) && \text{(nach 0.6)} \\ \overset{(*)}{\cong}\; & Hom(A, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \times_{Hom(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_X))} Hom(B, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \\ & \text{(universelle Eingenschaft des Tensorprodukts, siehe Alg.Geo I, 1.A.11)} \\ \cong\; & Hom(Z, \operatorname{Spec}(A)) \times_{Hom(Z\,\operatorname{Spec} R)} Hom(Y, \operatorname{Spec} R) && \text{(nach 0.6)}\,, \end{aligned}$$

wobei $(*)$ durch die Abbildungen (1.2) gegeben ist. $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ hat also die universelle Eigenschaft des Faserprodukts, mit den Projektionen (1.1).

Lemma 1.10 Existiert $X \times_S Y$ und ist $U \subseteq X$ offen, so ist

$$U \times_S Y \;=\; pr_1^{-1}(U)\,,$$

wobei $pr_1 \;:\; X \times_S Y \to X$ die erste Projektion ist. Entsprechendes gilt für $V \subseteq Y$ offen und pr_2.

Beweis Es ist

$$\begin{aligned}
& Hom(Z, pr_1^{-1}(U)) \\
= \;& \{f \in Hom(Z, X \times_S Y) \mid f(Z) \subseteq pr_1^{-1}(U)\} \\
& \text{(universelle Eigenschaft offener Unterschemata, 0.8)} \\
= \;& \{f \in Hom(Z, X \times_S Y) \mid (pr_1 \circ f)(Z) \subseteq U\} \\
= \;& \{f \in Hom(Z, X \times_S Y) \mid pr_1 \circ f \in Hom(Z, U)\} \\
& \text{(universelle Eigenschaft offener Unterschemata)} \\
= \;& Hom(Z, U) \times_{Hom(Z,X)} Hom(Z, X \times_S Y) \\
= \;& Hom(Z, U) \times_{Hom(Z,X)} \times (Hom(Z, X) \times_{Hom(Z,S)} Hom(Z, Y)) \\
& \text{(universelle Eigenschaft des Faserprodukts)} \\
= \;& Hom(Z, U) \times_{Hom(Z,S)} Hom(Z, Y)\,.
\end{aligned}$$

$pr_1^{-1}(U)$ hat also die universelle Eigenschaft von $U \times_S Y$.

Lemma 1.11 Faktorisieren die Morphismen

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "\alpha"] & S
\end{tikzcd}$$

beide über eine offene Menge $U \subseteq S$, d.h., gilt $\alpha(X) \subseteq U$, $\beta(Y) \subseteq U$, so ist kanonisch

$$X \times_S Y \;=\; X \times_U Y\,.$$

Beweis Nach der universellen Eigenschaft von offenen Unterschemata sind die universellen Eigenschaften für beide Seiten die gleichen.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis der Existenz des Faserprodukts. Seien Morphismen $\alpha : X \to S$ und $\beta : Y \to S$ gegeben.

Schritt 1 Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Existiert $X_i \times_S Y$ für alle $i \in I$, so existiert auch $X \times_S Y$.

Beweis Sei $p_i : X_i \times_S Y \to X_i$ die Projektion und

$$U_{ij} = p_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subseteq X_i \times_S Y$$

für alle $(i, j) \in I^2$. Nach Lemma 1.10 ist

$$U_{ij} = (X_i \cap X_j) \times_S Y$$

ein (das) Faserprodukt von $X_i \cap X_j$ und Y über S. Das gleiche gilt aber auch für $U_{ji} \subseteq X_j \times_S Y$. Nach Lemma 1.8 gibt es also einen kanonischen Isomorphismus (von Schemata)

$$f_{ij} \;:\; U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}\,.$$

Wegen Lemma 1.8 und der Eindeutigkeit des Faserprodukts gelten auch die Kozykelbedingungen (iii) und (iv) aus Satz 1.3. Daher können wir die Schemata $X_i \times_S Y$ entlang (mittels) der f_{ij} zu einem Schema Z_0 verkleben, welches eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ besitzt mit $U_i \cong X_i \times_S Y$.

Behauptung Z_0 ist ein Faserprodukt für X und Y, d.h., $Z_0 = X \times_S Y$.

Beweis Mit der Garbeneigenschaft von Morphismen erhält man aus den Projektionen

$$X \supseteq X_i \;\leftarrow\; U_i \;=\; X_i \times_S Y \;\rightarrow\; Y \tag{1.3}$$

auch Projektionen

$$X \xleftarrow{p} Z_0 \xrightarrow{q} Y\,. \tag{1.4}$$

Diese sind mit den Morphismen α und β nach S verträglich, weil das für die Morphismen (1.3) gilt. Wir zeigen die universelle Eigenschaft: Ist Z ein Schema, und sind $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ zwei Morphismen mit $\alpha f = \beta g$, so sei $Z_i = f^{-1}(X_i)$; dies ist ein offenes Unterschema von Z. Nach Eigenschaft des Faserproduktes erhalten wir aus g und den Morphismen $f_i : Z_i \to X_i$ Morphismen

$$h_i \;:\; Z_i \;\to\; X_i \times_S Y$$

mit $pr_1\, h_i = f_i$ und $pr_2\, h_i = g|_{Z_i}$ und durch Komposition mit der Inklusion $X_i \times_S Y \subseteq Z_0$ auch Morphismen

$$h_i \;:\; Z_i \;\to\; Z_0$$

mit $p\, h_i = f_i$ und $q\, h_i = g|_{Z_i}$. Wegen der Eindeutigkeit der h_i ist

$$h_i|_{Z_i\cap Z_j} \;=\; h_j|_{Z_i\cap Z_j}\,.$$

Also verkleben sich die h_i zu einem Morphismus

$$h \;:\; Z \;\to\; Z_0$$

(siehe 0.10) für den (wieder nach 0.10) gilt

$$p\,h = f \quad \text{und} \quad g\,h = g\,.$$

Weiter ist h eindeutig mit dieser Eigenschaft, da h auf den Z_i eindeutig ist.

Schritt 2 Nach Lemma 1.9 existiert $X \times_S Y$, wenn X, Y und S affin sind.

Schritt 3 Durch Betrachtung einer affinen offenen Überdeckung von X folgt mit Schritt 1, dass $X \times_S Y$ existiert, falls Y und S affin sind.

Schritt 4 Genauso folgt nun, dass $X \times_S Y$ existiert, wenn S affin ist.

Schritt 5 Seien nun X, Y und S beliebig, und sei $(S_i)_{i\in I}$ eine affine offene Überdeckung von S. Sei $X_i = \alpha^{-1}(S_i)$ und $Y_i = \beta^{-1}(S_i)$. Nach Schritt 4 existiert $X_i \times_{S_i} Y_i$, und nach Lemma 1.11 ist

$$X_i \times_{S_i} Y_i \;=\; X_i \times_S Y_i$$

für alle $i \in I$. Weiter ist

$$X_i \times_S Y_i = X \times_S Y_i$$

für alle $i \in I$. Sind nämlich $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y_i$ Morphismen, so dass $\alpha f = \beta|_{Y_i} g$, so folgt $(\beta g)(Z) \subseteq S_i$ und damit auch $(af)(Z) \subseteq S_i$, d.h., $f(Z) \subseteq Z_i$. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr] \arrow[dddr, bend right, "f"'] & & \\
& X_i \times_S Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[ddd] \\
& X_i \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
& X \arrow[r] & S \, ,
\end{tikzcd}$$

in dem der Morphismus h nach der universellen Eigenschaft von $X_i \times_S Y_i$ existiert. Letzteres Schema erfüllt also die universelle Eigenschaft von

$$X \times_S Y_i \, .$$

Dieses Faserprodukt existiert also für alle $i \in I$, und wieder mit Schritt 1 existiert also

$$X \times_S Y \, .$$

Damit ist Satz 1.5 bewiesen.

Wir kommen nun zu einer Hauptanwendung des Faserprodukts, nämlich den Fasern von Morphismen. Wir brauchen eine Vorbereitung.

Lemma 1.12 Sei X ein Schema und $x \in X$. Dann gibt es kanonische Morphismen

$$i_x \; : \; \mathrm{Spec}(k(x)) \; \to \; \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \; \overset{\alpha_x}{\to} \; X \, ,$$

der den einzigen Punkt $*$ von $\mathrm{Spec}(k(x))$ auf $x \in X$ schickt.

Beweis Der erste Morphismus entspricht dem Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \; = \; k(x) \, .$$

Er sendet $*$ auf den abgeschlossenen Punkt von $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ (d.h., das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$). Sei $U = \mathrm{Spec}(A)$ eine affine offene Umgebung von x. Dann sei der zweite Morphismus α_x als die Komposition

$$\alpha_x \; : \; \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \; \to \; U \; \overset{j}{\hookrightarrow} \; X$$

definiert, wobei der erste Morphismus dem Ringhomomorphismus $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ entspricht. Nach Definition des Halms hat man einen solchen Ringhomomorphismus, und α_x hängt nicht von der Wahl der (affinen offenen) Umgebung U ab. Ist nämlich U' eine zweite

Wahl, so gibt es eine affine offene Umgebung U'' von x mit $U'' \subseteq U, U'$. Die Eindeutigkeit folgt dann aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dr, hook, "j"] & \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] & U' \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & X\,, \\ & & U' \arrow[ur, hook, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

wobei die obere Verknüpfung α_x ist und die untere der entsprechende Morphismus für U'. Schließlich ist klar, dass α_x das Ideal $\mathfrak{m}_x$ auf x abbildet.

Satz/Definition 1.13 (Fasern von Morphismen) Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata, und sei $s \in S$. Dann heißt

$$X_s \;:=\; X \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$$

die **schematheoretische Faser** von f über s. Die kanonische Abbildung $pr_1 : X_s \to X$ induziert einen Homöomorphismus

$$\varphi \;:\; X_s \;\to\; f^{-1}(s)$$

auf die mengentheoretische Faser über s der stetigen Abbildung $f : X \to S$.

Beweis der Behauptung:

1) $pr_1(X_s) \subseteq f^{-1}(s)$:

Dies folgt aus den kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathrm{Spec}(k(s)) \arrow[d, "i_s"] & * \arrow[d, mapsto] \\ X \arrow[r, "f"] & S & s \end{tikzcd} \quad .$$

2) Die induzierte stetige Abbildung

$$pr_1 \;:\; X_s \;\to\; f^{-1}(s)$$

ist ein Homöomorphismus:

Da $f^{-1}(s) \subseteq X$ die Relativtopologie trägt, genügt es hierfür zu zeigen: Es gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X, so dass für alle $i \in I$ die von pr_1 induzierte Abbildung

$$pr_1^{-1}(U_i) \;\to\; f^{-1}(s) \cap U_i$$

ein Homöomorphismus ist.

Für $U \subseteq X$ offen und den induzierten Morphismus $f_U : U \to S$ gilt aber $f^{-1}(s) \cap U = f_U^{-1}(s)$ und $pr_1^{-1}(U) = U_s$ (nach Lemma 1.10). Es genügt also zu zeigen, dass jedes $x \in X_s$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, so dass Behauptung 2) für $U \to S$ gilt. Ist nun $x \in X$ mit

$f(x) = s$, so gibt es eine affine offene Umgebung V von s und eine affine offene Umgebung U von x in $f^{-1}(V)$, und nach Lemma 1.11 können wir $U \to S$ durch $U \to V$ ersetzen.

Es sind also ohne Einschränkung $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $S = \mathrm{Spec}(R)$ beide affin, und s durch das Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ gegeben. Dann ist aber nach Lemma 1.9

$$X_s \;=\; \mathrm{Spec}(A \otimes_R k(\mathfrak{p}))\,,$$

und die Behauptung folgt aus Alg. Geo. I Corollar 5.19.

Wir notieren noch einige Eigenschaften des Faserprodukts.

Lemma 1.14 (a) (Kommutativität) Für S-Schemata X und Y hat man einen kanonischen Isomorphismus von S-Schemata

$$X \times_S Y \;\cong\; Y \times_S X\,.$$

(b) (Assoziativität) Für S-Schemata X, Y und Z hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$(X \times_S Y) \times_S Z \;\cong\; X \times_S (Y \times_S Z)\,.$$

(c) (Transivität/Kürzbarkeit) Für ein Diagramm von Schemata

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$X' \times_X (X \times_S Y) \;\cong\; X' \times_S Y\,.$$

(d) (Funktorialität) Sind $f : X \to X'$ und $f : Y \to Y'$ Morphismen von S-Schemata, so induzieren diese einen eindeutig bestimmten Morphismus von S-Schemata

$$f \times g \;:\; X \times_S Y \to X' \times_S Y'\,,$$

der die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & X' \times_S Y' \arrow[d, "pr_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d, "pr_2"'] & X' \times_S Y' \arrow[d, "pr_2"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis: Dies gilt in jeder Kategorie, in der Faserprodukte existieren und folgt aus der universellen Eigenschaft.

Für affine Schemata benutzt man auch Bezeichnungen wie $X \times_R Y$ statt $X \times_{\mathrm{Spec}(R)} Y$ oder $X \times_R R'$ statt $X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R')$, falls R' eine R-Algebra ist. Im letzteren Fall schreibt man manchmal noch kürzer $X_{R'}$ für den Basiswechsel von R nach R' (also von $\mathrm{Spec}(R)$ nach $\mathrm{Spec}(R')$).

Bemerkungen 1.15 Für jedes Schema X gibt es genau einen Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, nämlich den, der (vermöge 0.6) dem kanonischen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ entspricht.

Hier und im Folgenden benutzen wir die

Bezeichnung 1.16 Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Für $U \subseteq X$ offen schreiben wir auch

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \ := \ \mathcal{F}(U)$$

für die Menge der Schnitte von $\mathcal{F}$ über U.

Definition 1.17 Sei S ein Schema und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Der n-dimensionale **affine Raum** über S wird definiert als das S-Schema

$$\mathbb{A}^n_S \ := \ \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S \quad (:= \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} S)\,.$$

(b) Der n-dimensionale **projektive Raum** über S wird definiert als das S-Schema

$$\mathbb{P}^n_S \ := \ \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S \quad (:= \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} S)\,.$$

Für $S = \mathrm{Spec}(R)$ ist offenbar

$$\mathbb{A}^n_S \ = \ Spec(\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \mathrm{Spec}(R[X_1, \ldots, X_n]) \overset{(*)}{=} \mathbb{A}^n_R$$

wobei $(*)$ die Definition nach Alg. Geo. I 10.17 ist.

Ebenso gilt

Lemma 1.18 Für $S = \mathrm{Spec}(R)$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{P}^n_S \ \cong \ \mathbb{P}^n_R\,,$$

wobei $\mathbb{P}^n_R$ wie in Alg. Geo. I 10.16 definiert ist, nämlich als $\mathbb{P}^n_R = Proj(R[X_0, \ldots, X_n])$.

Dies folgt aus dem folgenden allgemeineren Lemma (durch Anwendung auf $A = \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]$ und $\mathbb{Z} \to R$).

Lemma 1.19 Sei R ein Ring, $A = \bigoplus\limits_{n \geq 0} A_n$ eine graduierte R-Algebra und $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus (von R-Schemata)

$$Proj(A \otimes_R R') \ \cong \ Proj(A) \times_R R'\,.$$

Beweis Für jedes homogene $f \in A$ hat man kanonische Isomorphismen von Schemata

$$\begin{aligned} D_+(f \otimes 1) \ &\cong \ \mathrm{Spec}((A \otimes_R R')_{(f \otimes 1)}) \\ &\cong \ \mathrm{Spec}(A_{(f)} \otimes_R R') \\ &\cong \ \mathrm{Spec}(A_{(f)}) \times_R R' \ \cong \ D_+(f) \times_R R' \end{aligned}$$

für die Standard-offenen Mengen $D_+(f \otimes 1) \subseteq Proj(A \otimes_R R')$ und $D_+(f) \subseteq Proj(A)$. Diese Isomorphismen verkleben sich kanonisch zu dem gewünschten Isomorphismus.

Man beachte: Ist $(f_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem der R-Algebra A aus homogenen Elementen, so ist $(f_i)_{i \in I}$ auch ein Erzeugendensystem der graduierten R'-Algebra A'. Die Mengen $D_+(f)$, bzw. $D_+(f \otimes 1)$, bzw. $D_+(f) \times_R R'$ bilden also Überdeckungen von $Proj(A)$, bzw. $Proj(A \otimes_R R')$ bzw. $Proj(A) \times_R R'$.

1.A Darstellbare Funktoren und Limiten

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Definition 1.A.1 (a) Ein kontravarianter Funktor

$$F : \mathcal{C} \to \underline{Sets}$$

heißt **darstellbar**, wenn es ein Objekt X in $\mathcal{C}$ gibt, so dass F isomorph zum kontravarianten Hom-Funktor (siehe Alg. Geo. I 9.A.21)

$$\begin{array}{rcrcl} h_X = Hom_{\mathcal{C}}(-,X) & : & \mathcal{C} & \to & \underline{Sets} \\ & & A & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}}(A,X) \end{array}$$

ist, d.h., wenn es einen in A funktoriellen Isomorphismus

$$F(A) \;=\; Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$$

gibt.

(b) Ein kovarianter Funktor

$$G : \mathcal{C} \to \underline{Sets}$$

heißt **darstellbar**, wenn er isomorph zum kovarianten Homfunktor

$$\begin{array}{rcrcl} h^X = Hom_{\mathcal{C}}(X,-) & : & \mathcal{C} & \to & \underline{Sets} \\ & & A & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}}(X,A) \end{array}$$

für ein Objekt X in $\mathcal{C}$ ist, d.h., wenn es eine funktorielle Bijektion

$$G(A) \;=\; Hom_{\mathcal{C}}(X,A)$$

gibt.

Nach Definition sind h_X und h^X darstellbar. In der Situation von 1.A.1(a) (bzw. (b)) heißt X **darstellendes Objekt** für F (bzw. G). Das Objekt X ist – wenn es existiert – jeweils bis auf Isomorphie eindeutig: Dies folgt aus dem berühmten

Lemma 1.A.2 (Yoneda-Lemma) (a) Ist

$$F : \mathcal{C} \to \underline{Sets}$$

ein kontravarianter Funktor, so hat man für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ eine kanonische Bijektion

$$\begin{array}{rcrcl} e_X & : & Hom(h_X,F) & \xrightarrow{\sim} & F(X) \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi_X(id_X)\,. \end{array}$$

(b) Ist

$$\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \underline{Sets}$$

ein kovarianter Funktor, so hat man für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$ eine kanonische Bijektion

$$\begin{array}{rcrcl} e_Y & : & Hom(h^Y,G) & \xrightarrow{\sim} & G(Y) \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi_Y(id_Y)\,. \end{array}$$

Beweis (a): Die Umkehrabbildung m_X ordnet einem Element $a \in F(X)$ den folgenden Morphismus $m_X(a) := \varphi^a$ von Funktoren zu

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi^a_A & : & h_X(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,X) & \to & F(A) \\ & & f & \mapsto & \varphi^a_A(f) := F(f)(a)\,. \end{array}$$

Beachte: Für $f : A \to X$ haben wir $F(f) : F(X) \to F(A)$, da F kontravariant ist. Dies ist wirklich ein Morphismus von Funktoren: Für einen Morphismus $g : A \to A'$ in $\mathcal{C}$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(A', X) \arrow[r, "\varphi^a_{A'}"] \arrow[d, "g^*"'] & F(A') \arrow[d, "F(g)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \arrow[r, "\varphi^a_A"] & F(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f' \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & F(f')(a) \arrow[d, mapsto] \\
& F(g)(F(f')(a)) \arrow[d, equal] \\
f'g \arrow[r, mapsto] & F(f'g)(a)\,,
\end{tikzcd}$$

da $F(f'g) = F(g) \circ F(f')$.

Es ist $e_X m_X = id$: Für $a \in F(X)$ ist $e_X(\varphi^a) = \varphi^a_X(id_X) = a$, da $F(id_X) = id_{F(X)}$. Umgekehrt ist $m_X e_X = id$: Sei $\varphi : h_X \to F$ gegeben und $e_X(\varphi) = \varphi_X(id_X) \in F(X)$; sowie $\varphi^{e_X(\varphi)} : h_X \to F$ wie oben konstruiert. Für jedes $A \in ob(\mathcal{C})$ sind dann die Abbildungen

$$\varphi_A^{e_X(\varphi)} = \varphi_A \quad Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \to F(A)$$

gleich, denn es ist

$$\varphi_A^{e_X(\varphi)}(f) = F(f)(\varphi_X(id_X)) = \varphi_A(f)\,,$$

da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
id_X \in Hom_{\mathbb{C}}(X, X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f^*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \arrow[r, "\varphi_A"] & F(A)
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist (φ ist Morphismus von Funktoren).

Der Beweis von (b) ist analog.

Durch Anwendung von 1.A.2 auf $F = h_Y$ bzw. $G = h^X$ folgt:

Corollar 1.A.3 Für Objekte X, Y in $\mathcal{C}$ hat man kanonische Bijektionen

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} Hom(h_X, h_Y)$$
$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} Hom(h^Y, h^X)$$

Hieraus folgt, dass die darstellenden Objekte bis auf Isomorphie eindeutig sind: Ist

$$h_X \;\cong\; F \;\cong\; h_Y\,,$$

so ist $X \cong Y$; entsprechend für kovariante Funktoren. Aus 1.A.3 folgt auch

Corollar 1.A.4 (Yoneda-Einbettung) Der Funktor

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C} & \to & \mathcal{C}^\sim := (\text{kontravariante Funktoren } F : \mathcal{C} \to Sets) \\ x & \mapsto & h_X \end{array}$$

ist volltreu, liefert also eine Einbettung von $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}^\sim$. Das essentielle Bild ist die volle Unterkategorie der darstellbaren Funktoren.

Wir definieren nun Faserprodukte und Fasernummern.

Definition 1.A.5 Seien

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

Morphismen in $\mathcal{C}$. Das Faserprodukt von α und β – oder von X und Y über S, Bezeichnung $X \times_S Y$, wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert:

(a) Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

(Man nennt pr_1 bzw. pr_2 die erste bzw. zweite Projektion).

(b) Ist

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{\beta}"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

ein weiteres kommutatives Diagramm, so gibt es genau einen Morphismus $\gamma : W \to X \times_S Y$ mit $pr_1\gamma = \tilde{\alpha}$ und $pr_2\gamma = \tilde{\beta}$, d.h., derart dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed, "\exists ! \gamma"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\alpha}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\beta}"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ & X \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 1.A.6 (a) Faserprodukte müssen nicht existieren; wenn sie existieren, sind sie aber bis auf kanonische Isomorphie eindeutig (Übungsaufgabe!).

(b) In der Kategorie <u>*Sets*</u> der Mengen existieren Faserprodukte: Es ist für Abbildungen $M \stackrel{\alpha}{\to} T \stackrel{\beta}{\leftarrow} N$ von Mengen

$$M \times_T N = \{(m,n) \in M \times N \mid \alpha(m) = \beta(n)\}\,.$$

(c) Die universelle Eigenschaft eines Faserproduktes $X \times_S Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist äquivalent dazu, dass für jedes weitere Objekt Z in $\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{C}}(Z, X \times_S Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \times_{Hom_{\mathcal{C}}(Z,S)} Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y) \\ \gamma & \mapsto & (pr_1\gamma, pr_2\gamma) \end{array}$$

bijektiv ist. Das rechte Faserprodukt ist hierbei vermöge der Abbildungen

$$\begin{tikzcd} & Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y) \arrow[d, "\beta_*"] & g \arrow[d, mapsto] \\ Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \arrow[r, "\alpha_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z,S) & \beta g \end{tikzcd}$$

$$f \longmapsto \alpha f$$

genommen.

(d) Eine etwas andere Deutung ist wie folgt: Sei $\mathcal{C}/S$ die Kategorie der **Objekte in $\mathcal{C}$ über** S: Objekte in $\mathcal{C}/S$ sind Objekte X in $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus $\alpha : X \to S$; man kann auch α selbst als Objekt auffassen, denn durch α ist X bereits gegeben. Ein Morphismus von $\alpha : X \to S$ nach $\alpha' : X' \to S$ ist ein Morphismus $f : X \to X'$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & X' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Dann ist ein Faserprodukt $X \times_S Y$ dasselbe wie ein Produkt von $X \to S$ und $Y \to S$ in $\mathcal{C}/S$, weil sich die universellen Eigenschaften entsprechen.

Lemma 1.A.7 Die Eigenschaften aus Lemma 1.14 (Kommutativität, Assoziativität, Transivität und Funktoralität) gelte für Faserprodukte in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ (wenn sie existieren).

Beweis Wir zeigen zum Beispiel die Funktoralität. Wir haben ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & Y \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, "g"] \\ & S & \\ X' \arrow[ur, "\alpha'"'] & & Y' \arrow[ul, "\beta'"] \end{tikzcd},$$

d.h., X, X', Y und Y' sind Objekte über S (vermöge α, α', β und β') und f und g sind Morphismen von Objekten über S (Kommutativität der Dreiecke). Existieren die Faserprodukte, so haben wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[rr, "pr_2"] \arrow[dd, "pr_1"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & & Y \arrow[d, "g"] \\ & X' \times_S Y' \arrow[r, "pr_2'"] \arrow[d, "pr_1'"'] & Y' \arrow[d, "\beta'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \arrow[r, "\alpha'"] & S \end{tikzcd},$$

wobei das innere und das äußere Quadrat kommutativ sind (beachte $\alpha' f = \alpha$ und $\beta' g = \beta$). Nach der universellen Eigenschaft von $X' \times_S Y'$ gibt es genau einen Morphismus $h : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$, der das ganze Diagramm kommutativ macht; diesen bezeichnen wir mit $f \times g$, und er erfüllt die Behauptung von Lemma 1.14 (d).

Bemerkung 1.A.7 Durch Umdrehen aller Pfeile erhält man den Begriff der Fasersumme $X \coprod_S Y$ für ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

wobei man die dualen universellen Eigenschaften und anderen Eigenschaften hat.

Beispiel 1.A.8 In der Kategorie der Ringe existiert für jedes Diagramm von Ringhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

die Fasersumme und ist durch das Tensorprodukt gegeben: Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

und für jedes Diagramm von Ringen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ A \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

mit $f\alpha = g\beta$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus h, der das gesamte Diagramm kommutativ macht.

Warnung: Der Rest dieses Anhangs wird nicht in der Vorlesung benötigt und ist nur für diejenigen gedacht, die Limiten und Colimiten in einem allgemeinen Rahmen verstehen wollen.

Wir kommen nun zu der allgemeinen Theorie von Limiten und Colimiten.

Definition 1.A.9 Eine Kategorie I heißt klein (oder Diagrammkategorie), wenn die Objekte eine Menge bilden.

Beispiele 1.A.10 Oft sind die betrachteten kleinen Kategorien "wirklich klein" in dem Sinne, dass man alle Objekte und Morphismen hinschreiben kann.

(a) Die **diskrete Kategorie** $\underline{I}$ über einer Menge I hat die Elemente von I als Objekte und nur die Identitäten als Morphismen.

(b) Es bezeichne

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

die Kategorie, die drei Objekte hat (durch Punkte gekennzeichnet) und außer den Identitäten nur die beiden angegebenen Pfeile (alle Kompositionen sind dann klar!).

(c) Für jede Gruppe G hat man die kleine Kategorie $\underline{G}$ mit einem Objekt $*$ und allen Elementen $\sigma \in G$ als Morphismen (Alg. Geo. I, 9.A.2 (e)).

(d) Für jede geordnete Menge $(I, \leq)$ hat man die Kategorie mit Objekte $i \in I$ und genau einem Morphismus $i \to j$, wenn $i \leq j$ (Alg. Geo. I, 9.A.2 (c)).

Definition 1.A.11 Sei I eine kleine Kategorie, und sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein Diagramm in $\mathcal{C}$ über I (oder ein I-Objekt in $\mathcal{C}$) ist ein (kovarianter) Funktor $X : I \to \mathcal{C}$.

Die I-Objekte in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie

$$\mathcal{C}^I ,$$

wobei die Morphismen die Morphismen von Funktoren sind. Man bezeichnet oft die Objekte von I mit kleinen Buchstaben $i, j,...$ und schreibt X_i für $X(i)$.

Beispiele 1.A.12 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Für die Kategorie $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ aus 1.A.6 (b) ist ein zugehöriges Diagramm in $\mathcal{C}$ wirklich durch ein Diagramm

$$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{\beta} Z$$

mit Morphismen α und β in $\mathcal{C}$ gegeben. Morphismen solcher Diagramme sind kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[d] & Z \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y' & Z' \arrow[l, "\beta'"'] .
\end{tikzcd}$$

(b) Betrachte die kleine Kategorie $\bullet \longrightarrow \bullet$ (2 Objekte, außer den Identitäten nur ein Pfeil). Diagramme hierüber sind $\mathcal{C}$ sind einfach Morphismen

$$A \xrightarrow{f} B$$

in $\mathcal{C}$, wobei Morphismen von diesen wiederum kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B'
\end{tikzcd}$$

sind. Dies nennt man die **Kategorie der Pfeile in** $\mathcal{C}$, Bezeichnung $Ar(\mathcal{C})$.

(c) Ist $(I, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie nach 1.A.6 (d), so ist ein kovarianter Funktor

$$X \; : \; (I, \leq) \; \to \; \mathcal{C}$$

dasselbe wie ein induktives System über I in $\mathcal{C}$ (Definition Alg. Geo. I, 9.A.12). Ein kontravarianter Funktor

$$X' \; : \; (I, \leq) \; \to \; \mathcal{C}$$

ist dasselbe wie ein projektives System in $\mathcal{C}$ über I (loc. cit. 9.A.13).

Sei nun I eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

Definition 1.A.13 Für ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ definiere das **konstante** I**-Objekt** $\underline{A}$ als den Funktor

$$\begin{array}{rrcl}
\underline{A} \; : & I & \to & \mathcal{C} \\
 & i & \mapsto & A \\
 & i \to j & \mapsto & id_A .
\end{array}$$

Beispiel 1.A.14 Im Beispiel 1.A.12 (a) $I = \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ ist das konstante Objekt A

$$A \xrightarrow{id_A} A \xleftarrow{id_A} A .$$

Definition 1.A.15 (a) Man sagt, dass der Limes (oder inverse Limes) eines I-Objekts $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}$ existiert, wenn der kontravariante Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \underline{Sets} \\ X & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i)_{i\in I}) \end{array}$$

darstellbar ist. Das darstellende Objekt heißt der Limes von $(A_i)_{i\in I}$, Bezeichnung

$$\lim\,(A_i)_{i\in I} \quad \text{oder} \quad \lim_{i\in I}\, A_i\,.$$

(b) Man sagt, dass der Kolimes (oder direkte Limes) von $(A_i)_{i\in I}$ existiert, wenn der kovariante Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \underline{Sets} \\ X & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}^I}((A_i)_{i\in I}, \underline{X}) \end{array}$$

darstellbar ist. Das darstellende Objekt heißt der Kolimes von $(A_i)_{i\in I}$, Bezeichnung

$$\mathrm{colim}\,(A_i)_{i\in I} \;=\; \operatorname*{colim}_{i\in I}\, A_i\,.$$

Wir machen diese elegante Definition nun expliziter.

Bemerkungen 1.A.16 (explizite Beschreibung) (a) Ein Element aus $Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i)_{i\in I})$ ist offenbar durch das Folgende gegeben:
(i) Für jedes $i \in I$ hat man einen Morphismus in $\mathcal{C}$

$$\varphi_i \;:\; X \;\to\; A_i\,.$$

(ii) Für jeden Morphismus $i \to j$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dd] \\ X \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & A_j \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei der vertikale Morphismus zu $i \to j$ gehört (man hat einen Funktor $a : I \to \mathcal{C}$, wir schreiben $a(i) = A_i$, und dann ist der rechte Morphismus $a(i \to j)$).
(b) Existiert $\lim\,(A_i)_{i\in I}$ (andere Bezeichnung $\lim\limits_{I} a$), und fixieren wir einen in X funktoriellen Isomorphismus

(1.A.16.1) $$\alpha : Hom_{\mathcal{C}}(X, \lim_{I}\,(A_i)) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i))\,,$$

so erhalten wir für $X = \lim\,(A_i)_{i\in I}$ als Bild von $id_{\lim(A_i)}$ ein Element $\varphi^{univ} \in Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{\lim(A_i)}, (A_i))$, nach (a) also Morphismen $p_i : \lim(A_i) \to A_i$ für alle $i \in I$ und kommutative Dreiecke

(1.A.16.2)
$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dd] \\ \lim(A_i)_{i\in I} \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\ & A_j \end{tikzcd}$$

für jeden Morphismus $i \to j$ in I. Der Morphismus p_i heißt die i-te Projektion. Ist weiter ein Element $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i))$ gegeben, also Morphismen $\varphi_i : X \to A_i$ für alle $i \in I$ und kommutative Diagramme

(1.A.16.3)
$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dd] \\ X \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & A_j \end{tikzcd}$$

für alle Morphismen $i \to j$, so gibt es genau einen Morphismus

$$\varphi \ : \ X \ \to \ \lim (A_i)$$

(nämlich das Urbild von α unter (1.A.16.1)) mit

$$\varphi_i \ = \ p_i \varphi$$

(dies folgt aus der Wahl von φ^{univ} und der Funktorialität von (1.A.16.1)).

(c) Für colim (A_i) erhält man analoge Aussagen, durch Umdrehen aller Pfeile.

Beispiele 1.A.17 (a) Ist I eine Menge und $\underline{I}$ die diskrete Kategorie zu I (1.A.10 (a)), so ist ein $\underline{I}$-Objekt in $\mathcal{C}$ einfach durch eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}$ gegeben (es gibt keine Morphismen zwischen $i \neq j$), und es ist

$$\lim_{\underline{I}} (A_i) \ = \ \prod_{i\in I} A_i \, ,$$

falls dieses Produkt in $\mathcal{C}$ existiert, denn die universellen Eigenschaften von $\lim\limits_{\underline{I}} (A_i)$ (1.A.16 (b)) und $\prod\limits_{i\in I} A_i$ (Alg. Geo. I, 9.A.8) sind gleich. Entsprechend ist

$$\operatorname*{colim}_{\underline{I}} (A_i) \ = \ \coprod_{i\in I} A_i \, ,$$

die Summe oder das Koprodukt der A_i (Alg. Geo. I, 9.A.9), falls dies in $\mathcal{C}$ existiert.

(b) Entsprechend zeigt man: Ist $(I, \leq)$ eine filtrierend geordnete Menge (aufgefasst als Kategorie), so ist für jedes I-Objekt in $\mathcal{C}$, also jedes induktive System $(A_i)_{i\in I}$ über I in $\mathcal{C}$,

$$\operatorname{colim} (A_i)_{i\in I} \ = \ \varinjlim_{i\in I} A_i$$

der induktive Limes des Systems (siehe Alg. Geo. I, 9.A.12), falls dieser existiert. Entsprechend ist für jedes I°-Objekt $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}$ (wobei I° die duale Kategorie zu I bezeichnet), also jedes projektive System über I in $\mathcal{C}$

$$\lim (A_i)_{i\in I^\circ} \ = \ \varprojlim_{i\in I} A_i$$

der projektive Limes des Systems (siehe Alg. Geo. I, 9.A.13), falls dieser existiert.

(c) Betrachte die Kategorie $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ 1.A.10 (b). Für ein entsprechendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ folgt aus den universellen Eigenschaften, dass der Limes das Faserprodukt

$$X \times_Y Z$$

ist $\mathcal{C}$ ist – wenn dieses existiert.

Wir kommen nun zu einem speziellen, aber sehr wichtigen Beispiel. Betrachte die folgende kleine Kategorie

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

(zwei Objekte, und abgesehen von den beiden Identitäten nur die beiden angegebenen Pfeile). Ein Diagramm in $\mathcal{C}$ hierüber ist

$$A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B\,.$$

Definition 1.A.18 (a) Der Limes dieses Diagramms heißt der Differenzkern von α und β, Bezeichnung

$$\ker(\alpha, \beta)\,.$$

(b) Der Kolimes dieses Diagramms heißt der Differenzkokern von α und β, Bezeichnung

$$\operatorname{coker}(\alpha, \beta)\,.$$

(Jeweils wenn diese in $\mathcal{C}$ existieren).

Wir beschreiben nun die universellen Eigenschaften:

Lemma 1.A.19 (a) Man hat einen Morphismus

$$\ker(\alpha, \beta) \xrightarrow{i} A$$

mit $\alpha i = \beta i$. Ist

$$X \xrightarrow{\gamma} A$$

ein weiterer Morphismus mit $\alpha\gamma = \beta\gamma$, so gibt es genau einen Morphismus $\gamma' : X \to \ker(\alpha, \beta)$ der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker(\alpha,\beta) \arrow[rr, "i"] & & A \\
& X \arrow[ul, dashed, "\exists\gamma'"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

(b) Man hat einen Morphismus $B \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(\alpha, \beta)$ mit $\pi\alpha = \pi\beta$. Ist

$$B \xrightarrow{\rho} X$$

ein weiterer Morphismus mit $\rho\alpha = \rho\beta$, so gibt es genau einen Morphismus $\rho' : \operatorname{coker}(\alpha, \beta) \to X$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho"'] & & \operatorname{coker}(\alpha,\beta) \arrow[dl, dashed, "\rho'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis: Dies folgt sofort aus der expliziten Beschreibung in 1.A.16.

Differenzkerne und -kokerne sind nicht-additive Analoga von Kernen und Kokernen in additiven Kategorien (siehe 3.A.7). Wie dort gilt:

Lemma 1.A.20 Seien $\alpha, \beta : A \to B$ Morphismen.

(a) Falls $\ker(\alpha, \beta)$ existiert, so ist

$$i : \ker(\alpha, \beta) \to A$$

ein Monomorphismus.

(b) Falls $\mathrm{coker}(\alpha, \beta)$ existiert, so ist

$$\pi \; : \; B \; \to \; \mathrm{coker}(\alpha, \beta)$$

ein Epimorphismus.

Beweis (a): Seien $f, g : Z \to \ker(\alpha, \beta)$ zwei Morphismen mit $if = ig$. Wegen $\alpha i = \beta i$ gilt auch

$$\alpha i f \; = \; \beta i f \, .$$

Nach der universellen Eigenschaft des Differenkerns (1.A.19 (a)) gibt es also genau einen Morphismus $h : Z \to \ker(\alpha, \beta)$ mit

$$ih \; = \; if \, .$$

Da auch noch $if = ig$ gilt, muss $h = f = g$ gelten, also insbesondere $f = g$.

Der Beweis von (b) ist dual.

Differenzkerne und-kokerne spielen wegen des folgenden Resultats eine Rolle.

Satz 1.A.21 (a) In $\mathcal{C}$ existieren genau dann beliebige (bzw. beliebige endliche) Limiten, wenn in $\mathcal{C}$ beliebige Differenzkerne und beliebige (bzw. beliebige endliche) Produkte existieren.

(b) In $\mathcal{C}$ existieren genau dann beliebige (bzw. beliebige endliche) Kolimiten, wenn in $\mathcal{C}$ beliebige Differenzkokerne und beliebige (bzw. beliebige endliche) Summen existieren.

Hierbei spricht man von endlichen Limiten oder Kolimiten, wenn die zugrundeliegende Indexkategorie I endlich ist, d.h., endlich viele Objekte und nur endliche Morphismenmengen hat.

Beweis Wir beweisen nur (a); dann folgt (b) durch Übergang zur dualen Kategorie, wodurch Kolimiten zu Limiten, Summen zu Produkten und Differenzkokerne zu Differenzkernen werden.

Sei I eine kleine (bzw. endliche) Kategorie. Sei $ob(I)$ die Menge aller Objekte in I und sei $mor(I)$ die Menge aller Morphismen in I. Für einen Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ sei $q(f) := A$ die Quelle und $z(f) := B$ das Ziel von f. Für ein I-Diagramm $a : I \to \mathcal{C}$ betrachte die Morphismen

$$\prod_{i \in ob(I)} a(i) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{f \in mor(I)} a(z(f)) \tag{1.A.21.1}$$

die wie folgt definiert sind (nach Voraussetzung existieren die jeweiligen Produkte): Die “f-Komponente” von α (siehe die universelle Eigenschaft des Produkts, Alg. Geo. I 9.A.8) ist der Morphismus

$$\prod_{i \in ob(i)} a(i) \overset{pr_{z(f)}}{\longrightarrow} a(z(f)) \, ,$$

die f-Komponente von β ist der Morphismus

$$\prod_{i \in ob(i)} a(i) \overset{pr_{q(f)}}{\longrightarrow} a(q(f)) \overset{a(f)}{\longrightarrow} a(z(f))$$

Behauptung: $\ker(\alpha, \beta) \; = \; \lim\limits_{i \in I} a(i)$.

Beweis: Nach der universellen Eigenschaft von $\ker(\alpha, \beta)$ entspricht ein Morphismus $Z \to \ker(\alpha, \beta)$ einem Morphismus

$$\varphi \; : \; Z \; \to \; \prod_{i \in ob(I)} a(i)$$

mit $\alpha\varphi = \beta\varphi$. Nach der universellen Eigenschaft des Produkts entspricht φ der Vorgabe von Morphismen

$$\varphi_i \; : \; Z \; \to \; a(i)$$

für alle $i \in I$, und $\alpha\varphi = \beta\varphi$ bedeutet gerade, dass für jedes $f : i \to j$ in I das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & a(i) \arrow[dd, "a(f)"] \\
Z \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\
 & a(j)
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dies ergibt gerade die universelle Eigenschaft von $\lim\limits_{i \in I} a(i)$ (siehe 1.A.16).

2 Endlichkeitseigenschaften von Schemata und Schema-Morphismen

Definition 2.1 (a) Ein Schema heißt **quasi-kompakt**, wenn der unterliegende topologische Raum dies ist.

(b) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt quasi-kompakt, wenn es eine *affine* offene Überdeckung $(V)_{i\in I}$ von Y gibt, so dass $f^{-1}(V_i)$ für alle $i \in I$ quasi-kompakt ist.

Beispiele 2.2 (a) Affine Schemata sind quasi-kompakt (Alg. Geo. I, Lemma 9.9).

(b) Jeder Morphismus $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ affiner Schemata ist quasi-kompakt.

Proposition 2.3 Ein Schema ist genau dann quasi-kompakt, wenn es durch endlich viele offene, affine Teilmengen überdeckt werden kann.

Beweis Ist X ein Schema und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene affine Überdeckung von X (existiert immer!), und ist X quasi-kompakt, so gibt es hierin eine endliche Teilüberdeckung. Umgekehrt gilt in jedem topologischen Raum, dass eine endliche Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ von quasi-kompakten Mengen wieder quasi-kompakt ist: Ist $(U_j)_{j\in I}$ eine offene Überdeckung, so ist für jedes $i = 1, \dots, n$ $(U_j \cap Y_i)_{j\in I}$ eine offene Überdeckung von Y_i und enthält eine endliche Teilüberdeckung. Insgesamt erhalten wir so endlich viele U_j, die ganz Y überdecken.

Satz 2.4 Für einen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata sind äquivalent:

(a) f ist quasi-kompakt.

(b) Für jede affine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt.

(c) Für jede offene, quasi-kompakte Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt.

Beweis (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $(V_i = \mathrm{Spec}(B_i))_{i\in I}$ eine offene, affine Überdeckung von Y derart, dass $f^{-1}(V_i)$ für jedes $i \in I$ quasi-kompakt ist. Für jedes $i \in I$ und jedes $g \in B_i$ ist dann für $D(g) \subseteq \mathrm{Spec}(B_i) = V_i$ das Urbild $f^{-1}(D(g))$ quasi-kompakt: Nach 2.3 besitzt $f^{-1}(V_i)$ eine endliche affine offene Überdeckung $(W_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij}))_{j\in I_i}$ und für den Ringhomomorphismus $\varphi_{ij} : B_i \to A_{ij}$, der der Einschränkung $f_{ij} : W_{ij} \to V_i$ von f entspricht, ist $f_{ij}^{-1}(D(g)) = D(\varphi_{ij}(g)) = \mathrm{Spec}((A_{ij})_{\varphi_{ij}(g)})$ affin und $f^{-1}(D(g))$ ist die Vereinigung dieser Affinen für die endlich vielen $j \in I_i$, so dass die Behauptung mit Lemma 2.3 folgt.

Da $(V_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von Y ist, bilden die Mengen der Form $D(g) \subseteq V_i$ für ein $g \in B_i$ aber eine Basis der Topologie von Y. Ist nun $V \subseteq Y$ quasi-kompakt, so lässt sich V durch endlich viele dieser $D(g)$ überdecken, $f^{-1}(V)$ also durch endlich viele quasi-kompakte Mengen.

Lemma/Definition 2.5 Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt **lokal von endlichem Typ**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Für alle affinen offenen Teilmengen $U = \mathrm{Spec}(A)$ von X und $V = \mathrm{Spec}(B)$ von Y mit $f(V) \subseteq U$ ist (bezüglich des Ringhomomorphismus $A \to B$ zu $V \to U$) B eine A-Algebra von endlichem Typ (d.h., als A-Algebra endlich erzeugt).

(b) Es gibt eine affine offene Überdeckung $(U_i = \mathrm{Spec}\, A_i)_{i\in I}$ von X und für jedes $i \in I$ eine affine offene Überdeckung $(V_{ij} = \mathrm{Spec}\, B_{ij})_{j\in J_i}$ von $f^{-1}(U_i)$, so dass B_{ij} eine A_i-Algebra von endlichem Typ ist.

Beweis der Äquivalenz: (a) $\Rightarrow$ (b) ist klar! Seien umgekehrt $U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \leftarrow V_{ij} = \mathrm{Spec}(B_{ij})$ wie in (b), und sei $V = \mathrm{Spec}(B) \to U = \mathrm{Spec}(A)$ wie in (a). Wir haben zu zeigen, dass B von endlichem Typ über A ist.

1. Schritt $V = \mathrm{Spec}(B)$ kann durch Mengen der Form $D(h) = \mathrm{Spec}(B_h)$ (mit $h \in B$) überdeckt werden, so dass B_h von endlichem Typ über A ist.

Beweis Sei $y \in V$ und $x = f(y) \in U$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ und ein $j \in J_i$ mit $y \in V_{ij} = \mathrm{Spec}(B_{ij})$. Sei $g \in A$ mit $x \in D(g) = \mathrm{Spec}(A_g) \subseteq U \cap U_i \subseteq U = \mathrm{Spec}(A)$ und $h_1 \in B$ mit

$$y \in V' = D_B(h_1) = \mathrm{Spec}(B_{h_1}) \subseteq V \cap V_{ij} \cap f^{-1}(D(g)) \subseteq V = \mathrm{Spec}(B)\,.$$

Ist nun $h_2 \in B_{ij}$ mit

$$y \in V'' = D_{B_{ij}}(h_2) \subseteq V' \subseteq V_{ij} = \mathrm{Spec}(B_{ij})\,,$$

so folgt aus dem Diagramm

$$V'' = D_{B_{ij}}(h_2) \subseteq V' = \mathrm{Spec}(B_{h_1}) \overset{\beta}{\hookrightarrow} \mathrm{Spec}(B_{ij})$$

die Gleichheit $V'' = \beta^{-1}(D_{B_{ij}}(h_2)) = D_{B_{h_1}}(\beta^\sharp(h_2))$ und damit eine Isomorphie

$$(B_{h_1})_{h_3} \;\cong\; (B_{ij})_{h_2}$$

mit $h_3 =$ Bild von h_2 unter $\beta^\sharp : B_{ij} \to B_{h_1}$. Weiter induziert $B \to (B_{h_1})_{h_3}$ einen Isomorphismus

$$B_h \;\overset{\sim}{\to}\; (B_{h_1})_{h_3}$$

für ein $h \in B$ (falls $h_3 = \frac{h'}{h_1^n}$, so kann man $h_3 = h_1 \cdot h'$ nehmen). Das kommutative Diagramm

(2.5.1)
$$\begin{tikzcd}
(B_{ij})_{h_2} \arrow[r, "\sim"] & (B_{h_1})_{h_3} & B_h \arrow[l, "\sim"'] \\
B_{ij} \arrow[u] \arrow[r] & B_{h_1} \arrow[u] & B \arrow[u] \arrow[l] \\
A_i \arrow[u] \arrow[r] & A_g \arrow[u] & A \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

zeigt nun, dass B_h von endlichem Typ über A ist, da dies für A_g über A gilt ($A_g \cong A[x]/(xg-1)$), für B_{ij} über A_i (nach Voraussetzung), für $(B_{ij})_{h_2}$ über B_{ij}, also auch für $(B_{ij})_{h_2}$ über A_i, also trivialerweise auch für B_h über A_g.

2. Schritt B ist von endlichem Typ über A.

Beweis Es gibt nach dem 1. Schritt $h_1, \ldots, h_n \in B$, so dass $D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_n) = \mathrm{Spec}(B) = V$ und B_{h_i} von endlichem Typ über A ist. Es gibt also für jedes i eine endliche Menge $F_i \subseteq B$

und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass B_{h_i} von den Elementen $\frac{b}{h_i^n}$ mit $b \in F_i$ über A erzeugt wird. Wegen $\mathrm{Spec}(B) = \bigcup_{i=1}^n D(h_i)$ ist $< h_1, \ldots, h_n >= B$; es gibt also $g_1, \ldots, g_n \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} g_i h_i = 1 \,. \tag{2.5.2}$$

Wir behaupten nun, dass $B = B'$ für die endlich erzeugte Unteralgebra $B' = A[h_i, g_i, F_i]$: Sei $b \in B$. Nach Lokalisieren nach h_i ist $B_{h_i} = B'_{h_i}$. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$h_i^m \cdot b \in B'$$

für alle $i = 1, \ldots, n$. Nun gilt in B' auch $< h_1, \ldots, h_n >= B'$, wegen (2.5.2) und $g_i \in B'$. Dies bedeutet $\mathrm{Spec}(B') = \bigcup_i D(h_i) = \bigcup_i D(h_i^m)$. Es gilt also $c_1, \ldots, c_n \in B'$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} c_i h_i^m = 1 \,.$$

Es folgt

$$b = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i^m b \in B' \,.$$

Definition 2.6 Ein Morphismus $f : Y \to X$ heißt **von endlichem Typ**, wenn f lokal von endlichem Typ und quasi-kompakt ist.

Lemma 2.7 $f : Y \to X$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn es eine affine, offene Überdeckung $(U_i = \mathrm{Spec}(A_i))_{i \in I}$ von X gibt, so dass für jedes $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ eine endliche affine offene Überdeckung $(V_{ij} = \mathrm{Spec}(B_{ij}))_{j \in J_i}$ besitzt, so dass jedes B_{ij} von endlichem Typ über A_i ist.

Beweis: Klar!

Lemma/Definition 2.8 Ein Schema X heißt **lokal noethersch**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a): Es gibt eine affine, offene Überdeckung $(U_i = \mathrm{Spec}(A_i))_{i \in I}$ von X, so dass jedes A_i ein noetherscher Ring ist.

(b) Für jede affine, offene Teilmenge $U = \mathrm{Spec}(A)$ von X ist A ein noetherscher Ring.

Beweis der Äquivalenz: (b) $\Rightarrow$ (a) ist klar. Für die Rückrichtung sei $(U_i = \mathrm{Spec}(A_i))_{i \in I}$ wie in (a) gegeben, und $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen. Wir benutzen

Lemma 2.9 Ist A ein noetherscher Ring und S eine multiplikative Teilmenge, so ist die Lokalisierung A_S noethersch.

Beweis Es gibt zwei kanonische Abbildungen

$$\{ \text{ Ideale } \mathfrak{a} \subseteq A\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{ \text{ Ideale } \mathfrak{a}' \subseteq A_S\}$$

vermöge

$$\begin{array}{lccl} \Phi: & \mathfrak{a} & \mapsto & \mathfrak{a}_S\,, \\ \Psi: & \mathfrak{a}' & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{a})\,, \end{array}$$

wobei $\varphi : A \to A_S$ der kanonische Morphismus ist, und man sieht leicht, dass $\Phi\Psi = id$.

Ist nun

$$\mathfrak{a}'_1 \subseteq \mathfrak{a}'_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{a}'_n \subseteq$$

eine aufsteigende Idealkette in A_S, so wird die Kette der $\Psi(\mathfrak{a}'_i)$ konstant, da A noethersch ist, also auch die Kette der $\mathfrak{a}'_i = \Phi(\Psi(\mathfrak{a}'_i))$.

Weiter im Beweis von 2.8:

1. Schritt: Jedes $x \in U = \mathrm{Spec}(A)$ besitzt eine Umgebung $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$ für ein $f \in A$, so dass A_f noethersch ist:

Denn es existiert ein $i \in I$ mit $x \in U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ und ein $f \in A_i$ mit

$$x \in D_{A_i}(f) = \mathrm{Spec}((A_i)_f) \subseteq U_i \cap U \subseteq U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\,.$$

Weiter gibt es ein $g \in A$ mit

$$x \in D_A(g) \subseteq D_{A_i}(f) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} U = \mathrm{Spec}(A)\,,$$

und wie im Beweis von 2.5 folgt aus $\alpha^{-1}(D_A(g)) = D_A(g)$, dass

$$A_g \;\cong\; ((A_i)_f)_h\,,$$

wobei h das Bild von g unter $A \to (A_i)_f$ ist. Dieser Ring ist nach 2.9 noethersch, da A_i noethersch ist.

2. Schritt: Da $U = \mathrm{Spec}(A)$ quasi-kompakt ist, gibt es also eine endliche affine offene Überdeckung $(D(f_i) = \mathrm{Spec}(A_{f_i}))_{i=1,\ldots,n}$ von U, so dass jedes A_{f_i} noethersch ist, und wir haben zu zeigen:

Lemma 2.10 Ist A ein Ring, und sind $f_1, \ldots, f_n \in A$, so dass $< f_1, \ldots, f_n >= A$ und A_{f_i} noethersch ist für alle i, dann ist A noethersch.

Beweis Sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen in A. Für jedes i wird dann die Kette

$$(\mathfrak{a}_1)_{f_i} \subseteq (\mathfrak{a}_2)_{f_i} \subseteq \ldots$$

konstant. Da wir nur endlich viele f_i haben, gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(\mathfrak{a}_n)_{f_i} = (\mathfrak{a}_{n+1})_{f_i} = \ldots$$

für alle $i = 1, \ldots, r$. Hieraus folgt aber

$$\mathfrak{a}_n \;=\; \mathfrak{a}_{n+1} \;=\ldots\,,$$

denn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gilt

$$(\mathfrak{a}_n)_\mathfrak{p} \;=\; (\mathfrak{a}_{n+1})_\mathfrak{p} = \dots\,, \tag{2.10.1}$$

weil für $\mathfrak{p} \in D(f_i)$ gilt: $(\mathfrak{a}_n)_\mathfrak{p} \cong ((\mathfrak{a}_n)_{f_i})_{\mathfrak{p}_{f_i}}$. Aus (2.10.1) (für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$) folgt aber $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \dots$ nach dem folgenden Lemma.

Lemma 2.11 Ein Morphismus $\varphi : M \to N$ von Moduln über einem Ring A ist bijektiv (bzw. injektiv, bzw. surjektiv), wenn dies für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ für den induzierten Morphismus

$$\varphi_\mathfrak{p} \;:\; M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$$

der Lokalisierungen gilt.

Beweis Da Lokalisierung exakt ist (Alg. Geo. I, 3.A.10), genügt es zu zeigen, dass für einen beliebigen A-Modul gilt:

$$M \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_\mathfrak{p} \;=\; 0 \quad \text{für alle } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\,. \tag{2.11.1}$$

Für die nicht-triviale Richtung sei $M_\mathfrak{p} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, und sei $m \in M$. Der Annihilator von m,

$$\mathrm{ann}(m) = \{a \in A \mid am = 0\}\,,$$

ist ein Ideal von A, und es ist zu zeigen, dass $\mathrm{ann}(m) = A$ (dann ist $m = 1m = 0$). Falls nicht, ist $\mathrm{ann}(m)$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ enthalten. Wegen $M_\mathfrak{m} = 0$ gibt es ein $a \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ mit $am = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\mathrm{ann}(m) \subseteq \mathfrak{m}$.

Definition 2.12 Ein Schema X heißt noethersch, wenn es lokal noethersch und quasi-kompakt ist.

Lemma 2.13 Ein Schema ist genau dann noethersch, wenn es eine endliche affine offene Überdeckung $U_1 = \mathrm{Spec}\, A_1, \dots, U_n = \mathrm{Spec}\, A_n$ besitzt, so dass alle A_i noethersche Ringe sind.

Beweis Klar!

Corollar 2.14 Für einen Ring A sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist noethersch.

(b) Das Schema $\mathrm{Spec}\, A$ ist noethersch.

(c) Das Schema $\mathrm{Spec}\, A$ ist lokal noethersch.

Dies ist klar, da $\mathrm{Spec}\, A$ quasi-kompakt ist.

Corollar 2.15 Ist X ein noethersches Schema, so ist der unterliegende topologische Raum noethersch. Insbesondere hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis Ein topologischer Raum X, der Vereinigung von endlich vielen noetherschen Unterräumen ist, ist noethersch. Die Behauptung folgt also aus Lemma 2.13 und der Tatsache, dass für einen noetherschen Ring A der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ noethersch ist (Alg. Geo. I 5.28).

Die beiden folgenden Sätze liefern die häufigsten Konstruktionen von (lokal) noetherschen Schemata.

Satz 2.16 Ist S ein lokal-noethersches Schema und $f : X \to S$ lokal von endlichem Typ, so ist X lokal noethersch.

Beweis Ist A ein noetherscher Ring, so ist nach dem Hilbertschen Basissatz jeder Polynomring $A[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch, also auch jede A-Algebra von endlichem Typ $B \cong A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Hieraus folgt leicht die Behauptung (Übungsaufgabe).

Satz 2.17 Ist S ein noethersches Schema und $f : X \to S$ von endlichem Typ, so ist X noethersch.

Beweis Übungsaufgabe.

Beispiele 2.18 (a) Ist S ein (lokal) noethersches Schema, so sind $\mathbb{A}^n_S$ und $\mathbb{P}^n_S$ (lokal) noethersche Schemata, da sie von endlichem Typ über S sind (Übungsaufgabe 7).

(b) Sei $A = k[x_1, x_2, x_3, \ldots]$ der Polynomring in abzählbar vielen Variablen über einem Körper k. Als affines Schema ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ quasi-kompakt, aber für das Ideal $\mathfrak{m} =< x_1, x_2, x_3, \ldots >$ ist die offene Menge $U = X \smallsetminus \{\mathfrak{m}\}$ nicht quasi-kompakt: Die offene Überdeckung $(D(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung: Das Komplement von $D(x_{i_1}) \cup \ldots \cup D(x_{i_n})$ ist $V(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ und damit nicht leer (es enthält das Primideal $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} >$). Insbesondere ist die Einbettung $j : U \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ nicht quasi-kompakt.

Es gilt aber:

Proposition 2.19 Ist das Schema X lokal noethersch, so ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Morphismus $j : U \hookrightarrow X$ quasi-kompakt.

Beweis Es ist zu zeigen: Ist A ein noetherscher Ring, so ist jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ quasi-kompakt. Beweis der letzten Aussage: Siehe Übungsaufgabe 11.

3 Garben

In diesem Abschnitt vertiefen wir die Theorie der Garben (auf beliebigen topologischen Räumen). Sei X ein topologischer Raum.

Satz/Definition 3.1 Sei P eine Prägarbe auf X. Dann gibt es eine Garbe P^+ und einen Morphismus $\varphi^{univ} : P \to P^+$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Ist F eine Garbe und $\varphi : P \to F$ ein Morphismus, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\varphi : P^+ \to F$ der

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varphi^{univ}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & P^+ \arrow[dl, "\exists!\,\tilde{\varphi}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, d.h., mit $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{univ} = \varphi$. Das Paar (P^+, φ^{univ}) ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

Beweis Konstruktion von P^+: Setze

$$\begin{aligned} P^+(U) \;=\; & \{f : U \to \coprod_{x \in U} P_x \mid \text{ für alle } x \in U \text{gelten die} \\ & \text{unten stehenden Bedingungen (i) und (ii)}\} \end{aligned}$$

(i) $f(x) \in P_x$.

(ii) Es existiert eine offene Umgebung V von x in U und ein $s \in P(V)$ mit $s_y = f(y)$ für alle $y \in V$.

Dann hat man offensichtliche Restriktionsabbildungen

$$\begin{array}{rcll} P^+(U) & \to & P^+(U') & \text{für } U' \subseteq U \text{ offen} \\ f & \mapsto & f|_{U'}\,, & \end{array}$$

die P^+ zu einer Prägarbe machen, sowie einen Morphismus von Prägarben

$$\varphi^{univ} \;:\; P \to P^+$$

definiert durch

$$\begin{array}{rcll} P(U) & \to & P^+(U) & \text{für } U \subseteq X \text{ offen} \\ s & \mapsto & f \text{ mit } f(x) = s_x\,. & \end{array}$$

Es folgt sofort aus der Definition von P^+, dass P^+ eine Garbe ist. Weiter gilt

Lemma 3.2 φ^{univ} induziert Isomorphismen

$$(\varphi^{univ})_x \;:\; P_x \xrightarrow{\sim} (P^+)_x$$

der Halme.

Beweis Die obige Abbildung ist nach Definition von P^+ (Eigenschaft (ii)) surjektiv. Weiter haben wir für jede offene Umgebung U von x in X eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P^+(U) & \to & P_x \\ f & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

Dies induziert offenbar eine Abbildung

$$\psi_x \ : \ (P^+)_x \to P_x \,,$$

wobei die Komposition

$$P_x \xrightarrow{(\varphi^{univ})_x} (P^+)_x \xrightarrow{\psi_x} P_x$$

die Identität ist. Also ist $(\varphi^{univ})_x$ auch injektiv.

Lemma 3.3 Ist $\alpha : P \to Q$ ein Morphismus von Prägarben, so induziert α einen eindeutig bestimmten Morphismus $a^+ : P^+ \to Q^+$, der das Diagramm

(3.3.1)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_P^{univ}"'] & Q \arrow[d, "\varphi_Q^{univ}"] \\ P^+ \arrow[r, "\alpha^+"] & Q^+ \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis Für $U \subseteq X$ definiere

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha_U^+ & : & P^+(U) & \to & Q^+(U) \\ & & f & \mapsto & (x \mapsto \alpha_x(f(x)))\,, \end{array}$$

wobei $\alpha_x : P_x \to Q_x$ die von α induzierte Halmabbildung ist. Man sieht leicht, dass α_U^+ wohldefiniert ist (die rechte Abbildung erfüllt (i) und (ii), d.h., liegt in $Q^+(U)$) und dass die α_U^+ einen Morphismus von Prägarben definieren (d.h., mit den Restriktionen verträglich sind). Weiter ist für jedes $x \in X$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_x \arrow[r, "\alpha^x"] \arrow[d, "(\varphi_P^{univ})_x"', "\wr"] & Q_x \arrow[d, "(\varphi_Q^{univ})_x", "\wr"'] \\ (P^+)_x \arrow[r, "(\alpha^+)_x"] & (Q^+)_x \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei die vertikalen Abbildungen nach Lemma 3.2 Isomorphismen sind. Dies zeigt, zusammen mit dem folgenden Lemma, dass das Diagramm (3.3.1) kommutiert und dass α^+ eindeutig ist.

Lemma 3.4 Für Morphismen von Prägarben

$$\alpha, \beta \ : \ P \to G\,,$$

wobei G eine Garbe ist, gilt $\alpha = \beta$ genau dann wenn $\alpha_x = \beta_x$ für alle $x \in X$.

Beweis Wir haben für $U \subseteq X$ offen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & G(U) \arrow[d, hook] \\ \prod\limits_{x\in U} P_x \arrow[r, "(\alpha_x)"] & \prod\limits_{x\in U} G_x \end{tikzcd}$$

wobei die rechte vertikale Abbildung injektiv ist (siehe Alg. Geo. I 9.5).

Lemma 3.5 Ist F eine Garbe, so ist

$$\varphi^{univ} \;:\; F \;\rightarrow\; F^+$$

ein Isomorphismus.

Beweis Sei $U \subseteq X$ offen. Aus der ersten Garbenbedingung folgt, dass $F(U) \rightarrow \prod\limits_{x \in U} F_x$, $s \mapsto (s_x)$, injektiv ist. Daher ist

$$F(U) \rightarrow F^+(U)$$

injektiv. Die Surjektivität folgt aus der zweiten Garbenbedingung: Ist $f \in F^+(U)$, so gibt es eine offene Berechnung $(U_i)_{i \in I}$ von U und Schnitte $s_i \in P(U_i)$, so dass $f(x) = (s_i)_x$ für $x \in U_i$, und die s_i verkleben sich zu einem Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$, also $s(x) = f(x)$ für alle $x \in U$.

Damit folgt nun die universelle Eigenschaft von P^+: Ist F eine Garbe und $\varphi : P \rightarrow F$ ein Morphismus von Prägarben, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\varphi_P^{univ}"] \arrow[d, "\varphi"'] & P^+ \arrow[d, "\varphi^+"] \\
F \arrow[r, "\varphi_F^{univ}", "\sim"'] & F^+ ,
\end{tikzcd}$$

in dem φ_F^{univ} nach Lemma 3.5 ein Isomorphismus ist. Die universelle Eigenschaft aus Satz 3.1 ergibt sich nun wie folgt: Wir setzen $\tilde{\varphi} = (\varphi_F^{univ})^{-1} \circ \varphi^+$; damit erhalten wir das gewünscrew kommutative Diagramm in 3.1. Ist $\overset{\approx}{\varphi}$ ein weiterer Morphismus mit $\varphi = \overset{\approx}{\varphi} \circ \varphi_P^{univ}$, so zeigt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\varphi_P^{univ}"] \arrow[d, "\varphi"'] & P^+ \arrow[d, "\varphi_F^{univ} \circ \overset{\approx}{\varphi}"] \arrow[dl, "\overset{\approx}{\varphi}"'] \\
F \arrow[r, "\varphi_F^{univ}"] & F^+
\end{tikzcd}$$

zusammen mit der Eindeutigkeit in Lemma 3.3 die Gleichheit

$$\varphi_F^{univ} \circ \overset{\approx}{\varphi} = \varphi^+$$

und damit $\overset{\approx}{\varphi} = (\varphi_F^{univ})^{-1} \circ \varphi^+ = \tilde{\varphi}$.

Die Eindeutigkeit von (P^+, φ^{univ}) folgt wie üblich aus der universellen Eigenschaft. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Bemerkungen 3.6 Die universelle Eigenschaft der assoziierten Garbe kann man auch so ausdrücken, dass man eine kanonische Bijektion

(3.6.1)
$$\begin{array}{ccc} Hom_{\text{Prägarben}}(P, F) & \cong & Hom_{\text{Garben}}(P^+, F) \\ \varphi & \mapsto & \tilde{\varphi} \end{array}$$

(mit Umkehrabbildung $\psi \mapsto \psi \circ \varphi^{univ}$) hat. Diese Bijektion ist funktoriell in P und F. Dies bedeutet, dass für die Kategorien

$$\begin{array}{rcl} \text{Prä}(X) & = & \{\text{Prägarben auf } X\} \\ \text{Gar}(X) & = & \{\text{Garben auf } X\} \end{array}$$

und die Funktoren

$$i : \text{Gar}(X) \hookrightarrow \text{Prä}(X)$$

(Inklusion als volle Unterkategorie) und

$$\begin{array}{rcccl} a & : & \text{Prä}(X) & \to & \text{Gar}(X) \\ & & P & \mapsto & P^+ \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi^+ \end{array}$$

(assoziierte Garbe) a linksadjungiert zu i ist, d.h., man hat Isomorphismen für jede Prägarbe P und jede Prägarbe F

$$Hom_{\text{Gar}(X)}(aP, F) \;\cong\; Hom_{\text{Prä}(X)}(P, iF)\,,$$

funktoriell in P und F (siehe den Anhang 3.A). Hier seien Prägarben und Garben mit Werten in derselben Kategorie betrachtet (also z.B. Mengen, oder abelsche Gruppen,...).

Der Begriff der assoziierten Garbe erlaubt die folgenden beiden Konstruktionen 3.7 und 3.10.

Definition 3.7 (konstante Garbe) Sei A eine abelsche Gruppe (oder Menge, oder ein Ring...). Die **konstante Prägarbe** zu A ist die Prägarbe A^P (von abelschen Gruppen,...) die durch

$$A^P(U) = A \quad \text{für} \quad U \subseteq X \quad \text{offen}$$

und $res_{U,V} = id_A$ für $V \subseteq U$ definiert wird. Die **konstante Garbe** zu A ist die zu A^P assoziierte Garbe; sie wird wieder mit A bezeichnet, oder auch mit A_X.

Lemma 3.8 (a) Für jedes $x \in X$ ist der Halm $A_x = A$.

(b) Für $U \subseteq X$ offen gilt kanonisch

$$A(U) \;\cong\; A^{\pi_0(U)}\,,$$

wobei $\pi_0(U)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von U ist.

Beweis selbst – Übungsaufgabe!

Insbesondere ist nicht immer $A(U) = A$.

Bemerkungen 3.9 (a) Ist F eine Garbe, so hat $F(\emptyset)$ genau ein Element (also ist zum Beispiel $F(\emptyset) = \{0\}$, wenn es eine Garbe von abelschen Gruppen ist). Dies ergibt sich aus dem Garbenaxiom (ii) für die leere Überdeckung.

(b) Ist $X = \{*\}$ ein Ein-Punkt-Raum, so hat man eine Kategorien-Äquivalenz

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Garbe von Mengen auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Mengen}\} \\ F & \mapsto & F_x = F(X)\,, \end{array}$$

denn nach (a) sind $F(\emptyset)$ und $res : F(X) \to F(\emptyset)$ eindeutig bestimmt.

Definition 3.10 (Urbildgarbe) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume.

(a) Für eine Prägarbe Q auf Y definiere die Urbild-Prägarbe (oder das Prägarben-Urbild, oder Prägarben-Pullback) $f^P Q$ auf X durch

(3.10.1)
$$(f^P Q)(U) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V} Q(V)$$

für $U \subseteq X$ offen. Hier ist der induktive Limes über alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ genommen, bezüglich der Restriktionen $Q(V) \to Q(V')$ für $V' \subseteq V$ als Übergangsabbildungen.

(b) Für eine Garbe G auf Y definiere die Urbildgarbe (oder das Garben-Urbild, oder Garben-Pullback) als

$$f^{-1}G \;:=\; (f^P G)^+ \,,$$

die zu $f^P G$ assoziierte Garbe.

Bemerkungen 3.11 Beachte: $f(V)$ ist im Allgemeinen nicht offen. Die Menge

$$\mathcal{U}(f(U)) = \{V \subseteq Y \text{ offen} \mid f(U) \subseteq V\}$$

ist induktiv geordnet bezüglich der Ordnung

$$V \le V' \quad :\Leftrightarrow \quad V' \subseteq V \,,$$

denn für $V', V'' \in \mathcal{U}(f(U))$ ist $V' \cap V'' \in \mathcal{U}(f(U))$. Daher ist der induktive Limes definiert. Nach Definition ist jeder Schnitt in $(f^P Q)(U)$ durch ein Element $s' \in Q(V')$ für $f(U) \subset V' \overset{\text{offen}}{\subseteq} Y$ repräsentiert, und $s'' \in Q(V'')$ mit $f(U) \subseteq V'' \overset{\text{offen}}{\subseteq} Y$ definiert dasselbe Element in $(f^P Q)(U)$, wenn es ein $f(U) \subseteq W \overset{\text{offen}}{\subseteq} Y$ gibt mit $W \subseteq V' \cap V''$ und $s'|_W = s''|_W$.

Beispiele 3.12 Sei A eine Menge (oder abelsche Gruppe, oder ...) und A_Y die zugehörige konstante Garbe auf Y. Dann ist

$$f^{-1}A_Y \;=\; A_X$$

(Übungsaufgabe!). Urbilder von konstanten Garben sind also wieder konstant.

Lemma 3.13 Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, und sei $x \in X$.

(a) Für eine Prägarbe Q auf Y gilt kanonisch

$$(f^P Q)_x \;=\; Q_{f(x)} \,.$$

(b) Für eine Garbe G und Y gilt kanonisch

$$(f^{-1}G)_x \;=\; G_{f(x)} \,.$$

Beweis (a): Es ist

$$\begin{aligned}
(f^P Q)_x &= \varinjlim_{x \in U} (f^P Q)(U) \\
&= \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subseteq V} Q(V) \overset{(*)}{\underset{\sim}{\to}} \varinjlim_{f(x) \in V} Q(V) = Q_{f(x)} \,.
\end{aligned}$$

Denn für $f(x) \in V$ ist $x \in f^{-1}(V) \subseteq X$ offen, also laufen die induktiven Limiten auf beiden Seiten von $(*)$ über dieselben offenen Mengen V.

(b) folgt hieraus, da $(f^{-1}G)_x = (f^P G)_x$.

Beispiel 3.14 Sei $x \in X$ und $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Für eine Garbe F auf X ist $i_x^{-1}F$ die (nach 3.9 (b)) eindeutig bestimmte Garbe auf $\{x\}$ mit

$$(i_x^{-1}F)_x \;=\; F_x$$

(Halm von F bei x). Dies folgt aus 3.13 (b), oder direkt: Es ist $(i_x^P F)(\{x\}) = \varinjlim_{x \in V} F(V) = F_x$ und damit $(i_x^{-1}F)_x = (i_x^P F)_x = (i_x^P F)(\{x\}) = F_x$.

Satz 3.15 (Adjunktion von f_* und f^{-1}). Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

(a) Für Prägarben P auf X und Q auf Y hat man kanonische Bijektionen, funktoriell in P und Q,

$$Hom_{\text{Prä}(X)}(f^P Q, P) \;\cong\; Hom_{\text{Prä}(Y)}(Q, f_*P)$$

(d.h., f^P ist linksadjungiert zu f_*).

(b) Für Garben F auf X und G auf Y hat man kanonische bifunktorielle Bijektionen

$$Hom_{\text{Gar}(X)}(f^{-1}G, F) \;\cong\; Hom_{\text{Gar}(Y)}(G, f_*F)$$

(d.h., f^{-1} ist linksadjungiert zu f_*).

Beweis (a): 1) Ist $\varphi : Q \to f_*P$ gegeben, so erhält man für $U \subseteq X$ offen und $W \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq W$ (also $U \subseteq f^{-1}(W)$) einen Morphismus

$$Q(W) \overset{\varphi_W}{\to} (f_*P)(W) = P(f^{-1}(W)) \to P(U)\,.$$

Dies ist verträglich mit Restriktionen für $W' \subseteq W$ offen (und $f(U) \subseteq W'$), und wir erhalten daher einen Morphismus

$$\psi_U : (f^P Q)(U) = \varinjlim_{W} Q(W) \to P(U)$$

(universelle Eigenschaft des induktiven Limes). Die Morphismen ψ_U sind wiederum verträglich mit Restriktionen in U und liefern einen Prägarben-Morphismus

$$\psi = (\psi_U) : f^P Q \to P\,.$$

2) Umgekehrt erhält man aus einem solchen ψ einen Morphismus $\varphi : Q \to f_*P$ wie folgt: Ist $V \subseteq Y$ offen, so ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen, $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, und wir erhalten

$$\varphi_V : Q(V) \to (f^P Q)(f^{-1}(V)) \overset{\psi}{\to} P(f^{-1}(V))\,.$$

Dies ist verträglich mit Restriktionen in V und liefert $\varphi = (\varphi_V)$.

Wir zeigen nun, dass die Zuordnungen

$$\Psi : \varphi \mapsto \psi \quad \text{und} \quad \Phi : \psi \mapsto \varphi$$

zueinander invers sind.

3) Ist $\varphi : Q \to f_*P$ gegeben, dazu $\psi = \Psi(\varphi) : f^PQ \to P$ nach 1) konstruiert, und zu diesem wieder $\varphi' = \Phi(\psi) : Q \to f_*P$ nach 2), so haben wir für $V \subseteq Y$ offen ein kommutatives Diagramm (betrachte $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ offen und $W = V \supset ff^{-1}(V) = f(U)$)

$$\begin{tikzcd}
\varphi'_V : Q(V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (f^PQ)(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\psi_{f^{-1}(V)}"] & P(f^{-1}(V)) \arrow[d, equal] \\
Q(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[ur] & (f_*P)(V) \arrow[r, "id"] & P(f^{-1}(V))\,,
\end{tikzcd}$$

also $\varphi' = \varphi$, d.h., $\Phi(\Psi(\varphi)) = \varphi$.

4) Ist umgekehrt $\psi : f^PQ \to P$ gegeben, dazu $\varphi : Q \to f_*P$ konstruiert, und dazu wieder $\psi' : f^PQ \to P$, so ist für $U \subseteq X$ offen und $W \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq W$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varphi_W : Q(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (f^PQ)(f^{-1}(W)) \arrow[r, "\psi_{f^{-1}(W)}"] \arrow[d, "res"] & P(f^{-1}(W)) \arrow[d, "res"] \\
Q(W) \arrow[r] & (f^PQ)(U) \arrow[r, shift left, "\psi_U"] \arrow[r, shift right, "\psi'_U"'] & P(U)
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit ψ_U und ψ'_U. Da dies für alle $W \supseteq f(U)$ gilt, folgt wegen $(f^PQ)(U) = \varinjlim Q(W)$ die Gleichheit $\psi_U = \psi'_U$, also $\Psi(\Phi(\psi)) = \psi$.

(b) folgt aus (a) wegen

$$Hom_{\mathrm{Gar}(X)}(f^{-1}G, F) \;=\; Hom_{\mathrm{Prä}(X)}(f^PG, F)$$

für Garben F und G (Eigenschaft der assoziierten Garbe).

Wir charakterisieren nun Monomorphismen und Epimorphismen von Prägarben und Garben.

Lemma 3.16 Sei $\varphi : P \to Q$ ein Morphismus von Prägarben von abelschen Gruppen auf X (man spricht auch von abelschen Prägarben). Dann ist φ genau dann ein Monomorphismus (bzw. Epimorphismus, bzw. Isomorphismus), wenn dies für alle Homomorphismen

$$\varphi_U \;:\; P(U) \;\to\; Q(U) \qquad (U \subseteq X \text{ offen})$$

gilt.

Die Situation bei Garben ist wie folgt.

Satz 3.17 Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von Garben von abelschen Gruppen auf X (man spricht auch von abelschen Garben).

(a) (Monomorphismen) Äquivalent sind:

(i) φ ist ein Monomorphismus.

(ii) $\varphi_x : F_x \to G_x$ ist injektiv für alle $x \in X$.

(iii) $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ ist injektiv für alle offenen $U \subseteq X$.

(b) (Epimorphismen) Äquivalent sind:

(i) φ ist ein Epimorphismus.

(ii) φ_x ist surjektiv für alle $x \in X$.

(iii) Ist $U \subseteq X$ offen und $t \in G(U)$, so gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U und Schnitte $s_i \in F(U_i)$ mit $\varphi_{U_i}(s_i) \ = \ t|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

(c) (Isomorphismen) Äquivalent sind:

(i) φ ist ein Isomorphismus.

(ii) φ_x ist bijektiv für alle $x \in X$.

(iii) φ_U ist bijektiv für alle offenen $U \subseteq X$.

Für die Beweise benötigen wir einige Vorbereitungen, die auch für sich von Interesse sind.

Definition 3.18 (a) Sei $\varphi : P \to Q$ ein Morphismus von abelschen Prägarben auf X. Definiere die Prägarben $\ker^P \varphi$ (Prägarben-Kern von φ), $\mathrm{im}^P\varphi$ (Prägarben-Bild von φ) und $\mathrm{coker}^P\varphi$ (Prägarben-Kokern von φ) durch

$$\begin{array}{rcl}(\ker^p \varphi)(U) & = & \ker(\varphi_U : P(U) \to Q(U)),\\ (\mathrm{im}^P\varphi)(U) & = & \mathrm{im}\,\varphi_U,\\ (\mathrm{coker}^P\varphi)(U) & = & \mathrm{coker}\,\varphi_U = Q(U)/\mathrm{im}\,\varphi_U\end{array}$$

für $U \subseteq X$ offen und die von P bzw. Q induzierten Restriktionen.

(b) Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von Garben auf X. Dann definiere die Garben

$$\begin{array}{rcll}\ker & := & \ker^P \varphi & \text{(Garben-Kern)}\\ \mathrm{im}\,\varphi & := & (\mathrm{im}^P\varphi)^+ & \text{(Gaben-Bild)}\\ \mathrm{coker}\,\varphi & := & (\mathrm{coker}^P\varphi)^+ & \text{(Garben-Kokern)}\,.\end{array}$$

Beweis dass $\ker^P \varphi$ im Fall (b) eine Garbe ist: Sei $U \subseteq X$ offen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U.

Ist $s \in (\ker^P \varphi)(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0$, da $(\ker\varphi)(U) \subseteq F(U)$ und F eine Garbe ist.

Sind weiter $s_i \in (\ker^P \varphi)(U_i)$ für $i \in I$ mit $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ für alle $i, j \in I$, so gibt zunächst ein $s \in F(U)$ mit $s_{U_i} = s_i$ für alle $i \in I$, da F eine Garbe ist. Aber es ist auch $s \in \ker^P \varphi$: Für $\varphi(s) \in G(U)$ gilt nämlich $\varphi(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0$ für alle $i \in I$, da $s_i \in (\ker^P \varphi)(U_i) = \ker\varphi_{U_i}$. Es folgt $\varphi(s) = 0$, da G eine Garbe ist.

Bemerkungen 3.19 (a) Ist P eine abelsche Prägarbe auf X und ist für jedes offene $U \subseteq X$ eine Untergruppe $P'(U) \subseteq P(U)$ gegeben, so dass die Restriktionen von P die Untergruppen $P'(U)$ ineinander überführen $(res_{U,U'}(P'(u)) \subseteq P'(U'))$, so definieren die $P'(U)$ mit den Einschränkungen der Restriktionen eine Prägarbe P' und man nennt P' eine Unter-Prägarbe von P. Sind P und P' Garben, so nennt man P' eine Untergarbe von P.

(b) In 3.18 (a) ist $\ker^p \varphi$ eine Unter-Prägarbe von P und $\mathrm{im}^P\varphi$ eine Unter-Prägarbe von Q.

(c) In 3.18 (a) ist $\ker\varphi$ eine Untergarbe von F, und wir werden später $\mathrm{im}\,\varphi$ mit einer Untergarbe von G identifizieren.

Definition/Lemma 3.20 (a) Eine Sequenz

$$(3.20.1) \qquad \ldots \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

von abelschen Prägarben auf X heißt Komplex, wenn $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{im}^P \varphi_{n-1} \subseteq \ker^P \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ für alle offene $U \subseteq X$ ist die induzierte Sequenz

$$(3.20.1)_U \qquad \ldots \to P_{n-1}(U) \to P_n(U) \to P_{n+1}(U) \to \ldots$$

ein Komplex).

(b) Ein Komplex (3.20.1) heißt exakt an der Stelle n (oder bei P_n), wenn $\mathrm{im}^P \varphi_{n-1} = \ker^P \varphi_N$ ($\Leftrightarrow$ für alle offenen $U \subseteq X$ ist $(3.19.1)_U$ exakt bei n), und exakt, wenn er exakt an allen Stellen ist.

(c) Ist eine Sequenz (3.20.1) exakt bei n, so ist für alle $x \in X$ die induzierte Sequenz

$$(3.20.1)_x \qquad \ldots \to (P_{n-1})_x \to (P_n)_x \to (P_{n+1})_x \to \ldots$$

der Halme exakt an der Stelle n (Halmbildung ist ein exakter Funktor).

Beweis der Behauptung in (c): 1) Mit $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} = 0$ ist natürlich auch $(\varphi_n)_x \circ (\varphi_{n-1})_x = (\varphi_n \circ \varphi_{n-1})_x = 0$, also $\mathrm{im}(\varphi_{n-1})_x \subseteq \ker(\varphi_n)_x$.

2) Sei $s_x \in \ker(\varphi_n)_x$, $s \in P_n(U)$, $U \subseteq X$ offene Umgebung von x. Wegen $0 = (\varphi_n)_x(s_x) = \varphi_{n,U}(s)_x$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x mit $0 = \varphi_{n,U}(s)|_V = \varphi_{n,V}(s|_V)$ Wegen Exaktheit von $(3.20.1)_V$ gibt es ein $t \in P_{n-1}(V)$ mit $\varphi_{n-1,V}(t) = s|_V$. Es folgt $\varphi_{n-1,x}(t_x) = s_x$, d.h., $s_x \in \mathrm{im}(\varphi_{n-1})_x$.

Beweis von Lemma 3.16: Sei $\varphi : P \to Q$ ein Morphismus von abelschen Prägarben.

1) Sind alle φ_U ($U \subseteq X$ offen) injektiv, so sieht man sofort, dass φ ein Monomorphismus ist ($\varphi\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$). Sind nicht alle φ_U injektiv, so ist $\ker^P \varphi \neq 0$ und in der Sequenz

$$\ker^P \varphi \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{\varphi}{\to} Q$$

ist j nicht die Nullabbildung, aber $\varphi j = 0$. Also ist φ kein Monomorphismus.

2) Der Beweis für Epimorphismen ist dual (alle Pfeile umdrehen, $\ker^P \varphi$ durch $\mathrm{coker}^P \varphi$ ersetzen): Sind alle φ_U surjektiv, so folgt sofort, dass φ ein Epimorphismus ist ($\beta\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0$). Sind nicht alle φ_U surjektiv, so ist in der kanonischen Sequenz

$$P \overset{\varphi}{\to} Q \overset{\pi}{\to} \mathrm{coker}^P \varphi$$

$\mathrm{coker}^P \varphi \neq 0$ und $\pi \neq 0$, aber $\pi\varphi = 0$, also φ kein Epimorphismus.

3) Sind alle φ_U Isomorphismen, so ist $\varphi^{-1} = (\varphi_U^{-1})$ ein Inverses von φ. Besitzt umgekehrt φ ein Inverses ψ, so ist ψ_U ein Inverses von φ_U.

Beweis von Satz 3.17 Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von abelschen Garben.

(a): Da $\ker^P \varphi$ bereits eine Garbe ist, zeigt der Beweis von 3.16 für Monomorphismen bereits: Ist φ ein Monomorphismus, so ist φ_U injektiv für alle U (offen in X). Gilt Letzteres, so ist $0 \to F \to G$ exakt als Sequenz von Prägarben, und mit 3.20 (c) folgt die Injektivität von

$\varphi_x : F_x \to G_x$ für alle $x \in X$. Gilt letzteres, so ist φ offenbar ein Monomorphismus: Ist $H \xrightarrow{\alpha} F$ ein Morphismus von abelschen Garben, und ist $\varphi\alpha = 0$, so ist $0 = (\varphi\alpha)_x = \varphi_x\alpha_x$ für alle $x \in X$, wegen der Injektivität der φ_x, also $\alpha_x = 0$ für alle x und damit $\alpha = 0$ (Lemma 3.4).

(b): Wir haben eine exakte Sequenz von abelschen Prägarben

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}^P\varphi \to 0\,,$$

und nach 3.20 (c) sind die Sequenzen

$$(*) \qquad F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\pi_x} (\mathrm{coker}^p\varphi)_x \to 0$$

für alle $x \in X$ exakt. Der Morphismus $\gamma : \mathrm{coker}^P\varphi \to (\mathrm{coker}^P\varphi)^+ = \mathrm{coker}\ \varphi$ induziert Isomorphismen

$$(**) \qquad (\mathrm{coker}^P\varphi)_x \xrightarrow{\sim} (\mathrm{coker}\ \varphi)_x$$

(Lemma 3.2). Betrachte nun die induzierte Sequenz von Garben

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi'} \mathrm{coker}\ \varphi$$

mit $\pi' = \gamma\pi$. In dieser ist $\pi'\varphi = 0$. Ist φ ein Epimorphismus, so ist $\pi' = 0$, wegen der Surjektivität von $\pi'_x : G_x \to (\mathrm{coker}\ \varphi)_x$, also $(\mathrm{coker}\ \varphi)_x = 0$ für alle $x \in X$, wegen $(**)$ also auch $(\mathrm{coker}^P\varphi)_x = 0$ für alle $x \in X$. Ist also $U \subseteq X$ offen, $s \in G(U)$ und $\overline{s} \in G(U)/\mathrm{im}\ \varphi_U = (\mathrm{coker}^P\varphi)(U)$ das Bild von s, dann gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U, so dass $\overline{s}|_{U_i} = 0$ in $(\mathrm{coker}^P\varphi)(U_i)$, also $s|_{U_i} \in\ \mathrm{im}\ \varphi_{U_i}$ (Eigenschaft (iii) in 3.17 (b)). Gilt andererseits letztere Eigenschaft für alle U und $s \in G(U)$, so folgt umgekehrt, dass $(\mathrm{coker}^P\varphi)_x = 0$ für alle $x \in X$, wegen Exaktheit der Sequenz $(*)$ also die Surjektivität von

$$\varphi_x : F_x \twoheadrightarrow G_x$$

für alle $x \in X$ (Eigenschaft (ii) in 3.17 (b)). Hieraus folgt wiederum, dass φ ein Epimorphismus ist (Eigenschaft (i) in 3.17 (b)): Ist $\beta : G \to K$ ein Morphismus von abelschen Garben, und ist

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\beta} K$$

die Nullabbildung, so folgt aus der Surjektivität der φ_x, dass alle $\beta_x = 0$, also dass $\beta = 0$ (Lemma 3.4).

Behauptung (c) von 3.17 folgt wie im Beweis von 3.16.

Lemma 3.21 Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von abelschen Garben auf X.

(a) Für $x \in X$ gilt kanonisch $(\ker\varphi)_x \cong \ker\varphi_x$.

(b) Der von $i : \mathrm{im}^P\varphi \hookrightarrow G$ induzierte Morphismus $\tilde{i} : \mathrm{im}\ \varphi \to G$ ist ein Monomorphismus; $\mathrm{im}\ \varphi$ kann also als Untergarbe von G aufgefasst werden. Für jedes $x \in X$ ist kanonisch $(\mathrm{im}\ \varphi)_x \cong \mathrm{im}\ \varphi_x$.

(c) Der von $\pi : G \to \mathrm{coker}^P\varphi$ induzierte Morphismus π': $G \to \mathrm{coker}\ \varphi$ ist ein Epimorphismus, und es ist kanonisch $(\mathrm{coker}\ \varphi)_x \cong \mathrm{coker}\ \varphi_x$.

Beweis Wir haben exakte Sequenzen von Prägarben

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\varphi \arrow[r, "i"] & F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & G \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}^P\varphi \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathrm{im}^P\varphi \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(d.h., die obere Sequenz ist exakt, und weiter sind

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \ker\varphi & \to & F & \to & \mathrm{im}^P\varphi & \to & 0 \\
0 & \to & \mathrm{im}^P\varphi & \to & G & \to & \mathrm{coker}^P\varphi & \to & 0
\end{array}$$

exakt); dabei ist das Dreieck

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr] \arrow[dr] & & G \\
& \mathrm{im}^P\varphi \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Nach 3.20 (c) erhalten wir exakte Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\ker\varphi)_x \arrow[r, "i_x"] & F_x \arrow[rr, "\varphi_x"] \arrow[dr] & & G_x \arrow[r, "\pi_x"] & (\mathrm{coker}^P\varphi)_x \arrow[r] & 0 \\
& & & (\mathrm{im}^P\varphi)_x \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

mit kommutativen Dreieck in der Mitte. Hieraus folgen sofort (a) und die letzten Aussagen in (b) und (c). Weiter induzieren die Morphismen

$$\begin{array}{ccccccc}
i & : & \mathrm{im}^P\varphi & \to & \mathrm{im}\ \varphi & \xrightarrow{\tilde{i}} & G \\
\pi' & : & G & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{coker}^P\varphi & \to & \mathrm{coker}\ \varphi
\end{array}$$

in den Halmen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc}
i_x & : & (\mathrm{im}^P\varphi)_x & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{im}\ \varphi)_x & \xrightarrow{(\tilde{i})_x} & G_x \\
(\pi')_x & : & G_x & \to & (\mathrm{coker}^P\varphi)_x & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{coker}\ \varphi)_x
\end{array}$$

Daher ist $(\tilde{i})_x$ injektiv und $(\pi')_x$ surjektiv für alle $x \in X$, und die Behauptungen in (b) und (c) folgen mit 3.17.

Lemma/Definition 3.22 (a) Sei

(3.22.1) $$\ldots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n+1} \to \ldots$$

eine Sequenz von abelschen Garben auf X. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{im}\ \varphi_{n-1} \subseteq \ker\varphi_n$. Gilt dies für alle $n \in \mathbb{Z}$, dann heißt (3.22.1) ein Komplex von Garben.

(b) Ein Komplex von Garben (3.22.1) heißt exakt an der Stelle n (oder bei F_n), wenn im $\varphi_{n-1} = \ker \varphi_n$. Dies gilt genau dann, wenn für alle $x \in X$ die assoziierte Sequenz der Halme

$$\ldots \to (F_{n-1})_x \to (F_n)_x \to (F_{n+1})_x \to \ldots \tag{3.22.1}$$

exakt an der Stelle n ist. Der Komplex (3.22.1) heißt exakt, wenn er exakt an allen Stellen ist.

Beweis der Behauptungen:
(a): Offenbar gilt $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{im}^P \varphi_{n-1} \subseteq \ker \varphi_n$ ist. Gilt Letzteres, so haben wir wegen der universellen Eigenschaft der assoziierten Garbe eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{im}^P \varphi_{n-1} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & G \\
 & \mathrm{im}\ \varphi_{n-1} \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

also im $\varphi_{n-1} \subseteq \ker \varphi_n$. Aus dieser Inklusion folgt umgekehrt $\mathrm{im}^P \varphi_{n-1} \subseteq \mathrm{im}\ \varphi_{n-1} \subseteq \ker \varphi_n$.

(b): Für zwei Untergarben $G \subseteq H \subseteq F_n$ gilt $G = H$ genau dann, wenn $G_x = H_x$ für alle $x \in X$. Wenden wir dies auf im $\varphi_{n-1} \subseteq \ker \varphi_n$ an, so folgt die Behauptung wegen (im $\varphi_{n-1})_x = \mathrm{im}(\varphi_{n-1})_x$ und $(\ker \varphi_n)_x = \ker(\varphi_n)_x$ (Lemma 3.21).

Proposition 3.23 (universelle Eigenschaft von Kern und Kokern) Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von abelschen Garben.

(a) Ist $\psi : H \to F$ ein Morphismus von abelschen Garben mit $\varphi\psi = 0$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\psi' : H \to \ker \varphi$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker \varphi \arrow[r, hook] & F \arrow[r, "\varphi"] & G \\
 & H \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, dashed, "\exists!\, \psi'"] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

(b) Ist $\psi : G \to H$ ein Morphismus von abelschen Garben mit $\psi\varphi = 0$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\overline{\psi} : \mathrm{coker}\ \varphi \to H$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H & \\
F \arrow[r, "\varphi"] & G \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, two heads] & \mathrm{coker}\ \varphi \arrow[ul, dashed, "\exists!\, \overline{\psi}"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis Übungsaufgabe! (Tipp: Die Behauptungen folgen aus dem entsprechenden Resultat für Prägarben-Kerne und -Kokerne)

Definition 3.24 (a) Für eine abelsche Prägarbe Q auf X und eine Unter-Prägarbe $P \subseteq Q$ definiere den Prägarben-Quotienten als

$$(Q/P)^P = \operatorname{coker}^P(P \hookrightarrow Q)\,,$$

also durch $(Q/P)^P(U) = Q(U)/P(U)$, mit den offensichtlichen Restriktionen.

(b) Für eine abelsche Garbe F auf X und eine Untergarbe (von abelschen Gruppen) $E \subseteq F$ definiere den Garben-Quotienten als

$$\begin{aligned} F/E &= \operatorname{coker}(E \hookrightarrow F) \\ &= ((F/E)^P)^+\,. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.25 In der Situation von 3.23 (a) bzw. (b) haben wir eine exakte Sequenz von Prägarben

$$0 \to P \to Q \to Q/P \to 0$$

bzw. eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \to E \to F \to F/E \to 0\,.$$

Lemma 3.26 (Homomorphiesatz) Ein Morphismus $\varphi : F \to G$ von abelschen Garben induziert einen Garbenisomorphismus

$$F/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi\,.$$

Beweis Wir haben einen Isomorphismus von abelschen Prägarben

$$(F/\ker\varphi)^P \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}^P\varphi\,,$$

und die Behauptung folgt durch Garbifizierung (Übergang zu den assoziierten Garben).

Bemerkung 3.27 Proposition 3.23 und Lemma 3.26 sind die Hauptpunkte um zu zeigen, dass die abelschen Garben auf X eine sogenannte abelsche Kategorie bilden (siehe den Anhang 3.A).

3.A Adjungierte Funktoren und abelsche Kategorien

Adjungierte Funktoren treten sehr oft auf; viele universelle Probleme hängen mit adjungierten Funktoren zusammen bzw. werden durch diese gelöst.

Definition 3.A.1 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Kategorien, und seien $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwei (kovariante) Funktoren. Dann heißt g linksadjungiert zu f (und f rechtsadjungiert zu g), wenn es Bijektionen

$$a_{A,B} : Hom_{\mathcal{A}}(g(B), A) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{B}}(B, f(A)) \tag{3.A.1.1}$$

für alle Objekte A in $\mathcal{A}$ und B in $\mathcal{B}$ gibt, die funktoriell in A und in B sind: Das heißt, für jeden Morphismus $\alpha : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\gamma \arrow[d, mapsto] & Hom_{\mathcal{A}}(g(B), A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & Hom_{\mathcal{B}}(B, f(A)) \arrow[d, "f(\alpha)_*"] & \delta \arrow[d, mapsto] \\
\alpha\gamma & Hom_{\mathcal{A}}(g(B), A') \arrow[r, "\sim"] & Hom_{\mathcal{B}}(B, f(A')) & f(\alpha)\delta
\end{tikzcd}$$

kommutativ, und für $\beta : B \to B'$ ist

$$\begin{tikzcd}
\gamma g(\beta) & Hom_{\mathcal{A}}(g(B), A') \arrow[r, "\sim"] & Hom_{\mathcal{B}}(B, f(A')) & \delta\beta \\
\gamma \arrow[u, mapsto] & Hom_{\mathcal{A}}(g(B'), A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "g(\beta)^*"] & Hom_{\mathcal{B}}(B', f(A)) \arrow[u, "\beta^*"'] & \delta \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Sei $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ linksadjungiert zu $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ und jedes Objekt B in $\mathcal{B}$ erhalten wir den Bijektionen (3.A.1.1) kanonische Morphismen (im Folgenden lassen wir einige Klammern weg)

$$ad_B \;:\; B \;\to\; fgB \tag{3.A.1.2}$$

(das Bild von id_{gB} unter $a_{gB,B}$ in (3.A.1.1)) und

$$Ad_A \;:\; gfA \;\to\; A \tag{3.A.1.3}$$

(das Urbild von id_{fA} unter $a_{A,fA}$ in (3.A.1.1)).

Aus der Bifunktorialität von (3.A.1.1) folgt:

Lemma 3.A.2 (a) Die Abbildung (3.A.1.1) bildet $\gamma : gB \to A$ auf die Komposition

$$B \xrightarrow{ad_B} fdB \xrightarrow{f(\gamma)} fA$$

ab.

Das Urbild von $\delta : B \to fA$ unter (3.A.1.1) ist die Komposition

$$gB \xrightarrow{g(\delta)} gfA \xrightarrow{Ad_A} A\,.$$

Beweis (a) folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
id_{gB} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & ad_B \arrow[ddd, mapsto] \\
& Hom(gB, gB) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_*"'] & Hom(B, fgB) \arrow[d, "f(\gamma)_*"] & \\
& Hom(gB, A) \arrow[r] & Hom(B, fA) & \\
\gamma \arrow[rrr, mapsto] & & & f(\gamma)ad_B
\end{tikzcd}$$

(b) ist analog.

Insbesondere wird die Adjunktion durch die ad_B und Ad_A bestimmt.

Corollar 3.A.3 (a) Für B in $\mathcal{B}$ ist die Komposition

$$gB \xrightarrow{g(ad_B)} gfgB \xrightarrow{Ad_{gB}} gB$$

die Identität.
(b) Für A in $\mathcal{A}$ ist die Komposition

$$fA \xrightarrow{ad_{fA}} fgfA \xrightarrow{f(Ad_A)} fA$$

die Identität.
Dies folgt daraus, dass die Zuordnungen in 3.A.2 (a) und (b) zueinander invers sind.

Aus der Bifunktorialität von 3.A.1.1) folgt weiter:

Lemma 3.A.4 (a) ad_B ist funktoriell in B, d.h., für $\beta : B \to B'$ in $\mathcal{B}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "ad_B"] \arrow[d, "\beta"'] & fgB \arrow[d, "fg(\beta)"] \\
B' \arrow[r, "ad_{B'}"] & fgB'
\end{tikzcd}$$

kommutativ.
(b) Ad_A ist kommutativ in A, d.h., für $\alpha : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
gfA \arrow[r, "Ad_A"] \arrow[d, "gf(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
gfA' \arrow[r, "Ad_{A'}"] & A'
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis (a) bedeutet die Gleichheit

$$fg(\beta)ad_B \; = \; ad_{B'}\beta$$

und folgt aus dem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
id_{g(B)} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & & ad_B \arrow[dd, mapsto] \\
& Hom(gB, gB) \arrow[r] \arrow[d, "g(\beta)_*"'] & Hom(B, fgB) \arrow[d, "fg(\beta)_*"] & \\
g(\beta) & Hom(gB, gB') \arrow[r] & Hom(B, fgB') & \begin{array}{c} fg(\beta)ad_B \\ ad_{B'}\beta \end{array} \\
& Hom(gB', gB') \arrow[r] \arrow[u, "g(\beta)^*"] & Hom(B', fgB') \arrow[u, "fg(\beta)^*"'] & \\
id_(g(B')) \arrow[uu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & ad_{B'} \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

(b) ist analog.

Lemma 3.A.4 bedeutet, dass wir Morphismen von Funktoren

$$ad: \; id_{\mathcal{B}} \;\to\; fg \tag{3.A.4.1}$$

$$Ad: \; gf \;\to\; id_A \tag{3.A.4.2}$$

erhalten.

Umgekehrt sieht man leicht: Hat man Morphismen von Funktoren (3.A.4.1) und (3.A.4.2), die die Eigenschaften von Lemma 3.A.2 erfüllen, so ist g linksadjungiert zu f, wobei die Abbildung (3.A.1.1) gerade durch die Vorschrift 3.A.2 gegeben ist.

Wir bemerken noch:

Lemma 3.A.5 (a) Besitzt f ein Linksadjungiertes g, so ist dies bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

(b) Besitzt g ein Rechtsadjungiertes f, so ist dies bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

Beweis Dies folgt aus dem Yoneda-Lemma (siehe 1.A.2). Ist nämlich B in $\mathcal{B}$ fest, so ist der kovariante Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \underline{Sets} \\ A & \mapsto & Hom_{\mathcal{B}}(B, fA) \end{array}$$

durch $g(B)$ darstellbar; dies bedeutet die Bijektion

$$Hom_{\mathcal{A}}(g(B), A \;\cong\; Hom_{\mathcal{B}}(B, fA)\,, \tag{3.A.5.1}$$

die funktoriell in B ist. Ist diese Bijektion vorgegeben (für alle A in $\mathcal{A}$), so ist $g(B)$ bis auf kanonische Isomorphismen eindeutig. Die Funktorialität von (3.A.5.1) in $\mathcal{B}$ impliziert, dass die Zuordnung $B \mapsto gB$ funktoriell ist.

(b) ist analog.

Beispiele 3.A.6 Beispiele für adjungierte Funktoren gibt es in 3.6 und 3.15, aber auch 4.6 ist ein Beispiel: Für ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} (A\text{-Moduln}) & \to & (\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \\ M & \mapsto & \tilde{M} \end{array}$$

linksadjungiert zum Funktor

$$\mathcal{F}(X) \leftarrow\!\shortmid \mathcal{F}\,.$$

Aber auch Satz 5.9 (man halte $\mathcal{F}$ oder $\mathcal{G}$ fest) und Satz 5.18 sind Beispiele für Adjunktionen.

Adjunktionsmorphismen werden in Abschnitt 6 benutzt (siehe Bemerkung 6.7 und den Beweis von 6.6)

Wir kommen nun zu abelschen Kategorien.

Abelsche Kategorien sind Kategorien, in denen man mit den gleichen Begriffen arbeiten kann wie in der Kategorie $\underline{Ab}$ der abelschen Gruppen oder, allgemeiner, der Kategorie $\underline{Mod}_R$ der Moduln über einem Ring R. Insbesondere kann man Morphismen addieren, und man hat Begriffe wie Kerne, Kokerne und exakte Sequenzen.

Definition 3.A.7 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Ein Objekt I in $\mathcal{C}$ heißt **initial**, wenn es für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $I \to X$ gibt.

(b) Ein Objekt F in $\mathcal{C}$ heißt **final**, wenn es für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $X \to F$ gibt.

Beispiele 3.A.8 (a) In der Kategorie aller Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein initiales Objekt.

(b) In der Kategorie aller Schemata ist $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ein finales Objekt: Für jedes Schema X besteht

$$Hom(X, \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = Hom(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_X(X))$$

nur aus einem Element.

(c) In der Kategorie $\underline{\text{Sets}}$ aller Mengen ist die leere Menge ein initiales und jede Menge mit einem Element ein finales Objekt.

Bemerkung 3.A.9 Initiale oder finale Objekte müssen nicht existieren; zum Beispiel hat die Kategorie der Körper weder initiale noch finale Objekte. Existieren aber initiale oder finale Objekte, so sind sie bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

Definition 3.A.10 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt additiv, wenn gilt:

(a) Für alle Objekte A, B in $\mathcal{C}$ ist auf $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine Verknüpfung $+$ gegeben, die diese Menge zu einer abelschen Gruppe macht, und sind A, B, C drei Objekte in $\mathcal{C}$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) & \mapsto & gf \end{array}$$

bilinear:

$$\begin{array}{rcl} g(f_1 + f_2) & = & gf_1 + gf_2, \\ (g_1 + g_2)f & = & g_1 f + g_2 f\,. \end{array}$$

(b) Es gibt ein Objekt 0 in $\mathcal{C}$ mit

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, 0) = 0 = Hom_{\mathcal{C}}(0, A)$$

für jedes Objekt A in $\mathcal{C}$.

(c) In $\mathcal{C}$ existiert zu je zwei Objekten A, B die Summe $A \oplus B$.

Bemerkungen 3.A.11 (a) Bedingung 3.A.10 (b) bedeutet, dass 0 initiales und finales Objekt in $\mathcal{C}$ ist.

(b) Es folgt, dass in $\mathcal{C}$ auch zu je zwei Objekten auch das Produkt existiert – und zwar erfüllt $A \oplus B$ auch die universelle Eigenschaft des Produkts: Seien $i_A : A \to A \oplus B$ und $i_B : B \to A \oplus B$ die kanonischen Morphismen der Summe und definiere

$$\begin{array}{rclcccc} p_A & = & id_A + 0 & : & A \oplus B & \to & A \\ p_B & = & 0 + id_B & : & A \oplus B & \to & B\,, \end{array}$$

d.h., p_A und p_B sind mittels der universellen Eigenschaft der Summe dadurch festgelegt, dass

$$\begin{array}{rcl} p_A i_A &=& id_A \quad \text{und} \quad p_A i_B = 0 \\ p_B i_A &=& 0 \quad \text{und} \quad p_B i_B = id_B\,. \end{array} \tag{3.A.11.1}$$

Ist nun X ein Objekt in $\mathcal{C}$ und sind Morphismen

$$f_A : X \to A\,,\ f_B : X \to B$$

gegeben, so gibt es genau einen Morphismus

$$f : X \to A \oplus B$$

mit $p_A f = f_A$ und $p_B f = f_B$, nämlich den Morphismus

$$f := i_A f_A + i_B f_B \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A \oplus B)\,.$$

Denn aus (3.A.11.1) folgt sofort $p_A f = f_A$ und $p_B f = f_B$. Weiter folgt aus der universellen Eigenschaft der Summe $A \oplus B$, dass

$$h := i_A p_A + i_B p_B = id_{A \oplus B}\,, \tag{3.A.11.2}$$

denn es gilt $hi_A = i_A$ und $hi_B = i_B$. Ist nun $g : Z \to A \oplus B$ ein weiterer Morphismus mit $p_A g = f_A$ und $p_B g = f_B$, so folgt

$$g = hg = i_A p_A g + i_B p_B g = i_A f_A + i_B f_B = f\,.$$

(c) Natürlich existieren in $\mathcal{C}$ auch beliebige Summen und Produkte (durch Iteration), und es ist $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Corollar 3.A.12 Die Gruppenstruktur auf $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist eindeutig bestimmt, d.h., hängt nur von $\mathcal{C}$ ab.

Beweis Für $f, g : A \to B$ ist $f + g$ die Komposition

$$A \xrightarrow{(id_A, id_A)} A \oplus A \xrightarrow{f \oplus g} B \oplus B \xrightarrow{id_B + id_B} B\,,$$

wobei der erste bzw. letzte Morphismus durch die universellen Eigenschaften von Produkt bzw. Summe gegeben sind und $f \oplus g$ durch die Funktorialität der Summe, die leicht aus der universellen Eigenschaft folgt (vergleiche den analogen Fall in 1.A.7).

Definition 3.A.13 Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und sei $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.

(a) Ein Objekt K mit einem Morphismus $i : K \to A$ heißt Kern von f, wenn gilt:

(i) $fi = 0$.

(ii) Ist $g : X \to A$ ein Morphismus mit $ig = 0$, so existiert genau ein Morphismus $g' : A \to K$ mit $g = ig'$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & X \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "\exists! g'"] & \end{tikzcd}$$

(b) Ein Objekt C mit einem Morphismus $\pi : B \to C$ heißt Kokern von f, wenn gilt:

(i) $\pi f = 0$.

(ii) Ist $h : B \to Y$ ein Morphismus mit $hf = 0$, so gibt es genau einen Morphismus $\overline{h} : C \to Y$ mit $h = \overline{h}\pi$:

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\pi"] & C\,. \arrow[ul, dashed, "\exists! \overline{h}"'] \end{tikzcd}$$

Kerne und Kokerne müssen nicht existieren; wenn sie aber existieren, sind die Paare (K, i), bzw. (C, π) bis auf kanonische Isomorphie eindeutig (wie man leicht sieht), und wir schreiben $\ker f$ bzw. coker$f$ für K bzw C.

Bemerkung 3.A.14 Mit den Bezeichnungen aus 1.A.18 und 1.A.19 ist $\ker f = \ker(f, 0)$ und $\mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}(f, 0)$, wobei 0 der Nullmorphismus in $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist.

Lemma 3.A.15 Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie, und sei $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.

(a) f ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\ker(f) = 0$.

(b) f ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $\mathrm{coker}(f) = 0$.

Beweis Wir zeigen nur (a); der Beweis von (b) ist dual (Umdrehen aller Pfeile). Zunächst ist f genau dann ein Monomorphismus, wenn für jeden Morphismus $g : X \to A$ gilt

$$fg = 0 \quad \Rightarrow \quad g \; = \; 0\,. \tag{3.A.15.1}$$

Sind nämlich $g_1, g_2 : X \to A$ zwei Morphismen und $g = g_1 - g_2$, so gilt

$$\begin{array}{rcl} fg_1 & = & fg_2 \\ g_1 & = & g_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} fg & = & 0 \\ g & = & 0\,. \end{array}$$

Gilt aber (3.A.15.1), so faktorisiert jeder Morphismus $g : X \to A$ mit $fg = 0$ über das Nullobjekt 0, notwendigerweise in eindeutiger Weise, also existiert $\ker(f)$ und ist gleich 0. Die Umkehrung ist klar.

Lemma 3.A.16 Sei $f : A \to B$ ein Morphismus.

(a) Existiert der Kern von f, so ist

$$\ker(f) \xrightarrow{i} A$$

ein Monomorphismus.

(b) Existiert der Kokern von f, so ist

$$B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f)$$

ein Epimorphismus.

Beweis (vergleiche auch 1.A.20) Wir zeigen (a); der Beweis von (b) ist dual (Umdrehen aller Pfeile). Sei $g : X \to \ker(g)$ ein Morphismus mit $ig = 0$. Dann ist auch $fig = 0$. Nach der universellen Eigenschaft des Kerns gibt es genau einen Morphismus $g' : X \to \ker(g)$ mit $ig' = ig = 0$. Dies kann nur sein, wenn $g = 0$ ist. Nach 3.A.15 haben wir also gezeigt, dass i ein Monomorphismus ist.

Definition 3.A.17 Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **abelsch**, wenn gilt:

(i) $\mathcal{A}$ ist additiv.

(ii) Für jeden Morphismus f in $\mathcal{A}$ existieren

$$\begin{array}{ll} \text{Kern:} & \ker(f) \xrightarrow{i} A \qquad \text{und} \\ \text{Kokern:} & B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f)\,. \end{array}$$

(iii) Dabei ist der kanonische Morphismus

$$f_0 : \mathrm{coker}(i) \to \ker(\pi)$$

ein Isomorphismus.

Wir erklären Bedingung (iii): Nach Definition ist $fi = 0$, also gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\overline{f} : \mathrm{coker}(i) \to B$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\ & & \mathrm{coker}(i) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Nach Definition ist weiter $0 = \pi f = \pi\overline{f}\pi'$, also $\pi\overline{f} = 0$, da π' ein Epimorphismus ist (3.A.16 (b)). Es gibt also einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f_0 \ : \ \mathrm{coker}(i) \ \to \ \ker(\pi)\,, \tag{3.A.17.1}$$

der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\
& \mathrm{coker}(i) \arrow[r, "f_0"] \arrow[ur, "\overline{f}"] & \ker(\pi)\,. \arrow[u, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

Zusammen erhält man die folgende symmetrische Beschreibung: Es gibt genau einen Morphismus f_0, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\
& \mathrm{coker}(i) \arrow[r, "f_0"] & \ker(\pi)\,. \arrow[u, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

In einer abelschen Kategorie haben wir die zusätzliche Eigenschaft, dass f_0 ein Isomorphismus ist (dies folgt nicht aus den anderen Axiomen!). Man nennt

$$\ker(\pi) \ = \ \ker(B \to \mathrm{coker}(f))$$

auch das Bild von f, Bezeichnung $im(f)$, und

$$\mathrm{coker}(i) \ = \ \mathrm{coker}(\ker(f) \to A)$$

das Kobild, Bezeichnung $\mathrm{coim}(f)$. In einer abelschen Kategorie können wir beide identifizieren und benutzen nur das Bild von f, $im(f)$.

Corollar 3.A.18 In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ lässt sich jeder Morphismus $f : A \to B$ in der Form

$$f : A \overset{p}{\twoheadrightarrow} im(f) \overset{j}{\hookrightarrow} B \tag{3.A.18.1}$$

faktorisieren, mit einem Epimorphismus p und einem Monomorphismus j.

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen können wir $p = f_0\pi'$ und $j = i'$ nehmen.

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition 3.A.19 Ist $i : A \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus, so definiere

$$B/A \ := \ \mathrm{coker}(i)\,.$$

Satz 3.A.20 (Homomorphiesatz) Ist $f : A \to B$ ein Morphismus in einer abelschen Kategorie, so induziert f einen Isomorphismus

$$A/\ker(f) \xrightarrow{\sim} im(f)\,.$$

Beweis Dies ist gerade Inhalt des Axioms (iii) in 3.A.17.

Definition 3.A.21 (a) Eine Sequenz in $\mathcal{A}$

$$\ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$$

heißt Komplex, wenn $f_n\, f_{n-1} = 0$ für alle n.

(b) Ein Komplex in $\mathcal{A}$

$$\ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$$

heißt exakt an der Stelle n (oder bei A_n), wenn $im(f_{n-1}) = \ker(f_n)$, und exakt, wenn er exakt an allen Stellen ist.

Erklärung: Wir haben eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} A_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A_n \arrow[r, "f_n"] & A_{n+1} \\ & im(f_{n-1}) \arrow[ur, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

mit einem Epimorphismus π und einem Monomorphismus i, siehe (3.A.18.1). Da $0 = f_n\, f_{n-1} = f_n i\pi$ und π ein Epimorphismus ist, ist auch $f_n i = 0$. Hieraus folgt wiederum, dass es eine kanonische Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} ker(f_n) \arrow[rr, hook] & & A_n \arrow[r, "f_n"] & A_{n+1} \\ & im(f_{n-1}) \arrow[ul, hook, "i'"] \arrow[ur, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

gibt, wobei i' automatisch ein Monomorphismus ist. Dies entspricht also einer Inklusion "$im(f_{n-1}) \subseteq \ker(f_n)$" im bekannten Fall von abelschen Gruppen. Die Bedingung

$$im(f_{n-1}) = \ker(f_n)$$

in 3.A.21 (b) soll im abstrakten Rahmen bedeuten, dass i' ein Isomorphismus ist.

Beispiele 3.A.22 (a) Für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{A}$ haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(f) \overset{i}{\hookrightarrow} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(f) \to 0\,,$$

die sich wiederum in exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker(f) & \to & A & \to & im(f) & \to & 0 \\ 0 & \to & im(f) & \to & B & \to & \operatorname{coker}(f) & \to & 0 \end{array}$$

aufspaltet.

(b) Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0\,.$$

In ihr identifiziert sich A mit $\ker(\pi)$ und C mit $\operatorname{coker}(i)$, also mit B/A.

4 Quasi-kohärente Modulgarben

Für Schemata gibt es spezielle Klassen von Garben, die besonders wichtig sind.

Definition 4.1 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema (oder geringter Raum).

(a) Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe (oder: ein $\mathcal{O}_X$-Modul) auf X ist eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X zusammen mit Abbildungen

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)\,,$$

für jedes offene $U \subseteq X$, die $\mathcal{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}_X(U)$-Modul machen und verträglich mit Restriktionen sind: Für $V \subseteq U$ ist

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "res \times res"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "res"] \\
\mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

(b) Ein Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Garbenmorphismus, so dass für alle $U \subseteq X$ offen die Abbildung

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X(U)$-Moduln ist.

Beispiel 4.2 $\mathcal{O}_X$ ist eine Modulgarbe über sich selbst.

Wir kommen nun zu einer wichtigen Konstruktion von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

Satz 4.3 (vergleiche Alg. Geo. I Satz 9.11) Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Dann gibt es eine kanonische $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\tilde{M}$ auf dem affinen Schema $X = (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\psi :\ M \ \overset{\sim}{\to}\ \tilde{M}(X)$$

von A-Moduln.

(b) Für jedes $f \in A$ induziert ψ einen Isomorphismus von A_f-Moduln

$$\psi_f :\ M_f \ \overset{\sim}{\to}\ \tilde{M}(D(f))\,.$$

(c) Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ induziert ψ einen Isomorphismus von $A_\mathfrak{p}$-Moduln

$$\psi_\mathfrak{p} :\ M_\mathfrak{p} \ \overset{\sim}{\to}\ \tilde{M}_\mathfrak{p}\,.$$

1. Beweis (vergleiche loc. cit.) Setze für $U \subseteq X$ offen

$$\tilde{M}(U) = \{f : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p} \mid f \text{ erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) unten } \}\,.$$

(i) Es ist $f(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$.

(ii) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ gibt es eine Umgebung $D(g)$ von $\mathfrak{p}$ und ein Element $\frac{m}{g^n} \in M_\mathfrak{p}$ ($m \in M, n \in \mathbb{N}_0$) mit $f(\mathfrak{q}) = \frac{m}{g_n}$ für alle $\mathfrak{q} \in D(g)$.

Es folgt leicht, dass man zusammen mit der Einschränkungsabbildungen eine Garbe erhält. Da $\mathcal{O}_X(U)$ ähnlich beschrieben werden kann (loc. cit.), sieht man weiter, dass $\tilde{M}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist, und $\tilde{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Die Eigenschaften (a), (b), (c) zeigt man analog wie im Beweis von Alg. Geo. I 9.11.

Definition 4.4 Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema X heißt **quasi-kohärent**, wenn es für jedes $x \in X$ eine affine offene Umgebung $U = \mathrm{Spec}(A)$ von x und einen A-Modul M gibt, so dass

$$\mathcal{F}|_U \;\cong\; \tilde{M}$$

(Isomorphismus von $\mathcal{O}_U$-Modulgarben).

Satz 4.5 Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Ist $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ ein affines offenes Unterschema, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{O}_U$-Modulgarben

$$\mathcal{F}|_U \;\cong\; \tilde{M}$$

für den A-Modul $M = \mathcal{F}(U)$.

Beweis: später!

Satz 4.6 Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema, M ein A-Modul und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & Hom_A(M, \mathcal{F}(X)) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_X : M = \tilde{M}(X) \to \mathcal{F}(X) \end{array}$$

ein Isomorphismus (Hier stehen links die $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismen und rechts die A-Modul-Homomorphismen).

Hierzu benutzen wir:

Lemma 4.7 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X. Sei $\mathfrak{U}$ eine Basis der Topologie. Gibt es für jedes $U \in \mathfrak{U}$ einen $\mathcal{O}_X(U)$-Modul-Homomorphismus

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\,,$$

und sind für $U, V \in \mathfrak{U}$ mit $V \subseteq U$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle res} & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array} \tag{4.7.1}$$

kommutativ, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

$$\phi \;:\; \mathcal{F} \;\to\; \mathcal{G}$$

mit $\phi_U = \varphi_U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$.

Beweis Für eine beliebige offene Menge $W \subseteq X$ haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & s \longmapsto (res_{W,U}(s)) \\ \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{res_{\mathcal{F}}} & \prod\limits_{U\in\mathfrak{U}, U\subseteq W} \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow (\varphi_U) \\ \mathcal{G}(W) & \xrightarrow{res_{\mathcal{G}}} & \prod\limits_{U\in\mathfrak{U}, U\subseteq W} \mathcal{G}(U) \end{array}$$

mit horizontalen Injektionen, da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben sind und die $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subseteq W$ eine Überdeckung von W bilden. Wir behaupten, dass es eine Abbildung ϕ_W links gibt, die das Diagramm kommutativ macht. Wegen der Injektivität ist diese dann eindeutig bestimmt und ein $\mathcal{O}_X(W)$-Modul-Homomorphismus.

Für $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ mit $U_1, U_2 \subseteq W$ und jedes $U_3 \in \mathfrak{U}$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ gilt aber für $s \in \mathcal{F}(W)$:

$$\varphi_{U_1}(s|_{U_1})|_{U_3} = \varphi_{U_3}(s|_{U_3}) = \varphi_{U_2}(s|_{U_2})|_{U_3}$$

nach (4.7.1), also

$$\varphi_{U_1}(s|_{U_1})|_{U_1\cap U_2} = \varphi_{U_2}(s|_{U_2})|_{U_1\cap U_2}\,,$$

da die $U_3 \in \mathfrak{U}$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ eine Überdeckung von $U_2 \cap U_2$ bilden und $\mathcal{G}$ eine Garbe ist. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, gibt es also ein eindeutig bestimmtes $t \in \mathcal{G}(W)$ mit

$$t|_U \;=\; \varphi_U(s|_U) \quad \text{für alle } U \in \mathfrak{U}_W\,, \tag{4.7.2}$$

und wir definieren $\phi_W(s) := t$. Dann sind die so erhaltenen Abbildungen ϕ_W verträglich mit Restriktionen für $W' \subseteq W$, und es gilt nach (4.7.2), dass $\phi_U = \varphi_U$ für $U \in \mathfrak{U}$.

Hiermit Beweis von Satz 4.6: Wir definieren eine Umkehrabbildung. Sei ein A-Modul-Homomorphismus $\psi : M \to \mathcal{F}(X)$ gegeben. Um einen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\varphi : \tilde{M} \to \mathcal{F}$ zu definieren, genügt es nach 4.7 – da $(D(f))_{f\in A}$ eine Basis der Topologie von $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist – mit Restriktionen verträgliche A_f-Modulhomomorphismen

$$\psi_f : \; M_f = \tilde{M}(D(f)) \to \mathcal{F}(D(f))$$

zu definieren. Wir haben aber Homomorphismen von A-Moduln

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}(X) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle res} \\ & & \mathcal{F}(D(f))\,, \end{array}$$

und da $\mathcal{F}(D(f))$ ein A_f-Modul ist, ist die Multiplikation mit f ein Isomorphismus hierauf. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung existiert also genau ein A_f-Modulhomomorphismus $\psi_f : M_f \to \mathcal{F}(D(f))$ der

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}(X) \\ {\scriptstyle can}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle res} \\ M_f & \xrightarrow{\psi_f} & \mathcal{F}(D(f)) \end{array}$$

kommutativ macht. Wegen der Eindeutigkeit sind diese ψ_f mit Restriktionen für $D(f) \supseteq D(g) = D(fg)$ verträglich. Wir erhalten also $\varphi : \tilde{M} \to \mathcal{F}$ wie gewünscht, welches auf ψ abgebildet wird. Weiter ist φ eindeutig durch ψ bestimmt, da die ψ_f eindeutig sind.

Beweis von Satz 4.5 Sei X ein Schema, $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $U = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines offenes Unterschema von X.

Behauptung: $\mathcal{F}|_U$ ist quasi-kohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul.

Beweis: Sei $x \in U$. Nach Voraussetzung gibt es eine affine offene Umgebung $V = \operatorname{Spec}(B) \subseteq X$ von x und einen B-Modul N, so dass

(4.5.1) $$\mathcal{F}|_V \;\cong\; \tilde{N}$$

als $\mathcal{O}_V$-Modul. Da $U \cap V$ eine offene Umgebung von x ist, gibt es ein $g \in B$ mit

$$x \in D(g) = D_B(g) \subseteq U \cap V \subseteq V = \operatorname{Spec}(B)\,.$$

Aus (4.5.1) folgt

(4.5.2) $$\mathcal{F}|_{D(g)} \;\cong\; \tilde{N}_g \quad \text{auf} \quad D(g) = \operatorname{Spec}(B_g)$$

für den B_g-Modul N_g, denn es ist $\mathcal{F}(D(g)) = N_g$ nach (4.5.1) und 4.3 (b), und für $h \in B$ mit $D(h) \subseteq D(g)$ gilt

$$\mathcal{F}(D(h)) \;=\; N_h \;=\; (N_g)_h\,,$$

und dies ist verträglich mit Restriktionen. Da die $D(h)$ mit $h \in B$ und $D(h) \subseteq D(g)$ eine Basis der Topologie für $D(g)$ bilden, folgt mit Lemma 4.7 die Isomorphie (4.5.2).

Wir haben also eine affine offene Umgebung $D(g) = \operatorname{Spec}(B_g) \subseteq U$ von x gefunden und den B_g-Modul N_g, so dass

$$(\mathcal{F}|_U)|_{D(g)} \;=\; \mathcal{F}|_{D(g)} \;\cong\; \tilde{N}_g$$

als $\mathcal{O}_{D(g)}$- Modul. Da $x \in U$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Für Satz 4.5 genügt also, das Folgende zu zeigen:

Lemma 4.8 Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema und $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{F} \;\cong\; \tilde{M}$$

für den A-Modul $M = \mathcal{F}(X)$.

Hierzu benutzen wir:

Lemma 4.9 Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema, $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $f \in A$.

(a) Ist $s \in \mathcal{F}(X)$ und $s|_{D(f)} = 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f^m s = 0$ in $\mathcal{F}(X)$.

(b) Ist $t \in \mathcal{F}(D(f))$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $s \in \mathcal{F}(X)$ mit $s|_{D(f)} = f^n t$.

Beweis (Für (a) vergleiche auch Übungsaufgabe 9 (iii)). Nach Voraussetzung gibt es eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X durch affine offene Unterschemata $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ und A_i-Moduln M_i, so dass

$$\mathcal{F}|_{U_i} \;\cong\; \tilde{M}_i$$

als $\mathcal{O}_{U_i}$-Modul. Sei $x \in U_i$. Dann gibt es ein $g \in A$ mit $D(g) = \mathrm{Spec}(A_g) \subseteq U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Sei $A_i \to A_g$ der zugehörige Ringhomomorphismus.

Behauptung: Es gilt $\mathcal{F}|_{D(g)} \cong (M_{i,g})^\sim$ für den A_g-Modul $M_{i,g} = M_i \otimes_{A_i} A_g$.

Beweis: Für jedes $h \in A_i$ mit $D_{A_i}(h) \subseteq D(g)$ folgt aus den Inklusionen

$$D_{A_i}(h) \subseteq D(g) \subseteq \mathrm{Spec}(A_i)$$

$D_{A_i}(h) = D_{A_g}(h')$ und $(A_i)_h = (A_g)_{h'}$ mit $h' =$ Bild von h unter $A_i \to A_g$. Es folgt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(D_{A_g}(h')) \;&=\; \mathcal{F}(D_{A_i}(h)) = (M_i)_h \;\cong\; M_i \otimes_{A_i} (A_i)_{h_i} \\ &\cong\; (M_i \otimes_{A_i} A_g) \otimes_{A_g} (A_g)_{h'} \;\cong\; (M_{i,g})_{h'}\,. \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

Die $D_{A_i}(h)$ mit $D_{A_i}(h) \subseteq D(g)$ bilden eine Basis der Topologie von $D(g)$, und die Isomorphismen (4.8.1) sind verträglich mit Restriktionen. Mit Lemma 4.7 folgt also die gewünschte Isomorphie in der Behauptung.

Wir erhalten also eine Überdeckung $(D(g_j))_{j\in J}$ von $X = \mathrm{Spec}(A)$ mit $g_j \in A$ und A_{g_j}-Moduln M_j mit

$$\mathcal{F}|_{D_{g_j}} \;\cong\; \tilde{M}_j$$

Wegen der Quasikompaktheit von X können wir annehmen, dass die Überdeckung endlich ist.

(a): Sei $s \in \mathcal{F}(X)$ und $s|_{D(f)} = 0$. Sei $s_j = s|_{D(g_j)} \in \mathcal{F}(D(g_j)) = M_j$. Es ist $D(g_j) \cap D(f) = D(g_j f) = \mathrm{Spec}((A_{g_j})_f)$ und

$$\mathcal{F}|_{D(g_j f)} \;=\; \tilde{M}_j(D(g_j f)) \;=\; (M_j)_f\,.$$

Wegen

$$0 = s|_{D(g_j f)} \in (M_j)_f$$

gibt es ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit $f^{n_j} s_j = 0$. Wegen der Endlichkeit von J gibt es also *ein* $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f^n s|_{D(g_j)} = 0 \quad \text{für alle } j\,,$$

also $f^n s = 0$, da $\mathcal{F}$ eine Garbe und $(D(g_j))$ eine Überdeckung ist.

(b): Sei $t \in D(f)$ und

$$t_j = t|_{D(f)\cap D(g_j)} \in (M_j)_f \quad (j \in J)\,.$$

Damit gibt es $s_j' \in M_j$ und *ein* $m \in \mathbb{N}$ (wegen der Endlichkeit von J) mit

$$t_j = \frac{s_j'}{f^m} \qquad \text{für alle } j \in J\,,$$

also *ein* $n \in \mathbb{N}$ und $s_j \in M_j$ mit

$$s_j|_{D(fg_j)} = f^n t_j \qquad \text{für alle } j \in J\,.$$

Wegen

$$s_i|_{D(fg_ig_j)} - s_j|_{D(fg_ig_j)} = f^n t|_{D(fg_ig_j)} - f^n t_j|_{D(fg_ig_j)} = (f^n t - f^n t)|_{D(fg_ig_j)} = 0$$

für alle i, j gibt es nach (a) ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$f^r s_i|_{D(g_ig_j)} - f^r s_j|_{D(g_ig_j)} = 0 \quad \text{für alle } i, j\,.$$

Nach der Garbeneigenschaft gibt es also einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ mit

$$s|_{D(g_i)} = f^r s_i \qquad \text{für alle } i\,,$$

also mit

$$s|_{D(f)} \;=\; f^{n+r} t\,.$$

Damit haben wir Lemma 4.9 bewiesen.

Damit Beweis von Lemma 4.8: Sei $\mathcal{F}$ quasi-kompakt auf $X = \mathrm{Spec}(A)$. Sei $M = \mathcal{F}(X)$ und

$$\varphi : \tilde{M} \to \mathcal{F}$$

der Morphismus, der nach Satz 4.6 zu $id : M \to \mathcal{F}(X)$ assoziiert ist. Für jedes $f \in A$ folgt aus Lemma 4.9, dass der A_f-Modul Homomorphismus

$$\varphi_{D(f)} \;:\; M_f \;\to\; \mathcal{F}(D(f))$$

ein Isomorphismus ist: Aus 4.9 (a) folgt die Injektivität (für $\frac{s}{f^n} \in M_f$ mit $s \in M = \mathcal{F}(X)$ und $\varphi_{D(f)}(\frac{s}{f^n}) = 0$ gilt $s|_{D(f)} = 0$, also $f^m s = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, also $\frac{s}{f^n} = 0$), und aus 4.9 (b) folgt die Surjektivität (für $t \in \mathcal{F}(D(f))$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $s \in \mathcal{F}(X) = M$ mit $s|_{D(f)} = f^n t$; es ist also $\varphi_{D(f)}(\frac{s}{f^n}) = t$).

Da die $D(f)$ eine Basis der Topologie bilden, ist φ ein Isomorphismus (betrachte z.B. die Halme), und wie haben 4.9 (und damit 4.5) bewiesen.

Wir notieren noch:

Corollar 4.10 Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema. Für A-Moduln M und N ist die Abbildung

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N}) \xrightarrow{\sim} Hom_A(M, N)$$

(Übergang zu den globalen Schnitten $M = \tilde{M}(X)$ und $N = \tilde{N}(X)$) ein Isomorphismus.

Dies folgt aus Satz 4.6 für $\mathcal{F} = \tilde{N}$. Aus 4.8 und 4.10 folgt

Corollar 4.11 Für ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ sind die Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{l}\text{quasi-kohärente}\\ \mathcal{O}_X\text{-Moduln}\end{array}\right) & \begin{array}{c}\xrightarrow{\sim}\\ \xleftarrow{\sim}\end{array} & \Big(A\text{-Moduln}\Big) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(X) \\ \tilde{M} & \leftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

zueinander quasi-inverse Kategorienäquivalenzen.

Lemma 4.12 Sei A ein Ring. Eine Sequenz

$$M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \tag{4.12.1}$$

von A-Moduln ist genau dann ein Komplex ($\beta\alpha = 0$) bzw. exakt ($\mathrm{im}(\alpha) = \ker(\beta)$), wenn dies für die assoziierte Sequenz

$$\tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{M}_3 \tag{4.12.2}$$

von (quasi-kohärenten) $\mathcal{O}_X$-Moduln auf dem affinen Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ gilt.

Beweis Die zu (4.12.2) assoziierte Sequenz der Halme bei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ identifiziert sich nach 4.3 (c) mit der Sequenz

$$(M_1)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}} (M_2)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\beta_{\mathfrak{p}}} (M_3)_{\mathfrak{p}} \tag{4.12.3}$$

der Lokalisierungen von (4.12.1) nach $\mathfrak{p}$. Nach 3.4 ist also $\tilde{\beta}\tilde{\alpha} = 0$ genau dann, wenn $\beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, und dies bedeutet wiederum $\beta\alpha = 0$, da $M_3 \hookrightarrow \pi(M_3)_{\mathfrak{p}}$ injektiv ist. Ebenso gilt $\mathrm{im}\,\tilde{\alpha} = \ker\tilde{\beta}$ genau dann, wenn $\mathrm{im}\,\alpha_{\mathfrak{p}} = \ker\beta_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, und dies gilt genau dann wenn $(\ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha)_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, d.h., wenn $\mathrm{im}\,\alpha = \ker\beta$.

Corollar 4.13 Für einen Morphismus von A-Moduln

$$M \xrightarrow{\psi} N$$

und den assoziierten Morphismus

$$\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{N}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln ($X = \mathrm{Spec}(A)$) gilt

$$\ker\tilde{\psi} \;=\; (\ker\psi)^{\sim}, \quad \mathrm{im}\,\tilde{\psi} \;=\; (\mathrm{im}\,\psi)^{\sim}, \quad \mathrm{coker}\,\tilde{\psi} \;=\; (\mathrm{coker}\,\psi)^{\sim}$$

Beweis Nach 4.12 sind mit $\pi : M \twoheadrightarrow \mathrm{im}\,\psi, i : \mathrm{im}\,\psi \hookrightarrow N$ die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (\ker\psi)^{\sim} & \to & \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathrm{im}\,\psi)^{\sim} & \to 0 \\ 0 & \to & (\mathrm{im}\,\psi)^{\sim} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{N} & \to & (\mathrm{coker}\,\psi)^{\sim} & \to 0 \end{array}$$

exakt, wobei $i\pi = \psi$ und $\tilde{i}\tilde{\pi} = \tilde{\psi}$.

Corollar 4.14 Ist X ein Schema und

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

ein Morphismus von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln, so sind $\ker\varphi$, $\mathrm{im}\,\varphi$ und $\mathrm{coker}\,\varphi$ quasi-kohärent.

Beweis Sei $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen. Dann gibt es A-Moduln M und N und einen Morphismus $\psi : M \to N$ von A-Moduln, so dass man

$$\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$$

mit $\tilde{\psi} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ identifizieren kann. Es ist also $(\ker \varphi)|_U = \ker \varphi|_U \cong \ker \tilde{\psi} \cong (\ker \psi)^\sim$ nach 4.13. Also ist $\ker \varphi$ quasi-kohärent. Entsprechend folgen die Behauptungen für im φ und coker φ.

Bemerkungen 4.15 Dies bedeutet, dass die quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln ebenfalls eine abelsche Kategorie bilden.

5 Tensorprodukte, Pushforwards und Pullbacks von $\mathcal{O}_X$-Moduln

Wir studieren nun, wie sich verschiedene Konstruktionen für Moduln – insbesondere Tensorprodukte, Skalarrestriktionen und Skalarerweiterungen – auf $\mathcal{O}_X$-Moduln erweitern.

Definition 5.1 Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{R}$ eine Prägarbe von Ringen auf X.

(a) Es ist analog zu 4.1 definiert, was eine $\mathcal{R}$-Modul-Prägarbe auf X ist: eine abelsche Prägarbe $\mathcal{P}$ zusammen mit Abbildungen

$$\mathcal{R}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$$

für jedes offene $U \subseteq X$, die $\mathcal{P}(U)$ zu einem $\mathcal{R}(U)$-Modul machen und mit Restriktionen verträglich sind. Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ von $\mathcal{R}$-Modul-Prägarben ist ein Morphismus von abelschen Prägarben derart, dass $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}'(U)$ für alle offenen $U \subseteq X$ ein $\mathcal{R}(U)$-Modulhomomorphismus ist.

(b) Das Prägarben-Tensorprodukt $\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q}$ von zwei $\mathcal{R}$-Modul-Prägarben $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ ist die durch

$$(\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q})(U) \ := \ \mathcal{P}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{Q}(U)$$

($U \subseteq X$ offen) und die offensichtlichen Restriktionen definierte $\mathcal{R}$-Modul-Prägarbe.

Lemma 5.2 Für den Halm bei $x \in X$ hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$(\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q})_x \ \cong \ \mathcal{P}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{Q}_x \,. \tag{5.2.1}$$

Beweis: Für jede offene Umgebung U von x hat man kanonische Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{Q}(U) \ &\to \ \mathcal{P}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{Q}_x \\ \mathcal{P}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{Q}(U) \ &\to \ (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{Q})_x \,. \end{aligned}$$

Diese induzieren Abbildungen in beide Richtungen (!) von (5.2.1), die zueinander invers sind (Übungsaufgabe!).

Definition 5.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema (oder ein geringter Raum). Für zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ definiert man ihr Tensorprodukt als

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \ := \ (\mathcal{F} \otimes^P_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^+$$

(die assoziierte Garbe zum Prägarben-Tensorprodukt).

Nach dem folgenden Lemma ist dies wieder ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

Lemma 5.4 Sei $\mathcal{R}$ eine Prägarbe von Ringen.

(a) $\mathcal{R}^+$ ist in kanonischer Weise eine Ringgarbe.

(b) Ist $\mathcal{P}$ eine $\mathcal{R}$-Modul-Prägarbe, so ist $\mathcal{P}^+$ in kanonischer Weise eine $\mathcal{R}^+$-Modulgarbe.

(c) Sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ zwei $\mathcal{R}$-Modul-Prägarben, so ist

$$\mathcal{P}^+ \otimes_{\mathcal{R}^+} \mathcal{Q}^+ \;\cong\; (\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q})^+ \,.$$

Beweis (a) und (b) folgen zum Beispiel aus der expliziten Konstruktion der assoziierten Garben.

(c): Der offensichtliche Morphismus von Prägarben

$$\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} Q \;\to\; \mathcal{P}^+ \otimes^P_{\mathcal{R}^+} \mathcal{Q}^+$$

induziert einen Morphismus von Garben

$$(\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q})^+ \;\to\; (\mathcal{P}^+ \otimes^P_{\mathcal{R}^+} \mathcal{Q}^+)^+ \quad (= \mathcal{P}^+ \otimes_{\mathcal{R}^+} \mathcal{Q}^+) \,.$$

Dieser induziert für alle $x \in X$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{P}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{Q}_x \;\to\; (\mathcal{P}^+)_x \otimes_{(\mathcal{R}^+)_x} (\mathcal{Q}^+)_x$$

und ist also selbst ein Isomorphismus.

Lemma 5.5 Für $x \in X$ ist kanonisch

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \;\cong\; \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \,.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma 5.2 und der Tatsache, dass eine Prägarbe $\mathcal{P}$ und ihre assoziierte Garbe $\mathcal{P}^+$ dieselben Halme haben.

Bemerkung 5.6 Sei $\mathcal{O}_X$ eine Ringgarbe und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ drei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Um einen Morphismus

(5.6.1) $$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \;\to\; \mathcal{H}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln zu geben, genügt es, für alle offenen $U \subseteq X$ $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismen

(5.6.2) $$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \;\to\; \mathcal{H}(U)$$

zu geben, die mit den Restriktionen verträglich sind. Diese definieren nämlich

(5.6.3) $$\mathcal{F} \otimes^P_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \;\to\; \mathcal{H} \,,$$

und die universelle Eigenschaft der assoziierten Garbe ergibt dann (5.6.1). Diese Beschreibung durch die Morphismen (5.6.2) nennt man auch eine "Beschreibung auf den lokalen Schnitten".

Bemerkungen 5.7 (a) Es folgt leicht, dass für das Tensorprodukt von Prägarben und Garben "die üblichen Regeln" gelten. Zum Beispiel gilt für $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$, dass man folgende kanonische Isomorphismen von $\mathcal{O}_X$-Moduln hat:

(a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \;\cong\; \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

(b) $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \;\cong\; \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$.

(c) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \;\cong\; \mathcal{F}$.

(b) Weiter hat man den Begriff einer $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$, und eine solche entspricht einem Morphismus von Ringgarben $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$.

(c) Ist $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Morphismus von Ringgarben, so ist $\mathcal{B}$ insbesondere ein $\mathcal{A}$-Modul, und für jeden $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ in kanonischer Weise ein $\mathcal{B}$-Modul.

Wir definieren nun eine $\mathcal{O}_X$-Modul-Analogon der Hom-Garbe $\underline{Hom}(F, G)$ für abelsche Garben auf X (siehe 0.9).

Lemma/Definition 5.8 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema (oder geringter Raum), und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln. Definiere die Hom-Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln durch

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

und die offensichtliche Restriktionen. Dies ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis der letzten Behauptung: selbst!

Satz 5.9 (1. Adjunktionssatz) Für $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))\,.$$

Dieser ist funktoriell in $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$.

Beweis Zunächst hat man für eine Ring-Prägarbe $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}$-Modul-Prägarben $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{S}$ einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{R}(X)$-Moduln

$$Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{P} \otimes^P_{\mathcal{R}} \mathcal{Q}, \mathcal{S}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}, \underline{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}))\,.$$

wobei $\underline{Hom}_{\mathcal{R}}$ genau wie in 4.18 definiert ist.

Dies folgt sofort aus dem entsprechenden Resultat für Moduln über einem Ring (Alg. Geo. I Satz 1.A.7). Die Behauptung von 5.9 folgt durch Anwendung auf $\mathcal{O}_X, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ und die universelle Eigenschaft der assoziierten Garbe zu $\mathcal{F} \otimes^P_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

Proposition 5.10 Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema. Für A-Moduln M und N gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \;\cong\; (M \otimes_A N)^{\sim}\,.$$

Beweis Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ und $f \in A$ hat man kanonische Isomorphismen

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \;\cong\; (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \tag{5.10.1}$$

$$M_f \otimes_{A_f} N_f \;\cong\; (M \otimes_A N)_f \tag{5.10.2}$$

(Übungsaufgabe!). Nach Konstruktion der Garbe $\tilde{M}$ zu einem A-Modul M erhält man hieraus sofort Abbildungen

$$\tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \tilde{N}(U) \;\to\; (M \otimes_A N)^{\sim}(U)$$

für alle offenen $U \subseteq X$, die mit Restriktionen verträglich sind. Dies liefert den gewünschten Morphismus

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \;\to\; (M \otimes_A N)^{\sim}\,,$$

der wegen (5.10.1) Isomorphismen in allen Halmen induziert, also ein Isomorphismus ist.

Corollar 5.11 Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, so auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

Wir kommen nun zur Funktorialität. Sei

$$f : X \to Y$$

ein Morphismus von Schemata (oder geringten Räumen). Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul , so sieht man sofort, dass $f_*\mathcal{F}$ in kanonischer Weise ein $f_*\mathcal{O}_X$-Modul ist. Durch den Morphismus von Ringgarben

$$f^\sharp : \mathcal{O}_Y \;\to\; f_*\mathcal{O}_X$$

wird $f_*\mathcal{F}$ somit auch in kanonischer Weise zu einem $\mathcal{O}_Y$-Modul; explizit haben wir für $V \subseteq Y$ offen:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) & \times & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\
\| & & \| & & \| \\
f_*\mathcal{O}_X(V) & \times & f_*\mathcal{F}(V) & \longrightarrow & f^*\mathcal{F}(V) \\
{\scriptstyle f_V^\sharp}\uparrow & & & & \\
\mathcal{O}_Y(V)\,. & & & &
\end{array}$$

Im Folgenden meinen wir immer diese $\mathcal{O}_Y$-Modul-Struktur von $f_*\mathcal{F}$.

Proposition 5.12 Sei $f : X = \mathrm{Spec}(A) \to Y = \mathrm{Spec}(B)$ ein Morphismus von affinen Schemata und $B \to A$ der zugehörige Ringhomomorphismus. Ist M ein A-Modul und M_B der entsprechende B-Modul (Restriktion der Skalare via $B \to A$), so gilt kanonisch

$$f_*\tilde{M} \;=\; (M_B)^{\sim}\,.$$

Beweis: Sei

$$\varphi :\; (M_B)^{\sim} \;\to\; f_*(\tilde{M})$$

der Morphismus von $\mathcal{O}_Y$-Moduln, der nach Satz 4.6 dem B-Modul-Homomorphismus

$$id_M :\; M_B \;\to\; M = \tilde{M}(X) = (f_*\tilde{M})(Y)$$

entspricht. Für $g \in B$ und $D(g) \subseteq Y = \mathrm{Spec}(B)$ ist

$$(f_*\tilde{M})(D(g)) \;=\; \tilde{M}(f^{-1}(D(g))) \;=\; \tilde{M}(D(g')) \;=\; M_{g'}\,,$$

wobei g' das Bild von g unter $B \to A$ ist, und nach Konstruktion von φ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_B \arrow[r, "id"] \arrow[d, "res"'] & (f_*\tilde{M})(Y) = M \arrow[d, "res"] \\ \tilde{M}_B(D(g)) = (M_B)_g \arrow[r] & \tilde{M}(D(g')) = M_{g'} \end{tikzcd}$$

kommutativ. Nach Definition ist $(M_B)_g = M_{g'}$, und damit ist die untere Abbildung ein Isomorphismus. Da die $D(g)$ eine Basis der Topologie bilden, ist φ ein Isomorphismus.

Wir betrachten nun Pullbacks. Sei weiterhin

$$f : X \to Y$$

ein Morphismus von Schemata.

Lemma 5.13 $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ ist eine Ringgarbe auf X.

Beweis Wir bemerken zunächst, dass $f^P\mathcal{O}_Y$ eine Prägarbe von Ringen auf X ist. Denn für $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq V$ haben wir nach Definition eine Ringstruktur auf $\mathcal{O}_Y(V)$, und damit auch auf

$$f^P\mathcal{O}_Y(U) = \varinjlim_{V} \mathcal{O}_Y(V)\,,$$

wobei der induktive Limes über alle $V \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq V$ geht. Dies ist wiederum verträglich mit Restriktionen in U, und macht so $f^P\mathcal{O}_Y$ zu einer Prägarbe von Ringen. Nach Lemma 5.4 (a) ist dann die assoziierte Garbe $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ eine Ringgarbe.

5.14 Nun sei $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann ist das Urbild $f^{-1}\mathcal{G}$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul: Zunächst ist offenbar $f^P\mathcal{G}$ ein $f^P\mathcal{O}_Y$-Modul – denn für $U \subseteq X$ offen und jedes $V \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq V$ haben wir nach Voraussetzung die Abbildung

$$\mathcal{O}_Y(V) \times \mathcal{G}(V) \ \to \ \mathcal{G}(V)\,,$$

die $\mathcal{G}(V)$ zu einem $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul macht. Dies ist verträglich mit Restriktionen, und durch Übergang zum induktiven Limes über alle solchen V (offen in Y mit $f(f(U) \subseteq V)$ erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$f^P\mathcal{O}_Y(U) \times f^P\mathcal{G}(U) \to f^P\mathcal{G}(U)\,,$$

die $f^P\mathcal{G}(U)$ zu einem $f^P\mathcal{O}_Y(U)$-Modul machen. Dies ist verträglich mit Restriktionen in U und macht $f^P\mathcal{G}$ zu einem $f^P\mathcal{O}_Y$-Modul. Nach Lemma 5.4 (b) wird dadurch $f^{-1}\mathcal{G} = (f^P\mathcal{G})^+$ kanonisch zu einem $f^{-1}\mathcal{O}_Y = (f^P\mathcal{O}_Y)^+$-Modul.

5.15 Nach Definition liefert der Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ einen Morphismus von Ringgarben

$$f^\sharp \ : \ \mathcal{O}_Y \ \to \ f_*\mathcal{O}_X\,. \qquad (5.15.1)$$

Weiter gibt der Adjunktionssatz 3.15 einen kanonischen Isomorphismus

$$Hom_{Gar(X)}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \;\cong\; Hom_{Gar(Y)}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X)\,. \tag{5.15.2}$$

Zu (5.15.1) gehört also ein kanonischer Garbenmorphismus

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y \;\to\; \mathcal{O}_X\,. \tag{5.15.3}$$

Lemma 5.16 Dies ist ein Morphismus von Ringgarben auf X.

Beweis Dies folgt sofort aus der Konstruktion im Adjunktionssatz, da $f^\sharp$ ein Morphismus von Ringgarben ist.

Wir können nun dem $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ den folgenden $\mathcal{O}_X$-Modul zuordnen.

Lemma/Definition 5.17 Für jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ setze

$$f^*\mathcal{G} \;:=\; f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X\,.$$

Dies ist in kanonischer Weise ein $\mathcal{O}_X$-Modul und sei zur Unterscheidung von $f^{-1}\mathcal{G}$ auch als Modul-Urbild (oder -Pullback) bezeichnet.

Die Behauptung folgt aus Bemerkung 5.7 (c).

Satz 5.18 (2. Adjunktionssatz) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und jeden $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})\,. \tag{5.18.1}$$

Dieser ist funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h., f^* ist linksadjungiert zu f_*.

Beweis: Nach dem Adjunktionssatz 3.15 haben wir einen Isomorphismus, funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$,

$$Hom_{Gar(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \;\cong\; Hom_{Gar(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})\,.$$

Man sieht leicht an der Konstruktion – und der Adjunktion (5.15.1) – dass dies einen Isomorphismus

$$Hom_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \tag{5.18.2}$$

induziert, wobei links $\mathcal{F}$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul via $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ wird. Nach dem folgenden Lemma ist die linke Seite aber kanonisch und bifunktoriell isomorph zur linken Seite von (5.18.1).

Lemma 5.19 Sei $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Morphismus von Ringgarben, sei $\mathcal{K}$ ein $\mathcal{A}$-Modul und $\mathcal{L}$ ein $\mathcal{B}$-Modul. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, \mathcal{L}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}, \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \tag{5.19.1}$$

(wobei rechts $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass $\mathcal{L}$ via $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ als $\mathcal{A}$-Modul aufgefasst wird). Die ist funktoriell in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$, d.h., die 'Skalarerweiterung' $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ ist linksadjungiert zur 'Skalarrestriktion' $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.

Beweis Das analoge Resultat für einen Ringhomomorphismus $A \to B$ sowie A-Moduln K und B-Moduln L ist bekannt: Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$(5.19.2) \qquad Hom_B(K \otimes_A B, L) \;\cong\; Hom_A(K, L_A)$$

(siehe die universelle Eigenschaft Alg. Geo. I 1.A.9 (b)). Hieraus erhält man in unserer Situation sofort eine Adjunktion für die Prägarben

$$(5.19.3) \qquad Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \otimes^P_{\mathcal{B}}, \mathcal{L}) \;\cong\; Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}, \mathcal{L}_{\mathcal{A}})\,.$$

Wegen $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = (\mathcal{K} \otimes^P_{\mathcal{A}} \mathcal{B})^+$ erhält man mit der universellen Eigenschaft der assoziierten Garbe sofort eine Bijektion der linken Seiten von (5.19.3) und (5.19.1).

Wir studieren nun wieder des affinen Fall.

Proposition 5.20 Sei $f : X = \mathrm{Spec}(A) \to Y = \mathrm{Spec}(B)$ ein Morphismus affiner Schemata, und sei N ein B-Modul. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$f^*\tilde{N} \;\cong\; (N \otimes_B A)^{\sim}\,.$$

Beweis Wir haben $A = \mathcal{O}_X(X)$ und kanonische Abbildungen

$$\begin{array}{rclcll} B & = & \mathcal{O}_Y(Y) & \to & (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(X) & \text{(von Ringen)} \\ N & = & \tilde{N}(Y) & \to & (f^{-1}\tilde{N})(X) & \text{(von } B\text{-Moduln).} \end{array}$$

Diese geben einen kanonischen Morphismus von B-Moduln

$$N \otimes_B A \to (f^{-1}\tilde{N})(X) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(X)} \mathcal{O}_X(X) \to (f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X)\,,$$

der nach Satz 4.6 einen Morphismus

$$(N \otimes_B A)^{\sim} \to f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = f^*\tilde{N}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln induziert. Dieser liefert Isomorphismen auf den Halmen: Für $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(B)$ ($\varphi : B \to A$ der zu f gehörige Ringhomomorphismus) ist die Halmabbildung der Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} (N \otimes_B A)_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\sim} & N_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{p}} \\ \frac{n \otimes a}{s} & \longmapsto & \frac{n}{1} \otimes \frac{a}{s} \end{array}$$

(für $n \in N, a \in A, s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$). Die Umkehrabbildung ist bestimmt durch

$$\frac{n \otimes a}{ts} \;\longleftarrow\!\shortmid\; \frac{n}{t} \otimes \frac{a}{s}\,.$$

Lemma 5.21 (a) Ist $j : U \hookrightarrow X$ die Inklusion eines offenen Unterschemas, und ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $j^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}|_U = j^*\mathcal{F}$.

(b) Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwei Schema-Morphismen und ist $\mathcal{H}$ ein $\mathcal{O}_Z$-Modul, so ist kanonisch

$$\begin{aligned} (gf)^{-1}\mathcal{H} &\cong f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H}) \\ (gf)^*\mathcal{H} &\cong f^*(g^*\mathcal{H}) . \end{aligned}$$

Beweis (a): Die erste Behauptung ist einfach (siehe Übungsaufgabe 17), und hiermit folgt

$$j^*\mathcal{F} = j^{-1}\mathcal{F} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U = \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_U = \mathcal{F}|_U .$$

(b) *1. Beweis*: Die Behauptungen können aus der entsprechenden Beziehung $(gf)^P\mathcal{H} \cong f^P(g^P\mathcal{H})$ für eine Prägarbe abgeleitet werden.

2. Beweis: Es ist $(gf)_* = g_*f_*$. Hieraus folgt nun ganz allgemein eine Isomorphie $(gf)^* = f^*g^*$ für die Linksadjungierten, weil letztere bis auf kanonische Isomorphie eindeutig sind, wenn sie existieren.

Corollar 5.22 Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul, so ist $f^*\mathcal{G}$ quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweis Sei $x \in X$ und $y = f(x) \in Y$. Dann gibt es eine affine offene Umgebung $V = \mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$ von y und einen B-Modul N mit

$$\mathcal{G}|_V \cong \tilde{N}$$

als $\mathcal{O}_V$-Modul. Ist nun $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq f^{-1}(V)$ eine affine offene Umgebung von x, so erhalten wir mit der Einschränkung $f' = f|_U : U \to V$ von f ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

und nach Lemma 5.21

$$(f^*\mathcal{G})|_U = (j')^*f^*\mathcal{G} \overset{5.21(b)}{=} (f')^*j^*\mathcal{G} = (f')^*(\mathcal{G}|_V) = (f')^*\tilde{N} \overset{5.20}{=} (N \otimes_B A)^\sim .$$

Dies zeigt die Behauptung.

5.A Direkte Bilder von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln

Während Tensorprodukte und Modul-Urbilder (Pull-backs) von quasi-kohärenten Moduln wieder quasi-kohärent sind (Corollar 5.11 und Corollar 5.22), ist dies für direkte Bilder (Push-forwards) im Allgemeinen falsch. Wir werden aber in diesem Abschnitt zeigen, dass es unter verhältnismäßig schwachen Bedingungen gilt.

Definition 5.A.1 (a) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **quasi-separiert**, wenn der Diagonalmorphismus

$$\Delta = (id, id) : \ X \ \to \ X \times_y X$$

(charakterisiert dadurch, dass $pr_1 \circ \Delta = id_X$ und $pr_2 \circ \Delta = id_X$) quasi-kompakt ist.

(b) Ein Schema X heißt **quasi-separiert**, wenn der kanonische Morphismus $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ quasi-separiert ist.

Bemerkungen 5.A.2 (a) Ist X noethersch, so ist jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ quasi-kompakt (Proposition 2.19). Dann ist also jeder Morphismus $f : X \to Y$ quasi-kompakt und quasi-separiert; insbesondere ist X quasi-separiert.

(b) Jeder Morphismus $f : \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ von affinen Schemata ist quasi-kompakt. Denn jede quasi-kompakte offene Menge $V \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ ist endliche Vereinigung von Standard-offenen Mengen $D(g_1), \dots, D(g_n)$ mit $g_i \in B$, und ist f_i das Bild von g_i unter $B \to A$, so ist $f^{-1}(D(g_i)) = D(f_i) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema, also quasi-kompakt.

(c) Es folgt, dass jedes affine Schema quasi-separiert ist. Denn für $X = \operatorname{Spec}(A)$ ist

$$X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} X \ = \ \operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)\,,$$

also affin.

Lemma 5.A.3 Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus und seien $U, V \subseteq X$ offen. Dann ist $U \cap V$ das Urbild von $U \times_Y V \subseteq X \times_Y X$ unter

$$\Delta \ : \ X \ \to \ X \times_Y X\,.$$

Beweis Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \times_Y V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X \times_Y V \arrow[d, hook, "j_2"] \arrow[dd, bend left=60, "pr_1'"] \\
U \times_Y X \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d] & X \times_Y X \arrow[d, "pr_1"] \\
U \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

ist nach Lemma 1.10

$$U \times_Y V = (pr_1')^{-1}(U) = j_2^{-1}(pr_1^{-1}(U)) = j_2^{-1}(U \times_Y X) = (U \times_Y X) \cap (X \times_Y V)\,,$$

und es ist offenbar $\Delta^{-1}(U \times_Y X) = U$ und $\Delta^{-1}(X \times_Y V) = V$.

Corollar 5.A.4 Sei X quasi-separiert und seien $U, V \subseteq X$ zwei quasi-kompakte offene Teilmengen. Dann ist auch $U \cap V$ quasi-kompakt.

Beweis Da U und V jeweils endliche Vereinigung von affinen offenen Teilmengen sind, seien ohne Einschränkung U und V affin. Dann ist $U \times_{\mathbb{Z}} V := U \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} V$ wieder affin, also quasi-kompakt, also gilt dies auch für $U \cap V$, denn dies ist nach 5.A.3 Urbild von $U \times_{\mathbb{Z}} V$ unter dem Morphismus

$$\Delta : X \ \to \ X \times_{\mathbb{Z}} X\,,$$

der nach Voraussetzung quasi-kompakt ist.

Proposition 5.A.5 Sei X ein quasi-kompaktes und quasi-separiertes Schema. Für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul und jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ ist dann der kanonische Morphismus

$$\gamma \, : \, \mathcal{F}(X)_f \; = \; \mathcal{F}(X) \times_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{F}(X(f))$$

ein Isomorphismus.

Beweis Da X quasi-kompakt ist, gibt es eine endliche affine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X. Sei $V_i = X(f) \cap U_i = D_{U_i}(f|_{U_i})$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X(f)) \arrow[r] & \oplus_i \mathcal{F}(V_i) \arrow[r] & \oplus_{i,j}\mathcal{F}(V_i \cap V_j) \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X)_f \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] & \bigoplus_i \mathcal{F}(U_i)_f \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "\gamma_2"] & \oplus_{i,j}\mathcal{F}(U_i \cap U_j)_f \arrow[u, "\gamma_3"'] \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen (Für die untere Zeile beachte man, dass die Lokalisierung nach f ein exakter Funktor ist, siehe Alg. Geo. I, 3.A.10). Da $\mathcal{F}$ quasi-kohärent ist und U_i affin, gilt

$$\mathcal{F}|_{U_i} \;\cong\; \mathcal{F}(U_i)^{\sim}\,,$$

also ist γ_2 ein Isomorphismus. Hieraus folgt die Injektivität von γ.

Da X quasi-separiert ist, sind nach 5.A.4 auch alle $U_i \cap U_j$ quasi-kompakt; nach dem eben Bewiesenen ist also auch γ_3 injektiv. Zusammen mit der Bijektivität von γ_2 folgt nun leicht die Surjektivität von γ aus einer Diagrammjagd.

Satz 5.A.6 Sei $f : X \to Y$ ein quasi-kompakter und quasi-separierter Morphismus von Schemata. Für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf X ist dann $f_*\mathcal{F}$ wieder quasi-kohärent.

Beweis Sei $V \subseteq Y$ affin offen. Wir haben zu zeigen, dass $f_*\mathcal{F}|_V \cong \tilde{M}$ für $M = (f_*\mathcal{F})(V)$. Ist $U = f^{-1}(V)$ und

$$f' \;:\; U \;\to\; V$$

der induzierte Morphismus, so ist offenbar

$$(f_*\mathcal{F})|_V \;=\; f'_*(\mathcal{F}|_V)\,,$$

und f' ist wieder quasi-kompakt (klar) und quasi-separiert, da

$$\Delta_U \;:\; U \;\to\; U \times_V U$$

die Einschränkung von $\Delta : X \to X \times_Y X$ ist, also wieder quasi-kompakt.

Wir können also annehmen, dass $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affin ist. Dann ist X quasi-kompakt und quasi-separiert: Die erste Aussage ist klar. Für die zweite sei $(U_i)_{i\in I}$ eine affine offene Überdeckung von X. Dann ist $(U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j)_{i,j}$ eine affine offene Überdeckung von $X \times_{\mathbb{Z}} X$, und es genügt zu zeigen, dass für

$$\Delta_{\mathbb{Z}} \;:\; X \to\; X \times_{\mathbb{Z}} X$$

und beliebige i, j die Menge $\Delta_{\mathbb{Z}}^{-1}(U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j)$ quasi-kompakt ist. Aber nach Lemma 5.A.3 ist diese Menge gleich $U_i \cap U_j$ und auch wieder gleich $\Delta^{-1}(U_i \times_Y U_j)$, welches nach Voraussetzung an Δ quasi-kompakt ist.

Sei $g \in \mathcal{O}_Y(Y)$ und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ das Bild von g. Nach Proposition 5.A.5 erhalten wir Isomorphismen

$$(f_*\mathcal{F})(D(g)) \;=\; \mathcal{F}(f^{-1}(D(g))) = \mathcal{F}(X(f)) \cong \mathcal{F}(X)_f = (\mathcal{F}(X)_B)_g\,.$$

Dies gilt für alle g und ist mit Restriktionen verträglich, mit Lemma 4.7 erhalten wir aber einen Isomorphismus

$$f_*\mathcal{F} \;\cong\; (\mathcal{F}(X)_B)^{\sim}$$

und damit die Quasi-Kohärenz von $f_*\mathcal{F}$.

6 Abgeschlossene Unterschemata

In diesem Abschnitt definieren wir, was abgeschlossene Unterschemata eines Schemas X sind, und zeigen, dass diese in Bijektion zu den quasi-kohärenten Idealgarben $J \subseteq \mathcal{O}_X$ stehen. Allgemeiner definieren wir:

Definition 6.1 Ein Morphismus $i : Y \to X$ von Schemata heißt **abgeschlossene Immersion**, wenn gilt:
(i) $i(Y)$ ist abgeschlossen in X.
(ii) Die stetige Abbildung $i : Y \to i(Y)$ ist ein Homöomorphismus.
(iii) Der Morphismus von Ringgarben $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ ist ein Epimorphismus.

Eine abgeschlossene Immersion $i : Y \to X$ heißt **abgeschlossenes Unterschema**, wenn Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist und $i : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion.

Beispiel 6.2 Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ induziert einen Schemahomomorphismus

$$i = i_{\mathfrak{a}} \,:\, Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec}(A) = X\,.$$

Dieser ist eine abgeschlossene Immersion:

Die unterliegende stetige Abbildung ist $\operatorname{Spec}(\varphi)$ und hat eine Faktorisierung

$$(6.2.1) \qquad \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \underset{\sim}{\overset{\alpha}{\to}} V(\mathfrak{a}) \overset{\nu}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec}(A)$$

mit der Inklusion ν und dem Homöomorphismus α zwischen $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ und der abgeschlossenen Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$. Der Morphismus

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} = \tilde{A} \;\to\; i_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})} = i_*\widetilde{A/\mathfrak{a}}$$

entspricht mittels der Isomorphie $i_*\widetilde{A/\mathfrak{a}} = \widetilde{A/\mathfrak{a}}$ aus Proposition 5.12 (wobei rechts $A/\mathfrak{a}$ als A-Algebra aufgefasst wird) dem offensichtlichen Morphismus

$$\tilde{A} \;\to\; \widetilde{A/\mathfrak{a}}$$

von $\mathcal{O}_X$-Algebren. Dieser ist aber ein Epimorphismus, da $A \to A/\mathfrak{a}$ surjektiv ist (vergleiche Corollar 4.13).

Insbesondere wird so $V(\mathfrak{a})$ in kanonischer Weise zu einem abgeschlossenen Unterschema, nämlich mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})} = \alpha_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})}$, so dass $(V(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})})$ via α zu $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ isomorph ist. Wir werden sehen, dass jedes abgeschlossene Unterschema von $\operatorname{Spec}(A)$ von dieser Form ist (Corollar...).

Definition 6.3 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt affin, wenn für jede affine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ wieder ein affines Schema ist.

Proposition 6.4 Jede abgeschlossene Immersion $i : Y \to X$ ist ein affiner Morphismus.

Beweis Sei $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen und $V = i^{-1}(U)$. Dann ist der induzierte Morphismus $V \to U$ wieder eine abgeschlossene Immersion. Wir können also annehmen, dass $X = Spec(A)$ affin ist und haben zu zeigen, dass Y affin ist. Weiter können wir durch die Identifizierung von Y mit $i(Y)$ annehmen, dass $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema ist. Sei $W = \mathrm{Spec}(C) \subseteq Y$ affin offen. Da Y die Relativtopologie trägt, lässt sich W durch offene Mengen der Form $D(f_i) \cap Y$ mit $f_i \in A$ überdecken. Seien $g_i \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $h_i \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y) = C$ die Bilder von f_i unter

$$A \;\to\; \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \;\to\; \Gamma(W, \mathcal{O}_W)\,,$$

so ist

$$D(f_i) \cap Y \;=\; Y(g_i) = D(f_i) \cap W = D(h_i)\,,$$

also affin. Hierbei sei

$$Y(g_i) := \{y \in Y \mid (g_i)_y \notin \mathfrak{m}_g\} \tag{6.4.1}$$

(siehe Alg. Geo. I, Lemma 10.2, dort mit X_f bezeichnet). Durch Hinzunahme von Mengen $D(f_j) \subseteq X \smallsetminus Y$ erhalten wir eine Überdeckung von X. Dann gilt $< f_i, f_j >= A$, also auch $< g_i, g_j >= \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $g_j =$ Bild von f_j in $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ (die 1 wird dargestellt). Wegen der Quasikompaktheit von $X = \mathrm{Spec}(A)$ können wir weiter annehmen, dass die Überdeckung endlich ist. Hieraus folgt, dass Y affin ist (Übungsaufgabe 25).

Sei nun $i : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion. Dann ist offenbar

$$J \;:=\; \ker(\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y)$$

eine **Idealgarbe** in $\mathcal{O}_X$ (oder auf X), d.h., ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{O}_X$ (d.h., für jedes offene $U \subseteq X$ ist $J(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)$ ein Ideal).

Lemma 6.5 J ist quasi-kohärent.

Beweis Es genügt, zu zeigen, dass $i_*\mathcal{O}_Y$ quasi-kohärent ist. Dann ist J nach Corollar 4.14 quasi-kohärent.

Ist nun $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen, so ist nach Proposition 6.4 $V = i^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(B)$ affin. Mit dem induzierten Morphismus $i' : V = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = U$ ist dann

$$(i_*\mathcal{O}_Y)|_U \;=\; i'_*\mathcal{O}_V \;=\; i'_*\tilde{B} \;=\; \widetilde{B_A}$$

nach Proposition 5.12. Dies zeigt die Quasi-Kohärenz von $i_*\mathcal{O}_Y$.

Umgekehrt gilt:

Satz 6.6 Sei X ein Schema und $J \subseteq \mathcal{O}_X$ eine quasi-kohärente Idealgarbe. Dann gibt es ein abgeschlossenes Unterschema $i : V \hookrightarrow X$ mit

$$J \;=\; \ker(i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_V)\,.$$

V ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig und wird auch mit $V(J)$ bezeichnet.

Vorbemerkung 6.7 (a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Aus dem Adjunktionsisomorphimus

$$Hom_{\mathrm{Gar}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathrm{Gar}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \tag{6.7.1}$$

erhält man kanonische Garbenmorphismen

$$ad = ad_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_* f^{-1}\mathcal{G} \tag{6.7.2}$$

$$Ad = Ad_{\mathcal{F}} : f^{-1} f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}\,, \tag{6.7.3}$$

die sogenannten **Adjunktionsmorphismen**, die funktoriell in $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{F}$ sind. Für (6.7.2) betrachte man nämlich $\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}$ und das Bild von $id_{f^{-1}\mathcal{G}}$ unter (6.7.1). Für (6.7.3) betrachte $\mathcal{G} = f_*\mathcal{F}$ und das Urbild von $id_{f_*\mathcal{G}}$ unter (6.7.1). Es folgt dann aus der Funktorialität von (6.7.1), dass (6.7.1) einen Morphismus

$$\alpha \;:\; f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$$

auf den Morphismus

$$\mathcal{G} \xrightarrow{ad} f_* f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*(\alpha)} f_*\mathcal{F}$$

abbildet. Umgekehrt ist das Urbild von

$$\beta \;:\; \mathcal{G} \;\to\; f_*\mathcal{F}$$

unter (6.7.1) gleich

$$f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}(\beta)} f^{-1} f_*\mathcal{F} \xrightarrow{Ad} \mathcal{F}\,.$$

Dies sind allgemeine Tatsachen für eine Adjunktion; siehe den Anhang 3.A.

In unserer Situation folgt aus der Konstruktion von (3.7.1) (siehe Satz 3.15), dass ad durch die folgenden Abbildungen für $V \subseteq Y$ offen gegeben ist:

$$\mathcal{G}(V) \to (f_*(f^P\mathcal{G}))(V) = (f^P\mathcal{G})(f^{-1}(V)) \to (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V))\,.$$

Hierbei ist die erste Abbildung die kanonische in den induktiven Limes, der $f^P\mathcal{G}(f^{-1}(V))$ definiert, und die zweite Abbildung kommt von dem Morphismus $f^P\mathcal{G} \to (f^P\mathcal{G})^+ = f^{-1}\mathcal{G}$.

Entsprechend haben wir für $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq Y$ offen mit $f(U) \subseteq V$ Abbildungen

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{res} \mathcal{F}(U)$$

und durch induktiven Limes über alle solchen V

$$(f^P f_*\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)\,,$$

also $f^P f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, also $f^{-1} f_*\mathcal{F} = (f^P f_*\mathcal{F})^+ \to \mathcal{F}$.

(b) Entsprechend erhalten wir für einen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata (oder geringten Räumen), für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und einen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ **Adjunktionsmorphismen**

$$ad : \mathcal{G} \to f_* f^*\mathcal{G} \quad (\text{von } \mathcal{O}_Y\text{-Moduln}) \tag{6.7.4}$$

$$(6.7.5) \qquad Ad : f^*f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \quad (\text{von } \mathcal{O}_X\text{-Moduln})$$

die funktoriell in $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{F}$ sind.

Beweis von Satz 6.6 Sei X ein Schema und $J \subseteq \mathcal{O}_X$ eine quasi-kohärente Idealgarbe.

1) Als topologischer Raum sei

$$\begin{aligned} V := V(J) &= \{x \in X \mid J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X \mid \text{ für alle lokalen Schnitte } f \text{ von } J \text{ bei } x \text{ ist } f(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

der Träger von $\mathcal{O}_X/J$ bzw. der Verschwindungsort der Schnitte in J. Beachte: Es ist $(\mathcal{O}_X/J)_x = \mathcal{O}_{X,x}/J_x$, und $f(x)$ ist das Bild von f in $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$; dann ist $J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ genau dann, wenn $J_x \subseteq \mathfrak{m}_x$.

Dann ist V abgeschlossen in X, denn es ist $V = supp(\overline{1})$, der Träger des Einschnitts $\overline{1} \in \mathcal{O}_X/J$, und dieser ist abgeschlossen (Alg. Geo. I, Übungsblatt 12, Aufgabe 4 (ii)) (Oder man zeigt direkt, dass $X \smallsetminus V$ offen ist).

2) Sei $i : V \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist $V(J) = (V, i^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ ein lokal geringter Raum, und wir haben einen Morphismus von Garben

$$i^\sharp \;:\; \mathcal{O}_X \;\to\; \mathcal{O}_X/J \;\overset{ad}{\to}\; i_*i^{-1}(\mathcal{O}_X/J) = i_*\mathcal{O}_V\,.$$

Hierbei ist ad ein Isomorphismus, denn für $x \in X$ gilt: Ist $x \in X \smallsetminus V$, so ist nach Definition $(\mathcal{O}_X/J)_X = 0$, aber es gilt auch $(i_*\mathcal{F})_X = 0$ für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf V, wie man sofort sieht. Für $x \in V$ gilt andererseits $(i_*\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_x$ und damit $(i_*i^{-1}(\mathcal{O}_X/J))_x \cong (\mathcal{O}_X/J)_x$, und man sieht leicht an der expliziten Beschreibung in 6.7, dass ad einen Isomorphismus in den Halmen bei x induziert.

Wir erhalten also einen Morphismus lokal geringter Räume $i : (V, \mathcal{O}_V) \to (X, \mathcal{O}_X)$, wobei

$$i^\sharp \;:\; \mathcal{O}_X \;\to\; i_*\mathcal{O}_V$$

ein Epimorphismus ist. Es bleibt also zu zeigen:

3) $(V, \mathcal{O}_V)$ ist ein Schema.

Indem wir affine offene Mengen in X betrachten, können wir annehmen, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist. Dann gibt es wegen der Quasi-Kohärenz von J ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ mit $J \cong \tilde{\mathfrak{a}}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} V(J) &= \{x \in X \mid J_x \subseteq \mathfrak{m}_x\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{a})\,. \end{aligned}$$

Andererseits liefert der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ eine abgeschlossene Immersion

$$i \;:\; Y \;=\; \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \;\to\; \mathrm{Spec}(A) = X$$

mit zugehöriger Idealgarbe $\tilde{\mathfrak{a}} = J$. Nach dem folgenden Lemma ist dann $V(J)$ isomorph zu $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$, also ein affines Schema.

Lemma 6.8 Ist $i : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, und ist J die zugehörige Idealgarbe, so faktorisiert i kanonisch als

$$i : \quad Y \xrightarrow[\sim]{\alpha} V(J) \xhookrightarrow{i'} X\;,$$

wobei α ein Isomorphismus und i' der kanonische Morphismus ist.

Beweis Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \to J \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathcal{O}_Y \to 0\,. \tag{6.8.1}$$

Sei $y \in Y$ und $x = i(y) \in X$. Dann haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to J_x \to \mathcal{O}_{X,x} \to (i_*\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,y} \to 0\,,$$

so dass $J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$; es ist also $i(Y) \subseteq V(J)$. Ist umgekehrt $x \in X \smallsetminus i(Y)$, so ist $(i_*\mathcal{O}_Y)_x = 0$ und daher $x \notin V(J)$. Es folgt

$$i(Y) = V(J)$$

als abgeschlossene Teilmenge, und die stetige Abbildung i faktorisiert als

$$i: \quad Y \xrightarrow[\sim]{\alpha} V(J) \xhookrightarrow{i'} X\ ,$$

mit einem Homöomorphismus α und der Inklusion i'. Die exakte Sequenz (6.8.1) induziert also einen Isomorphismus

$$\beta\ :\ \mathcal{O}_X/J \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Y = i'_*\alpha_*\mathcal{O}_Y\,.$$

Nach dem folgenden Lemma erhalten wir hieraus einen Isomorphismus

$$\gamma: \quad \mathcal{O}_{V(J)} = (i')^{-1}\mathcal{O}_X/J \xrightarrow[\sim]{(i')^{-1}(\beta)} (i')^{-1}i'_*\alpha_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow[\sim]{Ad} \alpha_*\mathcal{O}_Y\ .$$

Dies liefert einen Isomorphismus lokal geringter Räume

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow[\sim]{\alpha} (V(J), \alpha_*\mathcal{O}_Y) \xrightarrow[\sim]{} (V(J), \mathcal{O}_{V(J)})\ ,$$

dessen Komposition mit $i' : V(J) \to X$ gleich i ist, wie aus dem folgenden kommutativen Diagramm folgt (für die Kommutativität siehe die in 3.A bewiesenen Eigenschaften von Adjunktionen)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[rr, "(i')^\sharp"] \arrow[dr, twoheadrightarrow] \arrow[ddrr, bend right, "i^\sharp"'] & & (i')_*(i')^{-1}(\mathcal{O}_X/J) \arrow[rr, "(i')_*(\gamma)"] \arrow[dr, "(i')_*(i')^{-1}(\beta)"] & & i'_*\alpha_*\mathcal{O}_Y \\
& \mathcal{O}_X/J \arrow[ur, "ad"] \arrow[dr, "\beta"] & & (i')_*(i')^{-1}(i'_*\alpha_*\mathcal{O}_Y) \arrow[ur, "(i')_*Ad"] & \\
& & i'_*\alpha_*\mathcal{O}_Y \arrow[ur, "ad"] \arrow[uurr, bend right, "id"'] & &
\end{tikzcd}$$

Lemma 6.9 Ist T ein topologischer Raum und $i : Z \hookrightarrow T$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge, so ist für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf Z der Adjunktionsmorphismus

$$Ad: \ i^{-1}i_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus.

Beweis Übungsaufgabe!

4) Die Eindeutigkeit von $V(J)$ folgt mit Lemma 6.8.

Abschließend zeigen wir noch:

Satz 6.10 Sei X ein Schema und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine quasi-kohärente Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$ mit $V(J) = Y$ (als Menge). Im Allgemeinen ist J nicht eindeutig bestimmt, aber es gibt genau eine quasi-kohärente Idealgarbe $J_Y \subseteq \mathcal{O}_X$, für die das Schema $V(J_Y)$ reduziert ist und $Y = V(J_Y)$ als topologischer Raum. Wir nennen diese Schemastruktur $V(J_Y)$ auf Y die **reduzierte Unterschemastruktur**.

Beweis Definiere J_Y durch

$$J_Y(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in Y \cap U\}$$

für alle offenen $U \subseteq X$ ($s(x)$ das Bild von s unter $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$). Offenbar ist J_Y eine $\mathcal{O}_X$-Untergarbe von $\mathcal{O}_X$. Wir nennen J_Y auch das **Verschwindungsideal** von Y (Idealgarben in $\mathcal{O}_X$ werden auch einfach Ideale in $\mathcal{O}_X$ oder $\mathcal{O}_X$-Ideale genannt).

J_Y ist quasi-kohärent: Ist $U = \operatorname{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen, so ist $Y \cap U$ abgeschlossen in U, also gleich $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Für $f \in A$ ist

$$\begin{aligned} J_Y(D(f)) &= \{\tfrac{a}{f^n} \in A_f \mid a \in \mathfrak{p} \ \text{ für alle } \ \mathfrak{p} \in D(f) \cap V(\mathfrak{a})\} \\ &= \{\tfrac{a}{f^n} \in A_f \mid a \in \mathfrak{p} \ \text{ für alle } \ \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})\} \\ &= (\sqrt{\mathfrak{a}})_f \,. \end{aligned}$$

Hier gilt die zweite Gleichheit, weil durch Erweitern mit f ohne Einschränkung auch $a \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V(f)$ gilt, und die zweite Gleichheit, weil $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. Dies zeigt, dass

$$J_Y|_U = \widetilde{\sqrt{\mathfrak{a}}}$$

ist, also die Quasi-Kohärenz von J_Y. Weiter gilt $V(J_Y) = Y$: Es ist

$$\begin{aligned} V(J_Y) \cap U &= V(\sqrt{\mathfrak{a}}) && \text{(Beweis von Satz 6.6, Teil 3))} \\ &= V(\mathfrak{a}) = Y \cap U \,. \end{aligned}$$

Weiter ist $V(J_Y)$ reduziert, da $V(J_Y) \cap U = \operatorname{Spec}(A/\sqrt{\mathfrak{a}})$ als Schema; dies ist reduziert. Ist schließlich $V(J_Y) = V(J)$ als Menge für eine weitere quasi-kohärente Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$, so ist $V(J) \cap U = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{b})$ für das Ideal $\mathfrak{b} \subseteq A$ mit $J|_U = \tilde{\mathfrak{b}}$, und wegen $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$ muss gelten$\sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dabei ist $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{b})$ genau dann reduziert, wenn $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Definition 6.11 Sei S ein Schema. Ein S-Schema X heißt **projektiv**, wenn der Strukturmorphismus $f : X \to S$ eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_S \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

besitzt, wobei i eine abgeschlossene Immersion und p der kanonische Morphismus ist. Ein **quasi-projektives** S-Schema ist ein offenes Unterschema eines projektiven S-Schemas.

Bemerkung: Wir werden noch sehen, dass dies äquivalent zur Definition in Alg. Geo. I, 10.19 ist. Grothendieck gibt noch eine andere Definition, die bei einem noetherschen Schema S mit unserer Definition äquivalent ist.

Zur Ergänzung:

Lemma/Definition 6.12 Ein Morphismus $j : W \to X$ von Schemata heißt **offene Immersion**, wenn gilt:
(i) $j(W)$ ist offen in X.
(ii) j induziert einen Homöomorphismus $W \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} j(W)$.
(iii) Für $y \in W$ und $x = j(y)$ ist $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{W,y}$ ein Isomorphismus.
Der Morphismus j faktorisiert dann als

$$j : \quad W \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} j(W) \xhookrightarrow{j'} X \ ,$$

wobei α ein Isomorphismus ist (mit unterliegender stetiger Abbildung α aus (ii)) und j' der kanonische Morphismus für das offene Unterschema $j(W)$.

Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Einschränkung von $j^\sharp : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_W$ auf $j(W)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{j(W)} \xrightarrow{\sim} \alpha_*\mathcal{O}_W$ induziert.

7 Divisoren und invertierbare Moduln

Ziel dieses Abschnitts ist, die folgenden Objekte, Gruppen und Homomorphismen zu verstehen:

invertierbare Moduln		Cartier-Divisoren		Weil-Divisoren
$Pic(X)$	$\overset{\alpha}{\hookleftarrow}$	$CaCl(X)$	$\overset{\beta}{\to}$	$CH^1(X)$
Picard-Gruppe		Cartier-Klassengruppe		Chowgruppe

Wir beginnen mit den invertierbaren Moduln

Definition 7.1 Sei X ein Schema (oder ein geringter Raum) und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

(a) F heißt **frei**, wenn $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{(I)} := \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{O}_X$ für eine Menge I ist, die Mächtigkeit $|I|$ von I heißt dann der Rang von $\mathcal{F}$, Bezeichnung $rg(\mathcal{F})$.

(b) $\mathcal{F}$ heißt **lokal frei**, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $\mathcal{F}|_U$ freier $\mathcal{O}_U$-Modul ist; der Rang von $\mathcal{F}|_U$ heißt dann der lokale Rang von $\mathcal{F}$ bei x, $rg_x(\mathcal{F})$. Ist dieser Rang derselbe für alle $x \in X$, so heißt er der Rang von $\mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ heißt **invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul**, wenn $\mathcal{F}$ lokal frei vom Rang 1 ist.

Bemerkung 7.2 (a) Ist $\mathcal{F}$ lokal frei, so ist für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul vom Rang $rg_x(\mathcal{F})$. Die Abbildung $x \mapsto rg_x(\mathcal{F})$ ist lokal konstant, also konstant, wenn X zusammenhängend ist.

(b) Ist X ein Schema, so ist jeder lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modul quasi-kohärent (vergleiche Übungsaufgabe 22).

Definition 7.3 Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt

$$\mathcal{F}^\vee := \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$$

das **Dual** von $\mathcal{F}$ oder der zu $\mathcal{F}$ duale Modul.

Lemma 7.4 Für $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ gibt es einen kanonischen, funktoriellen $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus

$$\mathcal{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})\,. \tag{7.4.1}$$

Dieser ist ein Isomorphismus, wenn $\mathcal{E}$ oder $\mathcal{F}$ lokal frei von endlichem Rang ist.

Beweis Auf den lokalen Schnitten wird dieser Morphismus durch die Zuordnung

$$f \otimes s \mapsto (t \mapsto f(t) \cdot s)$$

gegeben. Die letzte Behauptung ist eine lokale Frage; wir können also annehmen, dass $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^n$ oder $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^n$ ist. Aber für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ ist $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G})$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{G}^n$ und $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X^n)$ zu $(\mathcal{G}^\vee)^n$, und so genügt es, den Fall $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ oder $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ zu betrachten. Der erste Fall folgt nun aus dem kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X \cong \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \quad , s \mapsto \text{ Multiplikation mit } s \tag{7.4.2}$$

(der aus der Isomorphie $A \xrightarrow{\sim} Hom_A(A, A)$ für alle Ringe A folgt), und der zweite Fall ist klar.

Corollar 7.5 Ist $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1, so gilt dies auch für $\mathcal{L}^\vee$, und man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X . \tag{7.5.1}$$

Beweis Die erste Aussage ist lokal und folgt daher aus (7.4.2). Für die zweite Aussage genügt es wegen 7.4, einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \tag{7.5.2}$$

zu konstruieren. Wir nehmen hierfür den Morphismus, der für offenes $U \subseteq X$ einen Schnitt $s \in \mathcal{O}_X(U)$ auf die "Multiplikation mit s" abbildet

$$\mathcal{L}|_U \xrightarrow{\cdot s} \mathcal{L}|_U , \tag{7.5.3}$$

der für $V \subseteq U$ offen die Abbildung von $\mathcal{O}_X(V)$-Moduln $\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ ist, die durch Multiplikation mit $s|_V$ gegeben ist. Dass (7.5.2) dann ein Isomorphismus ist, ist eine lokale Frage und folgt daher aus (7.4.2).

Dieses Resultat rechtfertigt die Bezeichnung "invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul".

Lemma/Definition 7.6 Für ein Schema X (oder einen geringten Raum) sei

$$Pic(X)$$

die Menge der Isomorphieklassen $[\mathcal{L}]$ von invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dies wird eine abelsche Gruppe durch die Verknüpfung

$$[\mathcal{L}] + [\mathcal{L}'] := [\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}']$$

und heißt die **Picardgruppe** von X.

Beweis der Gruppeneigenschaften: Assoziativität und Kommutativität folgen aus 5.7 (a) und (b), nach 5.7 (c) ist $[\mathcal{O}_X]$ das neutrale Element, und nach 7.5 ist $[\mathcal{L}^\vee]$ das Inverse von $[\mathcal{L}]$.

Lemma 7.7 Für jeden Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata (oder geringten Räumen) haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcrcl} f^* & : & Pic(Y) & \to & Pic(X) \\ & & [\mathcal{L}] & \mapsto & [f^*\mathcal{L}] . \end{array}$$

Hierdurch wird Pic zu einem kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} \text{(Geringte Räume)} & \to & \underline{Ab} = \text{(abelsche Gruppen)} \\ X & \mapsto & Pic(X)\,. \end{array}$$

Beweis Die erste Aussage folgt aus der Isomorphie

(7.7.1) $$f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}') \;\cong\; f^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G}'$$

für beliebige (nicht notwendig invertierbare) $\mathcal{O}_Y$ Moduln $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$. (Beweis: Übungsaufgabe!) Die zweite Aussage folgt aus der Isomorphie

(7.7.3) $$(gf)^*\mathcal{H} \;\cong\; f^*g^*\mathcal{H}$$

für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und einen $\mathcal{O}_Z$-Modul $\mathcal{H}$ (siehe 5.21 (b)).

Wir kommen nun zu Cartier-Divisoren.

Definition 7.8 Sei X ein Schema.

(a) Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X) \;:=\; \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \ker(\mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_U) = 0\}$$

die (multiplikative) Menge der **regulären Schnitte** von $\mathcal{O}_X$ über U.

(b) Die **Garbe $\mathcal{K}_X$ der meromorphen Funktionen auf** X ist die Garbe assoziiert zur Prägarbe $\mathcal{K}'_X$ mit

$$\mathcal{K}'_X(U) \;:=\; \Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

und den von $\mathcal{O}_X$ induzierten Restriktionen.

(c) Sei

$$i \;:\; \mathcal{O}_X \;\to\; \mathcal{K}_X$$

der kanonische Monomorphismus (!) von Ringgarben.

Beispiel 7.9 (a) Für $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ gilt per Definition: f ist regulär (also in $\Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X)$) genau dann, wenn f_x Nicht-Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in U$.

(b) Für $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen ist $\Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X)$ die Menge der Nicht-Nullteiler in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$, denn es ist $\tilde{A} \xrightarrow{\cdot f} \tilde{A}$ genau dann ein Monomorphismus, wenn $A \xrightarrow{\cdot f} A$ injektiv ist. Ist A integer, so ist $\Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X) = A \smallsetminus \{0\}$.

Definition 7.10 (a) Ein Schema X heißt **integer**, wenn X irreduzibel und reduziert ist.

(b) Ein Schema heißt lokal integer, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die integer ist.

Lemma 7.11 Es ist äquivalent

(i) X ist integer.

(ii) Für alle offenen $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ integer.

(iii) Für alle affinen offenen $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ integer.

Beweis Übungsaufgabe.

Lemma 7.12 Sei X ein integres Schema, und sei η der (eindeutig bestimmte!) generische Punkt. Dann ist $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper und heißt der **Funktionenkörper** von X, Bezeichnung $K(X)$. Für jede nicht-leere affine offene Menge $U \subseteq X$ liefert der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ einen Isomorphismus

$$(7.12.1) \qquad Quot(\mathcal{O}_X(U)) \xrightarrow{\sim} K(X)\,.$$

Insbesondere ist die Garbe $\mathcal{K}_X$ isomorph zur konstanten Garbe $\underline{K(X)}$ assoziiert zu $K(X)$.

Beweis Als irreduzibles Schema besitzt X genau einen generischen Punkt η, und dieser ist in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge U enthalten. Ist $U \subseteq X$ offen nicht leer, so liegt η in U und wir haben einen kanonischen Ringmonomorphismus

$$(7.12.2) \qquad \alpha_U \;:\; \Gamma_{reg}(U, \mathcal{O}_X)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \;\to\; \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)\,.$$

Dies ist verträglich mit Restriktionen und definiert einen Morphismus von Ring-Prägarben

$$(7.12.3) \qquad \alpha \;:\; \mathcal{K}'_X \;\to\; \underline{K(X)}\,,$$

wobei die konstante Garbe $\underline{K(X)}$ explizit durch

$$\underline{K(X)}(U) = \begin{cases} K(X) & , \quad U \neq \emptyset, \\ 0 & , \quad U = \emptyset \end{cases}$$

gegeben ist (vergleiche Alg. Geo. I, Lemma 3.8).

Ist $U = \mathrm{Spec}(A)$ affin (nicht-leer), so ist auch U irreduzibel und hat also nur ein minimales Primideal $\mathfrak{P}$, und dieses ist gleich η, so dass $A_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,\eta}$. Ist A integer, so ist $\mathfrak{P} = \{0\}$ und $A = Quot(A)$, so dass (7.12.2) ein Isomorphismus ist. Da die affinen offenen U eine Basis der Topologie bilden, induziert also (7.12.3) einen Isomorphismus $\mathcal{K}_X \xrightarrow{\sim} \underline{K(X)}$.

Bemerkung 7.13 Der Morphismus α_U in (7.12.2) ist im Allgemeinen kein Isomorphismus. Zum Beispiel ist für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n_k$ über einem Körper $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_X) = k = Quot(k)$, aber $K(\mathbb{P}^n_k) = k[X_0, \ldots, X_n]_{(\{0\})} \cong k(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}) \neq k$ für $n \neq 0$.

Lemma/Definition 7.14 Für einen topologischen Raum T und eine Prägarbe von Ringen $\mathcal{A}$ auf T bezeichne $\mathcal{A}^\times$ die **Prägarbe der invertierbaren Elemente** in $\mathcal{A}$, definiert durch

$$\mathcal{A}^\times(U) = \mathcal{A}(U)^\times = \text{ Gruppe der Einheiten im Ring } \mathcal{A}(U)$$

mit den von $\mathcal{A}$ induzierten Restriktionen. Dies ist eine Prägarbe von abelschen Gruppen. Ist $\mathcal{A}$ eine Garbe, so ist auch $\mathcal{A}^\times$ eine Garbe.

Die Behauptungen sind offensichtlich. Sei nun X ein Schema. Dann haben wir eine Einbettung $\mathcal{O}_X^\times \hookrightarrow \mathcal{K}_X^\times$.

Definition 7.15 (a) Ein **Cartier-Divisor** auf X ist ein Element von

$$Div(X) \ = \ \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)\,.$$

(b) Ein Cartier-Divisor heißt **prinzipal** oder **Hauptdivisor**, wenn er im Bild des Homomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times) \ \to \ \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)$$

liegt.

(c) Die Gruppe

$$CaCl(X) \ = \ Div(X)/\{\text{Hauptdivisoren}\}$$

heißt die Cartier-Klassengruppe von X.

Erläuterung 7.16 Sei $D \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)$ ein Cartier-Divisor. Da $\mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$ ein Quotient von $\mathcal{K}_X^\times$ ist, gibt es nach Satz 3.17 (b) eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X und Elemente

(7.16.1) $$f_i \in \mathcal{K}(U_i)^\times \quad (\text{“meromorphe Funktoren auf } U_i\text{”})\,,$$

die auf $D|_{U_i}$ abgebildet werden. Wegen der exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
 & & & f_i \arrow[r, mapsto] & D|_{U_i} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U_i)^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_X(U_i)^\times \arrow[rr] \arrow[d] & & (\mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)(U_i) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \arrow[r] & \mathcal{K}_X(U_i \cap U_j)^\times \arrow[rr] & & (\mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

gilt

(7.16.2) $$f_i|_{U_i\cap U_j}(f_j|_{U_i\cap U_j})^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times\,.$$

Umgekehrt liefert jede solche Familie (f_i) einen Cartier-Divisor. Wir sagen, dass D von $(f_i)_{i\in I}$ bzw. $(U_i, f_i)_{i\in I}$ repräsentiert wird.

Ist (g_i) eine weitere solche Familie für dieselbe Überdeckung (U_i), so repräsentiert sie denselben Cartier-Divisor genau dann, wenn $f_i g_i^{-1} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)^\times$. Für eine zweite Überdeckung (V_j) erhält man ein analoges Resultat, indem man die Verfeinerung $(U_i \cap V_j)$ betrachtet.

Beispiele 7.17 Ist X integer, so wird also ein Cartier-Divisor durch eine Familie $f_i \in K(X)^\times$ gegeben, wobei es eine Überdeckung $U_i \neq \emptyset$ von X gibt mit $f_i f_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X) \subseteq K(X)$ für alle i, j (denn dann ist $(f_i f_j^{-1})^{-1} = f_j f_i^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ und damit $f_i f_j^{-1}$ invertierbar in $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$).

Definition 7.18 Für $D \in Div(X)$, repräsentiert durch $(U_i, f_i)_{i\in I}$, sei $\mathcal{O}_X(D)$ (manche Autoren schreiben $\mathcal{L}(D)$) die $\mathcal{O}_X$-Untergarbe von $\mathcal{K}_X$, die über U_i von f_i^{-1} erzeugt wird.

Proposition 7.19 (a) $\mathcal{O}_X(D)$ ist wohldefiniert und eine invertierbare Untergarbe von $\mathcal{K}_X$ (Letztere nennt man auch gebrochene Ideale auf X).

(b) Umgekehrt ist jede invertierbare Untergarbe von $\mathcal{K}_X$ von dieser Gestalt.

(c) Es ist $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$ und $\mathcal{O}_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(D)^{-1}$ (Die Verknüpfung von Cartier-Divisoren wird üblicherweise additiv geschrieben; und für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ sei $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^\vee$ das Dual).

(d) Es ist $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ (abstrakter Isomorphismus) genau dann, wenn $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist (hierfür schreibt man auch $D_1 \sim D_2$ und sagt, D_1 ist rational äquivalent zu D_2). Die Zuordnung $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ induziert also einen injektiven Homomorphismus

(7.19.1) $$CaCl(X) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Pic(X)$$

Beweis (a) Nach Definition ist

(7.19.2) $$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot f_i^{-1} \subseteq \mathcal{K}_{X|U_i} = \mathcal{K}_{U_i}\,,$$

und wegen $f_j f_i^{-1}|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_J, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j})^\times$ ist $\mathcal{O}_{U_i} f_i^{-1}|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \cdot f_i^{-1}|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \cdot f_i^{-1}|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{O}_{U_j} f_j^{-1}|_{U_i \cap U_j}$, d.h., so wird tatsächlich eine Untergarbe von $\mathcal{K}_X$ definiert. Ebenso sieht man, dass $\mathcal{O}(D)$ nicht von dem Repräsentaten abhängt: Durch Verfeinerung kann man zweite Repräsentanten (g_i) für dieselbe Überdeckung (U_i) betrachten, und dann ist $f_i g_i^{-1} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})^\times$. Wegen $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^\times)$ ist schließlich die Multiplikation mit f_i^{-1} ein Isomorphismus

(7.19.3) $$\mathcal{O}_{U_i} \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}_{U_i} f_i^{-1} = \mathcal{O}_X(D)|_{U_i}\,,$$

also $\mathcal{O}_X(D)$ lokal frei vom Rang 1.

(b) Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_X$ eine invertierbare $\mathcal{O}_X$-Untergarbe. Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $g \in \Gamma(U, \mathcal{K}_X)$, so dass $\mathcal{L}|_U$ freier $\mathcal{O}_U$-Modul mit Basis g ist. Durch Verkleinerung von U können wir annehmen, dass $g = \frac{u}{s}$, wobei $u \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ und s Nicht-Nullteiler in $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ ist. Da die Multiplikation mit g, $\mathcal{O}_U \overset{\sim}{\to} \mathcal{L}|_U \subseteq \mathcal{K}_U$ injektiv ist, muss die Multiplikation mit u injektiv sein, d.h., u ist Nicht-Nullteiler, d.h., $g \in \Gamma(U, \mathcal{K}_X^\times)$. Diese Paare (U_x, g_x), für jedes $x \in X$ gewählt, bilden einen Cartier-Divisor: da $g_x|_{U_x \cap U_y}$ und $g_y|_{U_x\cap U_y}$ beides Basen von $\mathcal{L}|_{U_x \cap U_y}$ sind, ist $g_x|_{U_x\cap U_y} = f \cdot g_y|_{U_x \cap U_y}$ für ein $f \in \Gamma(U_x \cap U_y, \mathcal{O}_X^\times)$. Nach Definition gilt schließlich $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ für $D = (U_x, g_x^{-1})_{x\in X}$.

(c) Der Garbenmorphismus

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D_2) & \to & \mathcal{K}_X \\ & & s \otimes t & \mapsto & s \cdot t \end{array}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D_2) \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}_X(D_1 - D_2)\,.$$

Ist nämlich $D_1 = (U_i, f_i)$, $D_2 = (U_i, g_i)$, so ist $D_1 - D_2 = (U_i, f_i g_i^{-1})$ und

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(D_1)|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{O}_X(-D_2)|_{U_i} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_X(D_1 - D_2)|_{U_i} \\ \mathcal{O}_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{O}_{U_i} \arrow[u, "f_i^{-1}\otimes g_i", "\wr"'] \arrow[r, "\text{Multiplikation}", "\sim"'] & \mathcal{O}_{U_i} \arrow[u, "\wr", "f_i^{-1} g_i"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ.

(d) Es genügt (nach (c)) zu zeigen: $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ genau dann wenn D prinzipal ist.

Ist D prinzipal, gegeben durch $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times)$, so ist $\mathcal{O}_X \underset{\sim}{\xrightarrow{\cdot f^{-1}}} \mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$. Ist umgekehrt $\varphi : \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D)$, und ist $g \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X)$ das Bild der Eins, so folgt wie in (b), dass $g \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times)$ und D durch g^{-1} repräsentiert ist.

Satz 7.20 Ist X ein intgres Schema, so ist

$$\alpha : \; CaCl(X) \xrightarrow{\sim} Pic(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis Es ist zu zeigen, dass jeder invertierbare $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ isomorph zu einem gebrochenen Ideal in $\mathcal{K}_X$ ist. Betrachte $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{L}) := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X$ (Garbe der "meromorphen Schnitte in $\mathcal{L}$"). Ist $U \subseteq X$ offen mit $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$, so ist $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X|_U \cong \mathcal{K}_U$. Ist zusätzlich U affin, so folgt, dass die Abbildung

$$\mathcal{M}(U) \; \to \; \mathcal{M}_\eta$$

ein Isomorphismus ist; außerdem gibt es einen Isomorphismus $\mathcal{M}_\eta \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_\eta = K(x)$ (wähle ein U). Da die betrachteten U eine Basis der Topologie bilden, erhalten wir im Beweis von Lemma 7.12 einen Isomorphismus

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X = \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{M}_\eta} \; \cong \; \underline{\mathcal{K}(X)} \; \cong \; \mathcal{K}_X \, .$$

Zusammen mit dem Monomorphismus $\mathcal{L} \cong \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X$ können wir $\mathcal{L}$ mit einer $\mathcal{O}_X$-Untergarbe von $\mathcal{K}_X$ identifizieren.

Wir kommen nun zu Weil-Divisoren. Sei X ein Schema.

Vorbemerkung 7.21 Es gibt eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \{\text{irreduzible abgeschlossene Teilmengen } Y \subseteq X\} \\ x & \mapsto & \overline{\{x\}} \, . \end{array}$$

Die Umkehrabbildung bildet Y auf den generischen Punkt η_Y von Y ab.

Definition 7.22 Sei $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge und η ihr generischer Punkt. Die Kodimension von Y in X, Bezeichnung $\operatorname{codim}(Y)$ oder $\operatorname{codim}_X(Y)$, ist definiert als $\dim \mathcal{O}_{X,\eta}$. Man nennt dies auch die Kodimension von η, $\operatorname{codim}(\eta)$. Die Menge der Punkte der Kodimension j sei mit $X^{(j)}$ bezeichnet.

Bemerkung 7.23 Dies ist gleich dem Supremum der Längen m von Ketten

$$Y = Y_0 \subsetneqq Y_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Y_m$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen in X, die Y umfassen, denn die generischen Punkte der Y_i entsprechen einer Kette von Primidealen in $\mathcal{O}_{X,\eta}$.

Definition 7.24 (a) Ein Weil-Primdivisor ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ der Kodimension 1.

(b) Die Gruppe der Weil-Divisoren (oder algebraischen Zykel der Kodimension 1) auf X ist die freie abelsche Gruppe über den Weil-Primdivisoren:

$$Z^1(X) \;=\; \bigoplus_{\substack{Y \subseteq X \text{ irred. abg.} \\ \text{codim } (Y)=1}} \mathbb{Z} \;=\; \bigoplus_{y \in X^{(1)}} \mathbb{Z}\,.$$

Ein Weil-Divisor schreibt sich also als eine endliche Summe

$$D \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$$

mit $Y_i \subseteq X$ irreduzibel abgeschlossen von der Kodimension 1 und $a_i \in \mathbb{Z}$.

Wir erhalten Weil-Divisoren als Nullstellen- und Polmengen von meromorphen Funktionen (dies hängt mit Krulls Hauptidealsatz zusammen). Zuerst studieren wir dazu nun die Nullstellenordnungen von meromorphen Funktionen.

Lemma/Definition 7.25 Sei A ein noetherscher integrer lokaler Ring der Dimension 1 mit Quotientenkörper K. Für $f \in A$ definiere dann

$$ord(f) \;:=\; \ell(A/ < f >) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\,,$$

wobei $\ell(A/ < f >) = \ell_A(A/ < f >)$ die Länge des A-Moduls (der A-Algebra) $A/ < f >= A/fA$ ist (Alg. Geo. I, Definition 8.3).

Für $f, g \in A$ gilt

(7.25.1) $$ord(f \cdot g) \;=\; ord(f) + ord(g)$$

und es gilt

(7.25.2) $$ord(0) = \infty \quad \text{und} \quad ord(f) < \infty \text{ für } f \neq 0\,.$$

(7.25.3) $$ord(f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in A^\times$$

Für $\alpha = \frac{f}{g} \in K^\times$ (mit $f, g \in A \smallsetminus \{0\}$) ist

(7.25.4) $$ord(\alpha) \;:=\; ord(f) - ord(g) \in \mathbb{Z}$$

wohldefiniert; die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} ord & : & K^\times & \to & \mathbb{Z} \\ & & \alpha & \mapsto & ord(\alpha) \end{array}$$

ist ein Homomorphismus.

Beweis der Behauptungen: Ein lokaler noetherscher Ring B hat genau dann endliche Länge (als Modul über sich selbst), wenn $\dim B = 0$ (Alg. Geo. I, Satz 8.7). Hieraus folgt (7.25.2), da $\dim(A/<f>) = 0$ falls $f \neq 0$ und keine Einheit ist (Alg. Geo. I, Corollar 8.27). (Beachte noch, dass $\ell_A(A/<f>) = \ell_{A/<f>}(A/<f>)$). Weiter gilt $\ell_A(A/<f>) = 0$ genau dann, wenn $A/<f> = 0$, d.h., wenn $f \in A^\times$; dies beweist (7.25.2). Ist f oder g gleich 0, so gilt (7.25.1) per Definition. Sind beide ungleich 0, so folgt (7.25.1) aus der exakten Sequenz

$$0 \to A/fA \xrightarrow{i} A/f \cdot gA \xrightarrow{\pi} A/gA \to 0$$

(wobei π die kanonische Surjektion und i durch die Multiplikation mit g induziert ist), sowie der Additivität der Länge in exakten Sequenzen (Alg. Geo. I, Lemma 8.4). Die Wohldefiniertheit von (7.25.4) folgt wiederum aus (7.25.1) und (7.25.2), und die letzte Behauptung folgt wieder aus (7.25.2).

Beispiel 7.26 Für einen Körper k betrachte den Polynomring $k[x]$ und das Primelement $x - a$ (für ein $a \in k$). Der lokale Ring $A = k[x]_{<x-a>}$ (Lokalisierung nach dem Primideal $<x-a>$) hat dann die Dimension 1 und den Quotientenkörper $k(x) = Quot(k[x])$, und jedes Polynom $f \in k[x]$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$f = (x-a)^n \cdot g \quad \text{mit } g(a) \neq 0\,.$$

Dann ist also $g \notin <x-a>$ und damit Einheit in A. Weiter ist

$$A/<f> = A/<(x-a)^n> \cong k[x]/<(x-a)^n>$$

und hat Länge n. Damit ist $ord(f)$ die übliche Nullstellenordnung von f bei a.

Sei nun X ein integres noethersches Schema. Für einen Weil-Divisor $Y = \overline{\{y\}}$ ist dann per Definition $\mathcal{O}_{X,y}$ ein noetherscher integrer lokaler Ring der Dimension 1. Weiter gilt kanonisch

$$Quot(\mathcal{O}_{X_y}) = K(X) \tag{7.26.1}$$

(betrachte eine affine offene Umgebung $U = \mathrm{Spec}(A)$ von y). Wir können also definieren:

Definition 7.27 Für $f \in K(X)^\times$ heißt

$$v_Y(f) := v_y(f) := ord_{\mathcal{O}_{X,y}}(f) \in \mathbb{Z}$$

die (Nullstellen-) Ordnung von f bei y. Für $v_y(f) = -m$, $m \in \mathbb{N}$, sagen wir auch, dass f einen Pol m-ter Ordnung bei y hat.

Lemma 7.28 Es gibt nur endlich viele $y \in X^{(1)}$ (also Weil-Primdivisoren $Y = \overline{\{y\}}$) mit $v_y(f) \neq 0$.

Beweis Sei $U \subseteq X$ affin offen. Dann ist $K(X)^\times = Quot(\mathcal{O}_X(U))^\times$, wir können also schreiben

$$f = \frac{g}{h}\,,\ g, h \in \mathcal{O}_X(U)\,.$$

Durch Verkleinern von U (Wegnehmen von $V(gh)$) können wir also annehmen, dass $f \in \mathcal{O}_X(U)^\times$, also $v_y(f) = 0$ für alle $y \in X^{(1)}$ mit $y \in U$. Sei $Z = X \smallsetminus U$; dies ist eine abgeschlossene Teilmenge. Ist $y' \in X^{(1)}$ mit $y' \in Z$, so ist y ein generischer Punkt von Z, d.h., $\overline{\{y'\}}$ ist eine irreduzible Komponente von Z: Falls nicht, gäbe es ein $z \in Z$ mit $y' \in \overline{\{z\}}$ und $y' \neq z$. Dann wäre aber

$$\overline{\{y'\}} \subsetneqq \overline{\{z\}} \subsetneqq X$$

also $\mathrm{codim}(y') \geq 2$, im Widerspruch zur Annahme. Da Z noethersch ist, hat Z nur endlich viele irreduzible Komponenten; daher gibt es nur endlich viele $y \in X^{(1)}$ mit $y \neq U$, also nur endlich viele $y \in X^{(1)}$ mit $v_y(f) \neq 0$.

Die folgende Definition macht also Sinn:

Lemma/Definition 7.29 Sei X noethersch und integer.

(a) Für $f \in K(X)^{\times}$ heißt

$$div(f) \ := \sum_{y \in X^{(1)}} v_y(f)\overline{\{y\}} \in Z^1(X)$$

der zu f assoziierte Weil-Divisor.

(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcrcl} div & : & K(X)^{\times} & \to & Z^1(X) \\ & & f & \mapsto & div(f) \end{array}$$

ist ein Homomorphismus. Sei $P(X)$ das Bild; seine Elemente (also die Divisoren der Form $div(f)$ mit $f \in K(X)^{\times}$) heißen (Weil-)Hauptdivisoren.

(c) Die Gruppe

$$CH^1(X) = Z^1(X)/P(X) = Z^1(X)/\{div(f) \mid f \in k(X)^{\times}\}$$

heißt die erste Chowgruppe von X (oder auch Weil-Klassengruppe).

Lemma/Definition 7.30 Sei X ein integres noethersches Schema.

(a) Für einen Cartier-Divisor $D = (U_i, f_i)_{i \in I}$ auf X und $y \in X^{(1)}$ definiere

$$v_y(D) \ := \ v_y(f_i) \quad \text{falls} \quad y \in U_i$$

($f_i \in K(X)^{\times}$). Dies liefert einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\begin{array}{rcrcl} Z & : & Div(X) & \to & Z^1(X) \\ & & D & \mapsto & Z(D) = \sum\limits_{y \in X^{(1)}} v_y(D)\overline{\{y\}}\,. \end{array}$$

(b) Dieser induziert einen Homomorphismus

$$\beta : \ CaCl(X) \ \to \ CH^1(X)\,.$$

Beweis der Behauptungen: (a): Für $y \in U_i \cap U_j$ ist $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_{X,y}^{\times}$, also $0 = v_y(f_i f_j^{-1}) = v_y(f_i) - v_y(f_j)$. Genauso zeigt man, dass $v_D(D)$ nicht vom Repräsentanten $(U_i, f_i)_{i \in I}$ abhängt.

(b): Für einen Hauptdivisor $D = ((X, f))$ ist nach Definition $Z(D) = div(f) \in P(X)$.

Wir geben nun noch Bedingungen an, unter denen β injektiv ist.

Erinnerung 7.31 Ein Integritätsring A heißt **normal** (oder ganz abgeschlossen), wenn er ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist (Alg. Geo. I, Definition 6.7).

Lemma/Definition 7.32 Ein lokal integres Schema X heißt **normal**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ sind normal.

(b) Für jedes irreduzible affine offene Unterschema $U = \mathrm{Spec}(A)$ in X ist A normal.

Beweis der Äquivalenz: Sei A ein Integritätsring und A' sein ganzer Abschluss in $Quot(A)$. (b) $\Rightarrow$ (a): Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist A'_S der ganze Abschluss von A_S, wie man leicht sieht.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sind die lokalen Ringe $A_{\mathfrak{p}}$ ganz abgeschlossen für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, so induziert $A \hookrightarrow A'$ Isomorphismen $A_{\mathfrak{p}} \to (A')_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$, hieraus folgt $(A'/A)_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$ (Exaktheit der Lokalisierung), also $A'/A = 0$, d.h., $A = A'$.

Lemma 7.33 Ist A ein ganz abgeschlossener, noetherscher Integritätsring, so ist

$$A = \bigcap_{ht(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}\,, \tag{7.33.1}$$

also der Durchschnitt über alle Lokalisierungen nach Primidealen der Höhe 1.

Beweis Sei A' die rechte Seite von (7.33.1). Angenommen $A \subsetneqq A'$. Für $f \in A' \smallsetminus A$ ist

$$I(f) = \{b \in A \mid bf \in A\}$$

ein echtes Ideal in A (da $1 \notin I(f)$). Da A noethersch ist, besitzt die Menge aller dieser Ideale ein maximales Element, etwa $\mathfrak{q} := I(h)$ für ein $h \in A' \smallsetminus A$. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal: Seien $f, g \in A$ mit $fg \in I(h)$ aber $g \notin I(h)$. Dann ist $gh \in A' \smallsetminus A$, $I(h) \subseteq I(gh)$ und $f \in I(gh)$. Dann ist $I(h) = I(gh)$ wegen der Maximalität, also $f \in I(h)$.

Betrachte nun das Ideal $h\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \subseteq A_{\mathfrak{q}}$. Ist $h\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$, so ist $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} = h^{-1}A_{\mathfrak{q}}$ ein Hauptideal in $A_{\mathfrak{q}}$ (aus der Gleichung folgt $h^{-1} \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \subseteq A_{\mathfrak{q}}$), und nach Krull's Hauptidealsatz ist $ht(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}) = 1$, also $ht(\mathfrak{q}) = 1$ (beachte Alg. Geo. I, Corollar 5.15). Wegen $h \in A'$ ist also $h \in A_{\mathfrak{q}}$, also $1 = h \cdot h^{-1} \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ – Widerspruch! Also gilt $h\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \subseteq \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ (da $A_{\mathfrak{q}}$ lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ ist). Ist $A_{\mathfrak{q}}[h] \subseteq Quot(A_{\mathfrak{q}})$ die von h erzeugte $A_{\mathfrak{q}}$-Algebra, so erhalten wir eine Einbettung von $A_{\mathfrak{q}}$-Moduln

$$A_{\mathfrak{q}}[h] \hookrightarrow Hom_{A_{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}})\,.$$

Da $A_{\mathfrak{q}}$ noethersch ist, ist $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ endlich erzeugt, und jede Surjektion $A_{\mathfrak{q}}^N \twoheadrightarrow \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ liefert eine Einbettung

$$Hom_{A_{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}) \hookrightarrow Hom_{A_{\mathfrak{q}}}(A_{\mathfrak{q}}^N, \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}) \cong (\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}})^N\,.$$

Als Untermodul eines endlich erzeugten Moduls ist also $A_{\mathfrak{q}}[h]$ endlich erzeugt (hier benutzt man wieder, dass $A_{\mathfrak{q}}$ noethersch ist). Dies bedeutet aber, dass h ganz über $A_{\mathfrak{q}}$ ist (siehe Alg. Geo. I., Corollar 6.3), also in $A_{\mathfrak{q}}$ liegt, weil mit A auch $A_{\mathfrak{q}}$ ganz abgeschlossen ist (7.32). Dies liefert wie vorher einen Widerspruch.

Wir können nun zeigen:

Lemma 7.34 Ist X ein normales noethersches integres Schema, so sind die Homomorphismen

$$\begin{array}{rcrcl} Z & : & Div(X) & \rightarrow & Z^1(X) \\ \beta & : & CaCl(X) & \rightarrow & CH^1(X) \end{array}$$

injektiv.

Beweis Ist $D = (U_i, f_i)_{i \in I}$ ein Cartier-Divisor mit $Z(D) = 0$, wobei ohne Einschränkung alle U_i affin seien, so ist $v_y(f_i) = 0$ für alle $i \in I$ und alle $y \in X^{(1)}$. Da $\mathcal{O}_{X,y}$ nach Voraussetzung intger, normal und von der Dimension 1 ist, ist $\mathcal{O}_{X,y}$ ein diskreter Bewertungsring zur Bewertung v_y von $K(X) = Quot(\mathcal{O}_{X,y})$, und aus $v_y(f_i) = 0$ folgt $f_i \in \mathcal{O}_{Y,y}^{\times}$ (siehe den Anhang 7.A). Es ist also $f_i, f_i^{-1} \in \mathcal{O}_{X,y}$ für alle $y \in X^{(1)}$. Mit 7.33 folgt hieraus $f_i, f_i^{-1} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ und damit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)^{\times}$ für alle $i \in I$. Dies bedeutet aber, dass der Cartier-Divisor trivial ist. Also ist Z injektiv. Ist aber $Z(D) = div(f)$ für ein $f \in K(X)^{\times}$, so folgt wegen $div(f) = Z((X, f))$ und der Injektivität von Z, dass $D = (X, f)$. Dies zeigt die Injektivität von β.

Bemerkung 7.35 Sei X ein integres Schema und

$$D = \sum_{y \in X^{(1)}} a_y \overline{\{y\}} \in Z^1(X)$$

(i) Für $U \subseteq X$ offen definiere

$$D|_U = \sum_{y \in U^{(1)}} a_y \overline{\{y\}}$$

und erhalte $res : Z^1(X) \twoheadrightarrow Z^1(U)$.
(ii) Sei $x \in X$. Die kanonische Abbildung $f = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow X$ induziert injektive Abbildungen $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x})^{(n)} \hookrightarrow X^{(n)}$. Wir können also definieren:

$$D_x := \sum_{y \in (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x})^{(1)}} a_y \overline{\{y\}} \in Z^1(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x})$$

und erhalten $f^* : Z^1(X) \rightarrow Z^1(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x})$.

Definition 7.36 Ein integres Schema X heißt **lokal faktoriell**, wenn alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell sind.

Satz 7.37 Sei X ein noethersches integres Schema. Ist X normal und lokal faktoriell, so ist

$$\beta : CaCl(X) \underset{\sim}{\rightarrow} CH^1(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis Nach 7.34 ist β injektiv. Sei nun $Y = \overline{\{y\}}$ ein Weil-Primdivisor auf X. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann eine offene Umgebung U_x von x und ein $f_x \in K(X)^{\times}$ mit

$$Y|_{U_x} = div_{U_x}(f_x) .$$

Sei nämlich Y_x der Weil-Divisor, der durch Y auf $\mathcal{O}_{X,x}$ (d.h., auf $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$) induziert wird (Bemerkung 7.35). Nach dem folgenden Lemma ist dann das zugehörige Primideal der Höhe 1 in $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Hauptideal, gegeben durch $f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \subseteq K(X)$. Der zugehörige Hauptdivisor $div(f_x)$ unterscheidet sich von Y nur in endlich vielen Punkten $y_1, \ldots, y_r$ mit $y \notin \overline{\{y_i\}}$, und $U_x = X \smallsetminus (\bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{\{y_i\}})$ leistet das Verlangte.

Dann ist $D = (U_x, f_x)_{x \in X}$ ein Cartier-Divisor (wegen $div_{U_x \cap U_{x'}}(f_x) = div_{U_x \cap U_{x'}}(f_{x'})$ ist $f_x f_{x'}^{-1} \in \Gamma(U_x \cap U_{x'}, \mathcal{O}_X)^\times$) und es ist $Z(D) = Y$.

Lemma 7.38 Für einen noetherschen Integritätsring sind äquivalent:

(a) A ist faktoriell.

(b) Jedes irreduzible Element in A ist ein Primelement.

(c) Jedes Primideal der Höhe 1 ist ein Hauptideal.

Beweis Die Äquivalenz von (a) und (b) ist aus der Algebra bekannt.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $ht(\mathfrak{p}) = 1$. Dann gibt es ein Element $f \neq 0$ in $\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ Primideal ist, liegen alle irreduziblen Faktoren von f in $\mathfrak{p}$, also enthält $\mathfrak{p}$ ein irreduzibles Element. Dann ist $< \pi >$ ein Primideal, und wegen $0 \subsetneqq < \pi > \subseteq \mathfrak{p}$ und $ht(\mathfrak{p}) = 1$ gilt $\mathfrak{p} = < \pi >$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Sei π irreduzibel und $\mathfrak{p} \supseteq < \pi >$ ein minimaler Primteiler von π. Nach Krulls Hauptidealsatz ist dann $ht(\mathfrak{p}) = 1$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal, also $\mathfrak{p} = < \pi' >$ mit einem Primelement π'. Es folgt $\pi = u\pi'$ für ein $u \in A$, und da π irreduzibel ist, muss u eine Einheit sein. Also ist π wie π' ein Primelement.

Die Voraussetzungen von 7.34 und 7.37 sind für reguläre Schemata erfüllt:

Definition 7.39 (a) Ein noetherscher lokaler Ring A mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt **regulär**, wenn

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$$

(nach Alg. Geo. I, Satz 8.23 gilt immer $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$).

(b) Ein lokal noethersches Schema X heißt **regulär** am Punkt $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist, und X heißt regulär, wenn X regulär an allen Punkten $x \in X$ ist.

Bemerkungen 7.40 Sei A ein regulär lokaler Ring. Dann gilt:

(a) Nach einem Resultat von Serre ist die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ nach einem Primideal wieder regulär (Matsumura, Commutative Algebra, S. 139, Corollary to Theorem 45). Insbesondere ist A genau dann regulär, wenn das Schema $\mathrm{Spec}(A)$ regulär ist.

(b) A ist integer (Matsumura, S. 118, Theorem 34 und S. 120, Theorem 35).

(c) Nach einem Satz von Auslander und Buchsbaum ist A faktoriell (Matsumura, S. 142, Theorem 48).

(d) Insbesondere ist A normal (Alg. Geo. I, Lemma 6.8).

Corollar 7.41 Ist X ein reguläres integres noethersches Schema, so hat man Isomorphismen

$$Pic(X) \xleftarrow[\sim]{\alpha} CaCl(X) \xrightarrow[\sim]{\beta} CH^1(X) \ .$$

7.A Diskrete Bewertungsringe

Definition 7.A.1 Sei K ein Körper. Eine (normierte) **diskrete Bewertung** auf K ist eine surjektive Abbildung

$$v \,:\, K^{\times} \;\to\; \mathbb{Z}\,,$$

so dass für alle $x, y \in K^{\times}$ gilt
(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$ (d.h., v ist ein Homomorphismus),
(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Setze formal $v(0) = \infty$.

Satz 7.A.2 Ist $v : K^{\times} \to \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung, so ist

$$R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \;=\; \{x \in K^{\times} \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

ein lokaler Hauptidealring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$$

und Einheitengruppe

$$R^{\times} = \{x \in K^{\times} \mid v(x) = 0\}\,.$$

R heißt der Bewertungsring zu v.

Beweis Es folgt sofort aus 7.A.1 (i) und (ii), dass R ein Unterring von K ist, der die Eins enthält (aus $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ folgt $v(1) = 0$).

Weiter folgt sofort, dass $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Ideal ist. Schließlich gilt für $v \in K^{\times}$

$$0 \;=\; v(1) \;=\; v(x \cdot x^{-1}) = v(x) + v(x^{-1})\,,$$

also

$$\begin{aligned} v(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v(x^{-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in R \text{ und } x^{-1} \in R \\ &\Leftrightarrow \quad x \in R^{\times}\,. \end{aligned}$$

Daher ist $R \smallsetminus \mathfrak{m} = R^{\times}$, d.h., R ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.

R ist Hauptidealring: Sei $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und

$$n \;:=\; \inf\{v(a) \mid a \in \mathfrak{a}\}\,.$$

Dann ist $n \in \mathbb{N}_0$, und es existiert ein $x \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$ mit $v(x) = n$. Dann ist $\mathfrak{a} =< x >$: Ist $a \in \mathfrak{a}$, so ist $v(a) \geq n = v(x)$, also $v(\frac{a}{x}) = v(a) - v(x) \geq 0$, also $\frac{a}{x} \in R$ und $a = \frac{a}{x} \cdot x \in < x >$.

Definition 7.A.3 Ein integrer Ring R (kommutativ, mit Eins) heißt **diskreter Bewertungsring**, wenn $K = Quot(R)$ eine diskrete Bewertung v besitzt, für die $R \subseteq K$ der zugehörige Bewertungsring ist.

Lemma 7.A.4 Sei R ein lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$. Dann sind äquivalent:

(a) R ist ein diskreter Bewertungsring.

(b) R ist noethersch, von der Dimension 1 und normal.

(c) R ist noethersch, von der Dimension 1, und $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.

(d) R ist noethersch, von der Dimension 1 und regulär.

(e) R ist ein Hauptidealring und kein Körper.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (e): Dies folgt aus Lemma 7.A.2, da $v(R \smallsetminus \{0\}) \neq v(K^\times) = \mathbb{Z}$.

(e) $\Rightarrow$ (b): Nach Krulls Hauptidealsatz hat jeder Hauptidealring R die Dimension ≤ 1, also die Dimension 1, wenn R integer und kein Körper ist. Weiter ist jeder (integre) Hauptidealring ganz abgeschlossen (Alg. Geo. I, Lemma 6.8)

(b) $\Rightarrow$ (c): Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{m} \neq \{0\}$. Sei $0 \neq a \in \mathfrak{m}$. Dann ist $\dim(R/ < a >) = 0$ (Alg. Geo. I, Corollar 8.27), also $R/ < a >$ artinsch (loc. cit. Satz 8.7), also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq < a >$, und wir können annehmen, dass $\mathfrak{m}^{n-1} \nsubseteq < a >$. Sei $b \in \mathfrak{m}^{n-1} - < a >$, und sei $x = \frac{a}{b} \in K = Quot(R)$. Nach Konstruktion ist dann $x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$ (denn $b\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^n \subseteq < a >$) aber $x^{-1}\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}$. Denn sonst wäre $\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugter treuer $A[x^{-1}]$-Modul, also x^{-1} ganz über A (Alg. Geo. I, Lemma 6.2, Fall $\mathfrak{a} = A$), also $x^{-1} \in A$, da A ganz abgeschlossen in K ist, und somit $b \in < a >$ im Widerspruch zur Annahme.

Es folgt $x^{-1}\mathfrak{m} = A$ und damit $\mathfrak{m} =< x >$.

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Nach Definition ist R genau regulär, wenn $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(R) = 1$, aber nach dem Nakayama-Lemma gilt $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $\mathfrak{m} =< \pi >$ und $0 \neq a \in R$. Wie eben folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $a \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^{n+1}$. Es gibt also ein $y \in R$ mit $a = y\pi^n,\ y \notin \mathfrak{m}$. Dann ist y eine Einheit, also

$$< a >=< \pi^n >= \ \mathfrak{m}^n \,.$$

Setze $v(a) := n$. Dies ist wohldefiniert, denn wegen $\dim(R) = 1$ ist $\mathfrak{m}^n \neq 0$ für alle n und daher $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^m$ für $n \neq m$ (Nakayama-Lemma). Für $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$v(ab) \ = \ v(a) + v(b)\,, \tag{7.A.4.1}$$

denn für $< a >= \mathfrak{m}^n$ und $< b >= \mathfrak{m}^{n'}$ gilt $< ab >= \mathfrak{m}^{n+n'}$. Weiter gilt

$$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}\,, \tag{7.A.4.2}$$

denn für $< a >= \mathfrak{m}^n$ und $< b >= \mathfrak{m}^{n'}$ mit (ohne Einschränkung) $n \leq n'$ ist

$$< a + b > \subseteq \ \mathfrak{m}^m + \mathfrak{m}^{n'} \subseteq \mathfrak{m}^n \,.$$

Definieren wir nun für $0 \neq x = \frac{a}{b} \in K = Quot(R)$ (mit $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$)

$$v(x) = v(a) - v(b)\,,$$

so folgt aus (7.A.4.1), dass dies wohldefiniert ist und aus (7.A.4.1) und (7.A.4.2), dass dies eine diskrete Bewertung auf K definiert.

Schließlich gilt $v(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in R$, d.h., R ist der Bewertungsring zu v.

Corollar 7.A.5 Ist R ein diskreter Bewertungsring, so ist die zugehörige diskrete Bewertung v auf $K = Quot(R)$ eindeutig, und es gilt für $x \in K^\times$

$$v(x) \ = \ ord(x)\,,$$

wobei ord wie in 7.25 definiert ist. Insbesondere ist $ord(x) = v(x) = 0$ genau dann wenn $x \in R^\times$.

Beweis Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R, und sei $\mathfrak{m} =< \pi >$ mit $\pi \in R$. Dann lässt sich jedes $a \in R$ schreiben als $a = u \cdot \pi^n$ mit eindeutigem $n \in \mathbb{N}_0$ und Einheit u. Dann muss $v(a) = n \cdot v(\pi)$ sein, und wegen der Surjektivität von v muss $v(\pi) = 1$ sein. Weiter haben wir Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} k = R/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \\ \alpha \mod \mathfrak{m} & \mapsto & \alpha\pi^m \mod \mathfrak{m}^{n+1}\,. \end{array}$$

Ist $0 \neq a \in R$ und $< a >= \mathfrak{m}^n$, so ist $v(x) = n$ und andererseits

$$< a >= \mathfrak{m}^n \subsetneqq \mathfrak{m}^{n-1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{m} \subsetneqq R$$

eine Kompositionsreihe der Länge n, also $ord(a) = \ell(R/ < a >) = n$.

8 Projektive Schemata und Aufblasungen

Sei $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ ein graduierter Ring und das Schema $X = Proj(S)$ wie in Alg. Geo. I, Definition 10.13 definiert.

Lemma/Definition 8.1 (a) Ein **graduierter S-Modul** ist ein S-Modul M mit einer Graduierung

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$$

durch abelsche Untergruppen M_i, so dass $S_n M_i \subseteq M_{i+n}$ für alle i und n.

(b) Ein Homomorphismus von graduierten S-Moduln $\varphi : M \to M'$ ist ein S-Modul-Homomorphismus mit $\varphi(M_n) \subseteq M'_n$ für alle $\mathbb{Z}$.

(c) (homogene Lokalisierung, vergleiche die Definitionen von $S_{(\mathfrak{p})}$ und $S_{(f)}$ in Alg. Geo. I, Definition 10.12 und Definition 3.28). Für ein homogenes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq S$ sei

$$M_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{m}{t} \in M_{\mathfrak{p}} \mid m \in M \text{ und } t \in S \smallsetminus \mathfrak{p} \quad \text{beide homogen vom gleichen Grad}\}.$$

Dies ist ein $S_{(\mathfrak{p})}$-Modul durch

$$\frac{s}{t'} \cdot \frac{m}{t} := \frac{sm}{t't}$$

für $\frac{m}{t}$ wie oben und $\frac{s}{t'} \in S_{(\mathfrak{p})}$ (also $s \in S$ und $t' \in S \smallsetminus \mathfrak{p}$ beide homogen vom gleichen Grad).

Weiter sei für jedes homogene Element $f \in S$

$$M_{(f)} = \{\frac{m}{f^n} \in M_f \mid n \in \mathbb{N}, m \in M \text{ homogen vom Grad } n \cdot \deg(f)\}.$$

Dies ist ein $S_{(f)}$-Modul durch

$$\frac{s}{f^{n'}} \cdot \frac{m}{f^n} = \frac{sm}{f^{n+n'}}$$

für $\frac{m}{f^n} \in M_{(f)}$ und $\frac{s}{f^{n'}} \in S_{(f)}$.

Die Behauptungen in (c) folgen leicht.

Definition 8.2 Für einen graduierten S-Modul M und $n \in \mathbb{Z}$ definiere den **getwisteten** graduierten S-Modul $M(n)$ als den S-Modul M mit der neuen Graduierung

$$M(n)_i := M_{i+n}.$$

Hierdurch wird M_i "um n Stellen nach links verschoben":

$$\begin{array}{cccccccc} M & \dots & M_{-2} & M_{-1} & M_0 & M_1 & M_2 & \dots \\ M(1) & \dots & M_{-1} & M_0 & M_1 & M_2 & M_3 & \dots \\ \text{Grad:} & \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Bemerkung 8.3 Offenbar ist für ein homogenes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq S$

$$M(n)_{(\mathfrak{p})} = M_{\mathfrak{p},n} := \{\frac{m}{s} \in M_{\mathfrak{p}} \mid m \in M, s \in S \smallsetminus \mathfrak{p} \text{ homogen mit } \deg(m) = \deg(s) + n\}$$

und für ein homogenes Element $f \in S$

$$M(n)_{(f)} = M_{f,n} := \{\frac{m}{f^i} \mid m \in M \text{ homogen }, \deg(m) = i\deg(f) + n\}$$

Lemma/Definition 8.4 Für einen graduierten S-Modul M definiere die Garbe $\tilde{M}$ auf $X = Proj(S)$ wie folgt: Für $U \subseteq X$ offen und nicht leer sei

$$\tilde{M}(U) := \{r : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{(\mathfrak{p})} \mid \text{ es gelten die Eigenschaften (i) und (ii)}\}$$

mit den Eigenschaften
(i) $r(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$ für alle $\mathfrak{p} \in U$.
(ii) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es homogene Elemente $m \in M, f \in S \setminus \mathfrak{p}$ vom gleichen Grad, so dass

$$r(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D_+(f)$$

(Beachte, dass $\mathfrak{p} \in D_+(f)$). Für $V \subseteq U$ offen und nicht-leer sei

$$res_{U,V}(r) \;=\; r|_V\,.$$

Dann ist $\tilde{M}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und es gibt kanonische Isomorphismen

$$\tilde{M}_{\mathfrak{p}} \;\cong\; M_{(\mathfrak{p})} \qquad (\text{von } \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}\text{-Moduln}) \tag{8.4.1}$$

für den Halm von $\tilde{M}$ bei $\mathfrak{p} \in Proj(S)$, sowie

$$\tilde{M}(D_+(f)) \;\cong\; M_{(f)} \qquad (\text{von } \mathcal{O}_X(D_+(f)) = S_{(f)}\text{-Moduln}) \tag{8.4.2}$$

für jedes homogene $f \in S$.

Der Beweis ist analog zum Beweis von Alg. Geo. I, Satz 10.14. Insbesondere ist der Isomorphismus (8.4.2) verträglich mit Restriktionen für $D_+(f') \subseteq D_+(f)$ und liefert einen Isomorphismus

$$\tilde{M}|_{D_+(f)} \;\cong\; (M_{(f)})^{\sim} \tag{8.4.3}$$

für das affine Schema $D_+(f) \cong \mathrm{Spec}(S_{(f)})$ und den $S_{(f)}$-Modul $M_{(f)}$, was die Quasi-Kohärenz von $\tilde{M}$ zeigt.

Definition 8.5 Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $X = Proj(S)$.

(a) Definiere den $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{O}_X(n) := S(n)^{\sim}$, wobei der graduierte S-Modul $S(n)$ durch 8.2 definiert ist.

(b) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ setze $\mathcal{F}(n) := \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

Proposition 8.6 Sei S als S_0-Algebra durch S_1 erzeugt. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$:

(a) $\mathcal{O}_X(n)$ ist ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul.

(b) Für jeden graduierten S-Modul M gilt kanonisch $\tilde{M}(n) \cong M(n)^{\sim}$. Insbesondere gilt $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n)$.

Beweis (a): Nach (8.4.3) haben wir für homogenes $f \in S_+$ einen Isomorphismus nach Restriktion auf $D_+(f) \cong Spec(S_{(f)})$

$$S(n)^{\sim}|_{D_+(f)} \;\cong\; (S(n)_{(f)})^{\sim}\,.$$

Da S von S_1 erzeugt wird, wird $X = Proj(S)$ von den offenen Mengen $D_+(f)$ mit $f \in S_1$ überdeckt ($X - \bigcup\limits_{f\in S_1} D_+(f) = V_+(< f)f \in S_1 >) = V_+(S_+) = \emptyset$). Es genügt also zu zeigen, dass $S(n)_{(f)}$ für $f \in S_1$ ein freier $S_{(f)}$-Modul ist. Dies folgt aus dem Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \xrightarrow{\sim} & S(n)_{(f)} \\ \frac{s}{f^m} & \mapsto & f^n \cdot \frac{s}{f^m} \end{array}$$

(beachte, dass $S(n)_m = S_{n+m}$, und dass f invertierbar in S_f ist, so dass dies für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ definiert ist).

(b) Wir definieren einen Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

(8.6.1) $$\tilde{M}(n) = \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{M} \to (M(n))^{\sim}$$

wie folgt: Wir haben für jedes $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ einen $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$-Modul-Homomorphismus

(8.6.2) $$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(n)_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}} \tilde{M}_{\mathfrak{p}} \quad S(n)_{\mathfrak{p})} \otimes_{S_{(\mathfrak{p})}} M_{(\mathfrak{p})} & \to & M(n)_{(\mathfrak{p})} \\ \frac{s}{t'} \otimes \frac{m}{t} & \mapsto & \frac{s}{t'} \cdot \frac{m}{t} := \frac{sm}{t't} \end{array}$$

(mit $m \in M_i, t \in S_j - \mathfrak{p}_i, s \in S_{j+n}, t' \in S_j - \mathfrak{p}_j$).

Hieraus ergibt sich der Morphismus (8.6.1) auf lokalen Schnitten durch die Zuordnung

$$f \otimes g \;\mapsto\; (\mathfrak{p} \mapsto f(\mathfrak{p}) \cdot g(\mathfrak{p}))\,.$$

Dann induziert (8.6.1) im Halm bei $\mathfrak{p}$ gerade den Morphismus (8.6.2).

Nach Voraussetzung gibt es ein $f \in S_1$ mit $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, d.h., $f \notin \mathfrak{p}$, und wie im Beweis von (a) folgt, dass (8.6.2) ein Isomorphismus ist. Daher ist auch der Garbenmorphismus (8.6.1) ein Isomorphismus.

Wir kommen nun zu projektiven Räumen. Sei A ein Ring, $r \in \mathbb{N}$ und

$$P = \mathbb{P}^r_A = Proj(A\,[X_0,\ldots,X_r])$$

der projektive Raum. Dann haben wir also die invertierbaren $\mathcal{O}_P$-Moduln $\mathcal{O}_P(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. (Beachte, dass $A[X_0,\ldots,X_r]$ als A-Algebra von den Elementen $X_0,\ldots,X_r \in A[X_0,\ldots,X_r]_1$ erzeugt wird). $\mathcal{O}_P(n)$ heißt auch der n-te **Twistmodul** auf $P = \mathbb{P}^r_A$, und $\mathcal{O}_P(1)$ heißt auch der **kanonische** (oder **Serre**-) **Twistmodul**. Nach 8.6. (b) gilt für $n > 0$ $\mathcal{O}_P(n) \cong \mathcal{O}_P(1)^{\otimes n}$ und $\mathcal{O}_P(-n) \cong \mathcal{O}_P(-1)^{\otimes n}$. Weiter gilt $\mathcal{O}_P(-1) \cong \mathcal{O}_P(1)^{\vee}$ (Übungsaufgabe!).

Lemma 8.7 Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ hat man einen kanonischen Isomorphismus von A-Moduln

(8.7.1) $$\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) \;\xrightarrow{\sim}\; A[X_0,\ldots,X_r]_n\,.$$

Insbesondere ist $\Gamma(P, \mathcal{O}_P) \cong A$ und $\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$ für $n < 0$.

Beweis Nach (8.4.2) und Bemerkung 8.3 haben wir einen kanonischen Isomorphismus von A-Moduln

$$\Gamma(D_+(X_i), \mathcal{O}_P(n)) \;\cong\; A[X_0, \ldots, X_r]_{X_i,n}\,.$$

Ist nun $s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P(n))$, so ist $s|_{D_+(X_i)}$ von der Form

$$\frac{P_i(X_0, \ldots, X_r)}{X_i^{n_i}}\,,$$

wobei P_i homogen vom Grad $n_i + n$ ist. Dabei muss gelten

$$\frac{P_i}{X_i^{n_i}} \;=\; \frac{P_j}{X_j^{n_j}} \quad \text{in } A[X_0, \ldots, X_r]_{X_iX_j}\,,$$

also $P_iX_j^{n_j} = P_jX_i^{n_i}$ (X_iX_j ist Nichtnullteiler). Daher gibt es ein homogenes Polynom Q vom Grad n mit

$$P_i \;=\; Q \cdot X_i^{n_i}\,.$$

Die Isomorphie (8.7.1) bildet s auf Q ab.

Lemma/Definition 8.8 Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir sagen $\mathcal{F}$ **wird von globalen Schnitten erzeugt**, wenn folgende äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Es gibt eine Familie $(s_i)_{i\in I}$ von globalen Schnitten $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, so dass für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von den Keimen $(s_i)_x \quad (i \in I)$ erzeugt wird.

(b) $\mathcal{F}$ ist Quotient eines freien $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{O}_X^{(I)}$.

Beweis der Äquivalenz: Wir haben einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X, \mathcal{F}) \\ f & \mapsto & f_X(1) \end{array}$$

(für $f_X : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{F})$). Ein $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus

$$\varphi:\; \mathcal{O}_X^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$$

entspricht also gerade einer Familie $(s_i)_{i\in I}$ in $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Dabei ist φ genau dann ein Epimorphismus, wenn für jedes $x \in X$ die Halmabbildung $\varphi_X : \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{F}_x$ surjektiv ist; dies bedeutet gerade (a).

Beispiel 8.9 Auf $P = \mathbb{P}^r_A$ wird $\mathcal{O}_P(n)$ für $n < 0$ *nicht* von globalen Schnitten erzeugt (da dann $\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$), aber $\mathcal{O}_P(1)$ wird von den globalen Schnitten

$$X_0, \ldots, X_r \in A[X_0, \ldots, X_r]_1 = \Gamma(P, \mathcal{O}_P(1))$$

erzeugt, denn über dem affinen Schema $D_+(X_i) = \mathrm{Spec}(A\,[X_0, \ldots, X_n]_{(X_i)})$ entspricht $\mathcal{O}_P(1)$ dem $A[X_0, \ldots, X_n]_{(X_i)}$-Modul $\Gamma(D_+(X_i), \mathcal{O}(1)) = A[X_0, \ldots, X_n]_{X_i,1}$, und dieser ist frei mit Basis $\frac{X_i}{1}$.

Bemerkung 8.10 (Pull-back von Schnitten) (a) Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul, so haben wir einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcrcl} f^* & : & \Gamma(Y,\mathcal{G}) & \to & \Gamma(X, f^*\mathcal{G}) \\ & & s & \mapsto & f^*(s)\,, \end{array}$$

der wie folgt beschrieben werden kann: Sei $\mathcal{G} \to f_* f^* \mathcal{G}$ der Adjunktionsmorphismus. Durch Übergang zu globalen Schnitten über Y erhalten wir hieraus den gewünschten Homomorphismus

$$\mathcal{G}(Y) \to (f_*(f^*\mathcal{G}))(Y) = (f^*\mathcal{G})(X)\,.$$

(b) Wird $\mathcal{G}$ von den globalen Schnitten t_i $(i \in I)$ erzeugt, so wird $\varphi^*\mathcal{G}$ von den globalen Schnitten $\varphi^* t_i$ $(i \in I)$ erzeugt. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Y,\mathcal{G}) \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[d, "can"'] & & \Gamma(X, f^*\mathcal{G}) \arrow[d, "can"] \\ \mathcal{G}_y \arrow[r] & (f^*\mathcal{G})_x = (f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)_x & = \mathcal{G}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

für $x \in X$ und $y = f(x) \in Y$, wobei die untere Abbildung der offensichtliche Homomorphismus ist. Wird $\mathcal{G}_y$ von den Keimen $(t_i)_y$ als $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul erzeugt, so wird $\mathcal{G}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von den Elementen $(t_i)_y \otimes 1$ erzeugt; dies sind die Keime der Schnitte $\varphi^* t_i$.

Die Twistgarben $\mathcal{O}_P(n)$ auf $P = \mathbb{P}^r_A$ werden oft nur mit $\mathcal{O}(n)$ bezeichnet. Der folgende Satz beschreibt Morphismen in den projektiven Raum.

Satz 8.11 Sei A ein Ring, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}^n_A = Proj(A[X_0, \ldots, X_n])$ und X ein A-Schema.

(a) Ist $\varphi : X \to \mathbb{P}^r_A$ ein A-Morphismus, so wird der invertierbare $\mathcal{O}_X$-Modul $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ von den globalen Schnitten $\varphi^* X_0, \ldots, \varphi^* X_n$ erzeugt.

(b) Ist umgekehrt $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul, der von den globalen Schnitten $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ erzeugt wird, so gibt es genau einen A-Morphismus

$$\varphi \ : \ X \ \to \ \mathbb{P}^n_A$$

so dass $\mathcal{L} \cong \varphi^*\mathcal{O}(1)$ und $s_i = \varphi^* X_i$ für $i = 0, \ldots, n$ unter diesem Isomorphismus.

Beweis (a): Dies folgt aus 8.10 (b).

(b): Seien $\mathcal{L}$ und $s_0, \ldots, s_n$ wie in (b). Für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei

(8.11.0) $$X(s_i) := \{x \in X \mid (s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}\,.$$

Dann ist $X(s_i)$ offen in X: Betrachte eine trivialisierende Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ für $\mathcal{L}$, d.h., eine offene Überdeckung mit $\mathcal{L}|_{U_j} \cong \mathcal{O}_{U_j}$. Es genügt zu zeigen, dass $X(s_i) \cap U_j$ offen für alle j ist, also können wir annehmen, dass $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ ist, und wir erhalten den bekannten Fall $X(s)$ für $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Wir definieren nun A-Morphismen

(8.11.1) $$\varphi_i \ : \ X(s_i) \ \to \ D_+(X_i) \subseteq \mathbb{P}^n_A$$

wie folgt. Da $D_+(X_i) = \operatorname{Spec}(A[X_0,\dots,X_n]_{(X_i)})$ affin ist, genügt es, Morphismen von A-Algebren

$$(8.11.2) \qquad R_i \;:=\; A[X_0,\dots,X_n]_{(X_i)} = A\left[\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{\hat{X}_i}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i}\right] \to \Gamma(X(s_i),\mathcal{O}_X)$$

zu definieren (nach 0.6). Nach Definition ist $(s_i)_x \in \mathcal{L}_x - \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$ für alle $x \in X$, also $(s_i)_x$ ein Erzeugendes von $\mathcal{L}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul (Nakayama-Lemma). Die Abbildung

$$(8.11.3) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X|_{X(s_i)}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}|_{X(s_i)} \\ f & \mapsto & f\cdot s_i \end{array}$$

ist also ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{X(s_i)}$-Moduln.

Für jedes s_j mit $j \neq i$ gibt es also ein eindeutig bestimmtes $f_j^{(i)} \in \Gamma(X(s_i),\mathcal{O}_X)$ mit

$$(8.11.4) \qquad s_j \;=\; f_j^{(i)}\cdot s_i \quad \text{auf} \quad X(s_i)\,.$$

Wir definieren nun (8.11.2), indem wir $\frac{X_j}{X_i}$, für $j \in \{0,\dots,n\} - \{i\}$, auf $f_j^{(i)}$ abbilden (universelle Eigenschaft des Polynomrings).

Es ergibt sich nun, dass sich die φ_i aus (8.11.1) verkleben, denn auf $X(s_i)\cap X(s_j)$ gilt $s_j = f_j^{(i)}s_i$ und $s_i = f_i^{(j)}s_j$, so dass die durch Einschränkung von φ_i und φ_j auf $X(s_i)\cap X(s_j)$ erhaltenen Ringhomomorphismen

$$R_{ij} \;:=\; A[X_0,\dots,X_n]_{(X_iX_j)} \;\to\; \Gamma(X(s_i)\cap X(s_j),\mathcal{O}_X)$$

gleich sind (Beachte: $R_{ij} = (R_i)_{\frac{X_j}{X_i}} = (R_j)_{\frac{X_i}{X_j}}$). Weiter gilt

$$(8.11.5) \qquad X \;=\; \bigcup_{i=0}^{n} X(s_i)\,,$$

da $\mathcal{L}$ von $s_0,\dots,s_n$ erzeugt wird (für jedes $x \in X$ gibt es ein i mit $(s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$, also $x \in X(s_i)$). Durch Verkleben der φ_i erhalten wir also einen A-Morphismus

$$\varphi \;:\; X \;\to\; \mathbb{P}^n_A\,.$$

Da $\mathcal{O}(1)$ auf $D_+(X_i)$ frei mit Basis $X_i \in \Gamma(D_+(X_i),\mathcal{O}(1))$ ist (Beispiel 8.9) und $\mathcal{L}$ auf $X(s_i)$ frei mit Basis s_i (siehe (8.11.3)) erhalten wir den gewünschten Isomorphismus

$$\sigma:\; \mathcal{L} \;\xrightarrow{\sim}\; \varphi^*\mathcal{O}(1)\;,$$

der gerade dadurch bestimmt ist, dass s_i auf φ^*X_i abgebildet wird ($i = 0,\dots,n$).

Wir diskutieren nun die Eindeutigkeit. Sei

$$\psi \;:\; X \;\to\; \mathbb{P}^n_A$$

ein weiterer Morphismus, sei $\mathcal{M}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul, sei

$$\tau \;:\; \mathcal{M} \;\xrightarrow{\sim}\; \psi^*\mathcal{O}(1)$$

ein Isomorphismus, und seien $t_0, \ldots, t_n \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ die Schnitte mit $\tau(t_i) = \psi^* X_i$.

Für $x \in X$ und $y = \psi(x)$ induziert τ einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_x & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(1)_y \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,y}} \mathcal{O}_{X,x} \\ (t_i)_x & \mapsto & (X_i)_y \otimes 1\,. \end{array}$$

Weil $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Morphismus ist, erhalten wir hieraus einen Isomorphismus

$$\mathcal{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(1)_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}(1)_y \otimes_{k(y)} k(x)\,,$$

und es folgt

$$(t_i)_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{M}_x \;\Leftrightarrow\; (X_i)_y \notin \mathfrak{m}_y\mathcal{O}(1)_y\,.$$

Also gilt

$$\psi^{-1}(D_+(X_i)) \;=\; X(t_i)\,.$$

Daher induziert ψ einen Morphismus

$$\psi_i : X(t_i) \to D_+(X_i) \tag{8.11.6}$$

(Beachte: Es ist gerade $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n_A(X_i)$ für $X_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(1))$ wie in (8.11.0) definiert). Dieser Morphismus ψ_i entspricht einem Homomorphismus von A-Algebren

$$\beta_i : R_i = A[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_m}{X_i}] \to \Gamma(X(t_i), \mathcal{O}_X)\,.$$

Weiter entspricht τ eingeschränkt auf $X(t_i)$ einem Isomorphismus

$$\Gamma(X(t_i), \mathcal{O}_X)t_i \xrightarrow{\sim} A[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]X_i \otimes_{R_i} \Gamma(X(t_i), \mathcal{O}_X)$$

der die Basis t_i auf die Basis $X_i \otimes 1$ abbildet, und den Schnitt

$$X_j = \frac{X_j}{X_i} \cdot X_i \quad \text{auf} \quad t_j\,.$$

Gilt nun $t_j = g_j^{(i)} \cdot t_i$ mit $g_j^{(i)} \in \Gamma(X, t_i), \mathcal{O}_X)$, so folgt, dass

$$\beta_i(\frac{X_j}{X_i}) = g_j^{(i)}\,.$$

Seien nun $\mathcal{L}, (s_0, \ldots, s_n)$, φ und σ wie am Anfang des Beweises. Gilt $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ und $t_i = s_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$, so folgt $f_j^{(i)} = g_j^{(i)}$ für alle i, j, so dass $\psi = \varphi$; dies zeigt die behauptete Eindeutigkeit.

Genauer gilt das Folgende: Ist $\psi = \varphi$, so haben wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{L} \underset{\sim}{\xrightarrow{\sigma}} \varphi^*\mathcal{O}(1) = \psi^*\mathcal{O}(1) \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau^{-1}}} \mathcal{M}\,,$$

der $(s_0, \ldots, s_n)$ auf $(t_0, \ldots, t_n)$ abbildet. Haben wir umgekehrt einen Isomorphismus

$$\gamma \,:\, \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\,,$$

der $(s_0, \ldots, s_n)$ auf $(t_0, \ldots, t_n)$ abbildet, so gilt $X(s_i) = X(t_i)$ für alle i sowie

$$g_j^{(i)} \;=\; f_j^{(i)}$$

für alle i und j; hieraus folgt $\psi = \varphi$.

Corollar 8.12 Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge

$$L_n(X) := \left\{ (\mathcal{L}, s_0, \ldots, s_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ invertierbarer } \mathcal{O}_X\text{-Modul}, \\ s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \text{ Schnitte die } \mathcal{L} \text{ erzeugen} \end{array} \right\} / \text{ Isomorphie}$$

und der Menge

$$Hom_A(X, \mathbb{P}_A^n)\,.$$

Hierbei heißen $(\mathcal{L}, s_0, \ldots, s_n)$ und $(\mathcal{M}, t_0, \ldots, t_n)$ isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\gamma : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ gibt, der $(s_0. \ldots, s_n)$ auf $(t_0, \ldots, t_n)$ abbildet.

Bemerkung 8.13 (a) Sei $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem für $Pic(X)$, d.h., eine Familie von invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln, so dass jeder invertierbare $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ zu genau einem $\mathcal{L}_i$ isomorph ist. Dann steht $L_n(X)$ in Bijektion zur Menge

$$\coprod_{i \in I} \{(s_0, \ldots, s_n) \in \Gamma(X, \mathcal{L}_i)^n \mid \mathcal{L}_i \text{ wird von } s_0, \ldots, s_n \text{ erzeugt}\} / \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$$

(viele der rechts stehenden Mengen können leer sein), wobei $\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ auf der angegebenen Menge operiert, indem $(s_0, \ldots, s_n)$ auf $(\lambda s_0, \ldots, \lambda s_n)$ abgebildet wird. Fixiert man nämlich $\mathcal{L}_i$ aus der Isomorphieklasse $[\mathcal{L}]$, so brauchen wir nur noch Isomorphismen $\gamma : \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_i$ zu betrachten; für jeden invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ haben wir aber einen Isomorphismus

(8.13.1)
$$\begin{array}{rcl} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times & \xrightarrow{\sim} & Aut_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}) \\ \lambda & \mapsto & \text{Multiplikation mit } \lambda\,, \end{array}$$

der aus den Ringhomomorphismen

(8.13.2)
$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$$

folgt (globale Schnitte in (7.5.2) nehmen).

(b) Andererseits steht $L_n(X)$ in Bijektion zur Menge

$$M_n(X) \;=\; \left\{ \varphi : \mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ invertierbarer } \mathcal{O}_X\text{-Modul} \\ \varphi \text{ Epimorphismus} \end{array} \right\} / \text{ Isomorphie}$$

wobei eine Isomorphie zwischen $\varphi_1 : \mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_1$ und $\varphi_2 : \mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}_1 \arrow[dd, "\gamma", "\wr"'] \\ \mathcal{O}_X^n \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & \mathcal{L}_2 \end{tikzcd}$$

mit einem Isomorphismus γ ist. Denn nach 8.8 entspricht ein Epimorphismus $\mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln gerade der Wahl von $n+1$ Schnitten $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ die $\mathcal{L}$ erzeugen.

(c) Die Zuordnung $X \rightsquigarrow L_n(X)$ liefert einen kontravarianten Funktor

$$L_n \;:\; Sch/A \;\to\; Sets$$

von der Kategorie der A-Schemata in die Kategorie der Mengen: Für einen A-Morphismus $f : X' \to X$ erhalten wir $f^* : L_n(X) \to L_n(X')$, indem wir die Klasse von $(\mathcal{L}, s_0, \ldots, s_n)$ auf die Klasse von $(f^*\mathcal{L}, f^*s_0, \ldots, f^*s_n)$ abbilden (vergleiche Bemerkung 8.10 (b)). Corollar 8.12 lässt sich dann präziser so ausdrücken, dass L_n durch das A-Schema $\mathbb{P}_A^n$ dargestellt wird, d.h., wir haben sogar einen in X funktoriellen Isomorphismus

$$L_n(X) \xrightarrow{\sim} Hom_A(X, \mathbb{P}_A^n) =: \mathbb{P}_A^n(X)\,,$$

d.h., es ist

$$L_n \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{P}_A^n}\,,$$

wobei $\underline{Y}$ den durch Y dargestellten Funktor auf Sch/A bezeichne (siehe Anhang 1.A, wo $\underline{Y}$ mit h_Y bezeichnet wird).

Entsprechend haben wir nach Bemerkung (b) einen kontravarianten Funktor $X \mapsto M_n(X)$ (für $f : X' \to X$ ist $f^* : M_n(X) \to M_n(X')$ die Abbildung, die $\varphi : \mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ auf $f^*\varphi : f^*\mathcal{O}_X^{n+1} = \mathcal{O}_{X'}^{n+1} \twoheadrightarrow f^*\mathcal{L}$ abbildet), und $\mathbb{P}_A^n$ stellt auch den Funktor $X \rightsquigarrow M_n(X)$ dar.

Beispiel 8.14 (Automorphismen des $\mathbb{P}_k^n$) Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir einen Homomorphismus

$$Gl_{n+1}(k) \to Aut_k(\mathbb{P}_k^n) \tag{8.14.1}$$

von der Gruppe der invertierbaren $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen über k in die Gruppe der k-Automorphismen von $\mathbb{P}_k^n$. Ist nämlich $A = (a_{ij}) \in Gl_{n+1}(k)$, so induziert A einen k-Automorphismus von

$$S \;=\; k[X_0, \ldots, X_n]\,,$$

indem X_i auf $\sum a_{ij}X_i$ abgebildet wird. Dies ist ein Automorphismus von graduierten Ringen und induziert einen Automorphismus von

$$\mathbb{P}_k^n \;=\; Proj(S)\;.$$

Wir erhalten einen Homomorphismus wie in 8.13.1, der über $PGl_{n+1}(k) := Gl_{n+1}(k)/k^\times$ faktorisiert (Hier ist $k^\times$ die Untergruppe $k^\times E$, wobei E die Einheitsmatrix ist). Wir behaupten nun, dass

$$PGl_{n+1}(k) \;\xrightarrow{\sim}\; Aut_k(\mathbb{P}_k^n) \tag{8.14.2}$$

ein Isomorphismus ist: Wir benutzen Corollar 8.12 bzw. Bemerkung 8.13. Es gilt $Pic(\mathbb{P}_k^n) \cong \mathbb{Z}$, mit Erzeuger $\mathcal{O}(1)$ (siehe Übungsaufgabe 42) und vermöge der Isomorphien

$$Pic(\mathbb{P}_k^n) \;\cong\; CaCl(\mathbb{P}_k^n) \;\cong\; CH^1(X)$$

entsprechen sich die Klassen von

$$\mathcal{O}(1) \quad \text{bzw.} \quad (D_+(X_i), X_i) \quad \text{bzw.} \quad V_+(X_0) \qquad .$$

Ist $\alpha : \mathbb{P}_k^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_k^n$ ein k-Automorphismus, so muss $(\alpha^*\mathcal{O}(1))$ wieder ein Erzeuger von $Pic(\mathbb{P}_k^n) = \mathbb{Z}$ sein, es muss also $\alpha^*\mathcal{O}(1)$ isomorph zu $\mathcal{O}(1)$ oder $\mathcal{O}(-1)$ sein. Wegen $\Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}\ (-1)) = 0$ muss also $\alpha^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$ sein. Nun ist $\Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(1))$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(X_0, \dots, X_n)$, und $(\alpha^*X_0, \dots, \alpha^*X_n)$ muss wieder eine Basis sein. Daher ist

$$\alpha^* X_i \;=\; \sum a_{ij} X_j$$

mit einer Matrix $A = (a_{ij}) \in Gl_{n+1}(k)$. Dann ist α gerade durch den Automorphismus A wie oben gegeben. Dies zeigt die Surjektivität von (8.14.1). Weiter ist das Tupel $(\mathcal{O}(1), s_0, \dots, s_n)$, mit $(s_0, \dots, s_n)$ k-Basis von $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)$, genau dann isomorph zu $(\mathcal{O}(1), s_0', \dots, s_n')$, wenn es einen Automorphismus $\varphi : \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(1)$ mit $\varphi(s_i) = s_i'$ für alle i gibt. Ein solcher Isomorphismus φ ist aber von der Form $\lambda \in k^\times$ (d.h., Multiplikation mit $\lambda \in k^\times$), siehe (8.13.1).

Wir verallgemeinern nun die Proj-Konstruktion, ähnlich wie man die Spec-Konstruktion verallgemeinern kann (siehe Übungsaufgabe 30).

Sei X ein Schema und $\mathcal{S}$ eine quasi-kohärente graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebra, d.h., eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Algebra mit einer Graduierung

$$\mathcal{S} \;=\; \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n\,,$$

so dass für jedes offene $U \subseteq X$ gilt: $\mathcal{S}_m(U) \cdot \mathcal{S}_n(U) \subseteq \mathcal{S}_{m+n}(U)$.

Satz 8.15 (a) Es gibt ein kanonisches X-Schema $P = Proj(\mathcal{S}) \xrightarrow{\pi} X$ zusammen mit Isomorphismen von U-Schemata

$$\pi^{-1}(U) \;\xrightarrow{\sim}\; Proj(\varphi(U))$$

für jedes affine offene Unterschema $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$, die mit Restriktionen für $U \supseteq V$ affin offen verträglich sind.

(b) Für jeden graduierten φ-Modul $\mathcal{M}$ auf X (offensichtliche Definition), der quasi-kohärent als $\mathcal{O}_X$-Modul ist, gibt es einen kanonischen quasi-kohärenten $\mathcal{O}_P$-Modul $\mathcal{M}^\sim$ zusammen mit Isomorphismen (von $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}$-Moduln)

$$\mathcal{M}^\sim|_{\pi^{-1}(U)} \;\xrightarrow{\sim}\; \Gamma(U, \mathcal{M})^\sim\,,$$

für alle affinen offenen Unterschemata $U \subseteq X$, die verträglich mit den Restriktionen für $U \supseteq V$ affin offen in X sind. Hierbei sei $\Gamma(U, \mathcal{M})^\sim$ für den graduierten $S = \Gamma(U, \varphi)$-Modul $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ wie in 8.4 definiert.

(c) In der Situation von (b) hat man einen kanonischen Homomorphismus von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln

$$\Gamma(X, \mathcal{M}_0) \to \Gamma(Proj(\mathcal{S}), \mathcal{M}^\sim)\,.$$

Beweis(a) Für $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen definiere das U-Schema $Z_U = Proj(\mathcal{S}(U)) \xrightarrow{\pi_U} U$ (wie in Alg. Geo. I Definition 10.13 definiert). Für $f \in A$ sieht man leicht, da $\mathcal{S}$ quasi-kohärent ist, dass $Proj(\mathcal{S}(D(f))) = Proj(\mathcal{S}(U)_f) = \pi_U^{-1}(D(f))$. Hieraus folgt mit den üblichen Schlüssen, dass man für eine weitere affine offene Menge $V \subseteq X$ einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_U^{-1}(U \cap V) \;\cong\; \pi_V^{-1}(U \cap V)$$

hat. Mittels dieser Isomorphismen lassen sich die Z_U für $U \subseteq X$ affin zu einem X-Schema $\pi : Z \to X$ verkleben, welches wir $\mathit{Proj}(\mathcal{S})$ nennen. Es erfüllt offenbar die gewünschten Eigenschaften.

(b) Dies wird mit ähnlichen Schlüssen bewiesen.

(c) Für $U = \operatorname{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen, die graduierte A-Algebra $S = \Gamma(U, \mathcal{S})$ und den graduierten S-Modul $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ haben wir einen kanonischen Homomorphismus von A-Moduln

$$\Gamma(U, \mathcal{M}_0) = M_0 \to \Gamma(\mathit{Proj}(S), M^{\sim}) = \Gamma(\mathit{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S})), \Gamma(U, \mathcal{M})^{\sim}) \tag{8.15.1}$$

wie folgt: Für jedes homogene $f \in S$ haben wir einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} M_0 & \to & \Gamma(D_+(f), M^{\sim}) = M_{(f)} \\ m & \mapsto & \frac{m}{1}\,. \end{array} \tag{8.15.2}$$

Diese Schnitte $\frac{m}{1}$ verkleben sich zu einem Schnitt $\frac{m}{1}$ in $\Gamma(\mathit{Proj}(S), M^{\sim})$ und wir erhalten (8.15.1). Die Homomorphismen (8.15.1), gedeutet als Homomorphismen

$$\Gamma(U, \mathcal{M}_0) \to \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{M}^{\sim}) = \Gamma(\mathit{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S})), \Gamma(U, \mathcal{M})^{\sim}),$$

für alle $U \subseteq X$ affin offen, verkleben sich wiederum zu dem gewünschten Homomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{M}_0) \;\to\; \Gamma(\mathit{Proj}(\mathcal{S}), \mathcal{M}^{\sim})\,.$$

Als erste Anwendung definieren wir projektive Bündel (vergleiche Übungsaufgaben 40 und 43 für den Fall affiner Bündel, auch Vektorbündel genannt).

Definition 8.16 Sei $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang. Für die quasikohärente graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{S} = \mathit{Sym}\,\mathcal{E} = \oplus_{n \geq 0} \mathit{Sym}^n\,\mathcal{E}$ (vergleiche Übungsaufgabe 40) definiere das **projektive Bündel zu** $\mathcal{E}$ als

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \;:=\; \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \;:=\; \mathit{Proj}(\mathit{Sym}\,\mathcal{E})\,.$$

Beispiel 8.17 Für $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^{n+1}$ ist

$$\mathit{Sym}\,\mathcal{E} \;\cong\; \mathcal{O}_X[X_0, \dots, X_n] = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$$

(= Garbe assoziiert zur Prägarbe $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[X_0, \dots, X_n]$) und es folgt

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{O}_X^{n+1}) \;\cong\; \mathbb{P}_X^n\,.$$

Satz 8.18 Für jedes X-Schema $f : T \to X$ gibt es eine kanonische Bijektion

$$\mathit{Hom}_X(T, \mathbb{P}_X(\mathcal{E})) \;\xrightarrow{\sim}\; L(\mathcal{E}, T) := \left\{\varphi : f^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ invertierbarer } \mathcal{O}_T\text{-Modul} \\ \varphi \text{ Epimorphismus} \end{array} \right\} / \text{ Isomorphie}$$

wobei ein Isomorphismus ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dd, "\gamma", "\wr"'] \\ f^*\mathcal{E} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{L}' \end{tikzcd}$$

mit einem Isomorphismus γ ist. Die Bijektion ist funktoriell in T, d.h., $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ stellt den Funktor $T \mapsto L(\mathcal{E}, T)$ auf der Kategorie Sch/X der X-Schemata dar.

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen

Definition 8.19 Sei $\mathcal{S}$ eine graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebra, die als $\mathcal{O}_X$-Modul quasi-kohärent ist. Sei weiter $\mathcal{M}$ ein graduierter $\mathcal{S}$-Modul, der als $\mathcal{O}_X$-Modul quasi-kohärent ist.

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere den getwisteten Modul $\mathcal{M}(n)$ durch die neue Graduierung

$$\mathcal{M}(n)_i \;=\; \mathcal{M}_{n+i}\,.$$

(b) Für $P = Proj(\mathcal{S})$ und $n \in \mathbb{Z}$ definiere die quasi-kohärenten $\mathcal{O}_P$-Moduln $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_P(n) = \mathcal{S}(n)^\sim$. Für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_P$-Modul $\mathcal{F}$ setze $\mathcal{F}(n) := \mathcal{O}_P(n) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{F}$.

Lemma 8.20 Ist $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$, und wird $\mathcal{S}$ als $\mathcal{O}_X$-Algebra von $\mathcal{S}_1$ erzeugt, so sind sie Garben $\mathcal{O}(n)$ invertierbare $\mathcal{O}_P$-Moduln.

Beweis Für jedes offene affine $U \subseteq X$ ist $\pi^{-1}(U) \cong Proj(\mathcal{S}(U))$ und $\mathcal{O}(n)|_{\pi^{-1}(U)} = \mathcal{S}(U)(n)^\sim$ ($\pi : P = Proj(\mathcal{S}) \to X$ der Strukturmorphismus), so dass die Behauptung aus Proposition 8.6 (a) folgt.

Beweis von Satz 8.18: Sei $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ der Strukturmorphismus. Wir haben die invertierbaren Garben $\mathcal{O}(n)$ auf $\mathbb{P}_X(\mathcal{E}) = Proj(Sym\,\mathcal{E})$, da $\mathcal{S} = Sym\,\mathcal{E}$ die Voraussetzungen von 8.20 erfüllt. Indem wir 8.15 (c) auf den graduierten $\mathcal{S}$-Modul $\mathcal{S}(1)$ anwenden, erhalten wir für alle offenen $U \subseteq X$ kanonische Homomorphismen

$$\Gamma(U, \mathcal{E}) = \Gamma(U, \mathcal{S}(1)_0) \to \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{S}(1)^\sim) = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}(1))\,.$$

Diese sind nach Konstruktion mit Restriktionen für $V \subseteq U$ offen verträglich, definieren also einen $\mathcal{O}_X$-Modul-Morphismus

$$\mathcal{E} \;\to\; \pi_*\mathcal{O}(1)\,.$$

Durch Adjunktion erhalten wir hieraus einen $\mathcal{O}_p$-Modul-Morphismus

$$\varphi^{univ} : \pi^*\mathcal{E} \;\to\; \mathcal{O}(1)\,.$$

Dieser ist ein Epimorphismus: Indem wir affine offene Teilmengen $U \subseteq X$ betrachten, für die $\mathcal{E}|_U$ ein freier $\mathcal{O}_U$-Modul ist, und die Einschränkung von φ^{univ} auf $\pi^{-1}(U)$, können wir hierfür ohne Einschränkung annehmen, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin und $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^{n+1}$ ein freier $\mathcal{O}_X$-Modul ist. Dann ist $P = \mathbb{P}_X(\mathcal{O}_X^{n+1}) = \mathbb{P}_A^n$ und wir erhalten den bekannten Epimorphismus

$$\mathcal{O}_X^{n+1} \;\twoheadrightarrow\; \mathcal{O}(1)\,.$$

Ist nun $f : T \to X$ ein X-Schema und

$$\begin{tikzcd} g: T \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

ein X-Morphismus, so liefert dies den Epimorphismus von $\mathcal{O}_T$-Moduln

$$\varphi : f^*\mathcal{E} = g^*\pi^*\mathcal{E} \xrightarrow{g^*(\varphi^{univ})} g^*\mathcal{O}(1) =: \mathcal{L}$$

wobei $\mathcal{L}$ invertierbar ist. Ist umgekehrt

$$\varphi : \; f^*\mathcal{E} \; \twoheadrightarrow \; \mathcal{L}$$

ein Epimorphismus von $\mathcal{O}_T$-Moduln, wobei $\mathcal{L}$ invertierbar ist, so erhält man hieraus einen X-Morphismus

$$g \; : \; T \; \to \; \mathbb{P}_X(\mathcal{E})\,,$$

den man auf zwei äquivalente Arten beschreiben kann:

1) Wählt man eine trivialisierende Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ für $\mathcal{E}$, so erhält man nach Satz 8.11 bzw. Bemerkung 8.18 (b) U_i-Morphismen $g_i : f^{-1}(U_i) \to \pi^{-1}(U_i)$, die sich zum gewünschten g zusammenkleben.

2) φ induziert einen Epimorphismus von graduierten $\mathcal{O}_X$-Algebren

$$Sym f^*\mathcal{E} \; \twoheadrightarrow \; Sym\,\mathcal{L}\,,$$

der wiederum einen X-Morphismus

$$\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) = Proj(Sym\,\mathcal{L}) \to Proj(Sym\,f^*\mathcal{E}) = \mathbb{P}_T(f^*\mathcal{E})$$

induziert (vergleiche Alg. Geo. I, Übungsblatt 14, Aufgabe 4, sowie 8.A.5).

Andererseits gilt:

Lemma 8.21 (a) Ist $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_T$-Modul, so ist $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to T$ ein Isomorphismus.

(b) Man hat einen kanonischen T-Isomorphismus

$$\mathbb{P}_T(f^*\mathcal{E}) \; \cong \; T \times_X \mathbb{P}_X(\mathcal{E})\,.$$

Dies liefert den gewünschten X-Morphismus

$$T \; \cong \; \mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}_T(f^*\mathcal{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathcal{E}),.$$

Die Bijektion in Satz 8.18 ergibt sich nun leicht (Details: Übungsaufgabe).

Beweis von Lemma 8.21 (a): Diese Frage ist lokal auf T; also ist ohne Einschränkung $T = \mathrm{Spec}(A)$ affin und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_T$. Hier ist $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) = \mathbb{P}^0_A = Proj(A[T]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A)$, denn es ist $A[T]_{(T)} \xleftarrow{\sim} A$.

(b) Die Frage ist wieder lokal und folgt also aus dem kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{P}^n_B \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_A \times_{\mathrm{Spec}\,(A)} \mathrm{Spec}(B)$$

für einen Ringhomomorphismus $A \to B$.

Wir kommen nun zu Aufblasungen.

Definition 8.22 Sei X ein Schema, $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema und $J \subseteq \mathcal{O}_X$ die zugehörige quasi-kohärente Idealgarbe (siehe Lemma 6.5). Die **Aufblasung von X im Zentrum** D (oder bezüglich der Idealgarbe J) ist definiert als

$$Bl_D(X) \;:=\; Proj(\bigoplus_{d=0}^{\infty} J^d)\,.$$

Nach Konstruktion ist dies ein X-Schema, d.h., man hat einen kanonischen Morphismus

$$\pi \;:\; Bl_D(X) \;\to\; X\,.$$

Beispiel 8.23 Sei k ein Körper. Betrachte $X = \mathbb{A}^n_k$ und $D = 0$ (den Nullpunkt, mit reduzierter Struktur). Dann ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ für $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und D durch das maximale Ideal $\mathfrak{m} =< x_1, \ldots, x_n >$ gegeben. Wir haben eine Surjektion von graduierten A-Algebren

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & A[X_1, \ldots, X_n] & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d \\ & X_i & \mapsto & x_i \in \mathfrak{m} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \end{array}$$

Man sieht leicht, dass das homogene Ideal $\mathfrak{a} = \ker \psi$ von den Elementen

$$x_i X_j - x_j X_i \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n$$

erzeugt wird. Wir haben also eine abgeschlossenen Immersion (siehe 8.A.5)

$$\nu :\; Bl_0(\mathbb{A}^n_k) = Proj(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n) \;\hookrightarrow\; Proj(A[X_1, \ldots, X_n]) = \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{A}^n_k} = \mathbb{P}^{n-1}_k \times_k \mathbb{A}^n_k\,.$$

In der Karte $D_+(X_i)(i \in \{1, \ldots, n\})$ haben wir den Polynomring

$$A[X_1, \ldots, X_n]_{(X_i)} \;=\; A\left[\frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]\,,$$

und das induzierte Ideal $\mathfrak{a}_{(X_i)}$, welches offenbar von den Elementen

$$x_j - x_i \frac{X_i}{X_j} \qquad , \; j = 1, \ldots, n\,,$$

erzeugt wird. Das Urbild von $D_+(X_i)$ in $Bl_0(\mathbb{A}^n_k) = Proj(\oplus \mathfrak{m}^n)$ ist das affine Schema $D_+(x_i) = \mathrm{Spec}(A_i)$, und wir erhalten die Beschreibung

$$\begin{array}{rcl} A_i & = & k[x_1, \ldots, x_n]\left[\frac{X_j}{X_i}\right] / < x_j - x_i \frac{X_j}{X_i} > \\ & = & k[x'_1, \ldots, x'_n] \qquad \text{(Polynomring)} \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} x'_j &= \text{Bild von } \tfrac{X_j}{X_i} \quad (j \neq i) \\ x'_i &= x_i \,. \end{aligned}$$

Der Ringhomomorphismus

$$A = k[x_1, \dots, x_n] \to k[x'_1, \dots, x'_n] = A_i$$

ist durch die Zuordnung

$$x_j \mapsto \begin{cases} x_i x'_j & , \; j \neq i, \\ x'_i & , \; j = i \end{cases}$$

gegeben. Wir haben also neue Elemente x'_j eingeführt, die die Gleichung $x_j = x_i x'_j$ erfüllen, also sozusagen

$$\text{“} \, x'_j = \frac{x_j}{x_i} \, \text{”} \,.$$

Dies ist die Idee der Aufblasung.

Wir beschreiben nun die universelle Eigenschaft von Aufblasungen.

Definition 8.24 Sei $f : Z \to X$ ein Morphismus von Schemata und $J \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe. Die **Urbild-Idealgarbe** $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$ ist die Idealgarbe in $\mathcal{O}_Z$, die vom Bild des Morphismus

(8.24.1) $$f^{-1}J \hookrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$$

erzeugt wird.

Bemerkung 8.25 (a) Manchmal wird $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$ einfach mit $J \cdot \mathcal{O}_Z$ bezeichnet.

(b) Das Bild von (8.24.1) ist im Allgemeinen kein Ideal.

(c) $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$ ist auch das Bild des kanonischen Morphismus

(8.25.1) $$f^*J \to f^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z \,,$$

aber dieser ist im Allgemeinen kein Monomorphismus.

(d) Sei $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, und sei $J \subseteq \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe zu D. Dann ist

(8.25.2) $$D \times_X Z \hookrightarrow Z$$

eine abgeschlossene Immersion mit Idealgarbe $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$.

Denn: Hierfür können wir annehmen, dass $Z = \mathrm{Spec}(B)$ und $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin sind. Dann ist J durch ein Ideal $I \subseteq A$ gegeben und $f^{-1}J\mathcal{O}_Z$ entspricht dem Ideal IB. Weiter ist

$$D \times_X Z = \mathrm{Spec}(A/I \otimes_A B) \cong \mathrm{Spec}(B/IB)$$

und der Morphismus (8.25.2) entspricht der Surjektion

$$B \twoheadrightarrow B/IB \,.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 8.26 (Universelle Eigenschaft von Aufblasungen) Sei X ein noethersches Schema, $J \subseteq \mathcal{O}_X$ eine quasi-kohärente Idealgarbe und $\pi : X' = Bl_D(X) \to X$ die Aufblasung von X im abgeschlossenen Unterschema $D = V(J)$.

(a) $\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}$ ist ein invertierbares $\mathcal{O}_{X'}$-Ideal (d.h., ein $\mathcal{O}_{X'}$-Ideal, welches invertierbar als $\mathcal{O}_{X'}$-Modul ist). Insbesondere erhalten wir so einen effektiven (Cartier-) Divisor auf X', den man auch den **exzeptionellen Divisor** der Aufblasung nennt.

(b) Ist $f : Z \to X$ ein Morphismus von Schema und ist $f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$ ein invertierbares $\mathcal{O}_Z$-Ideal, so gibt es genau einen Morphismus $g : Z \to Bl_D(X)$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\exists! g"] \arrow[dr, "f"'] & Bl_D(X) \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

kommutativ macht (d.h., π ist universell für X-Schemata Z, auf denen das Urbild von J invertierbar wird).

Beweis Beide Aussagen sind lokal in X; für (b) gilt dies wegen der Eindeutigkeit von g. Es ist also ohne Einschränkung $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, mit einem noetherschen Ring A und daher J durch ein endlich erzeugtes Ideal $I \subseteq A$ gegeben. Dann ist $X' = Proj(S)$, mit

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I^d$$

als graduierte A-Algebra. Seien $a_0, \ldots, a_n \in I$ Erzeugende von I. Dann haben wir einen surjektiven Homomorphismus von graduierten A-Algebren

$$\psi : A[X_0, \ldots, X_n] \to S\,, \tag{8.26.1}$$

indem wir X_i auf $a_i \in I = S_1$ abbilden. Dieser Homomorphismus induziert eine abgschlossene Immersion

$$\nu : X' = Proj(S) \hookrightarrow Proj(A[X_0, \ldots, X_n]) = \mathbb{P}^n_A =: P \tag{8.26.2}$$

von A-Schemata (dies folgt sofort aus der Definition der $Proj$-Konstruktion, siehe 8.A.5). Der Kern von ψ ist das homogene Ideal in $A[X_0, \ldots, X_n]$, welches von allen homogenen Polynomen $F(X_0, \ldots, X_n)$ mit $F(a_0, \ldots, a_n) = 0$ erzeugt wird.

(a): Nach Konstruktion ist $\nu^{-1}(D_+(X_i)) = D_+(a_i)$ und die Einschränkung $D_+(a_i) \to D_+(X_i)$ von ν entspricht dem surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} A[X_0, \ldots, X_n]_{(X_i)} & \twoheadrightarrow & S_{(a_i)} \\ \frac{X_j}{X_i} & \mapsto & \frac{a_j}{a_i}\,. \end{array}$$

Das Ideal $\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}$ eingeschränkt auf $D_+(a_i)$ entspricht dem Ideal $I \cdot S_{(a_i)}$ und wird von $a_0, \ldots, a_n$ erzeugt. Wegen $a_j = \frac{a_j}{a_i} \cdot a_i$ wird es also von dem einen Element a_i erzeugt, und da a_i ein Nicht-Nullteiler in $S_{(a_i)} \subseteq S_{a_i}$ ist, ist

$$\begin{array}{rcl} S_{(a_i)} & \xrightarrow{\sim} & S_{(a_i)}a_i \\ x & \mapsto & xa_i \end{array}$$

ein Isomorphismus, also $\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}|_{D_+(a_i)}$ frei, mit Basis a_i.

(b): *Existenz* von h: Sei $f : Z \to X$ ein Morphismus, für den $\mathcal{L} := f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z$ ein invertierbares Ideal ist. Weil $I = \Gamma(X, J)$ von $a_0, \dots, a_n$ erzeugt wird und X nach Voraussetzung affin ist, wird J von $a_0, \dots, a_n$ erzeugt, und daher $\mathcal{L}$ von den Bildern $s_0, \dots, s_n$ der a_i in $\Gamma(Z, \mathcal{L})$. Die Familie $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ liefert also nach 8.11 einen eindeutig bestimmten X-Morphismus

$$h \;:\; Z \;\to\; \mathbb{P}^n_X = P \tag{8.26.3}$$

mit einem Isomorphismus $\gamma : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} g^*\mathcal{O}(1)$ und $\gamma(s_i) = h^*X_i \quad (i = 0, \dots, n)$.

Behauptung: h faktorisiert in eindeutiger Weise über die abgeschlossene Immersion ν.

Beweis: Hierfür ist zu zeigen, dass die Idealgarbe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_P$ zu ν, d.h., $\mathcal{K} = \ker(\nu^\sharp : \mathcal{O}_P \to \nu_*\mathcal{O}_{X'})$, im Kern von $h^\sharp : \mathcal{O}_P \to g_*\mathcal{O}_Z$ liegt (universelle Eigenschaft von abgeschlossenen Unterschemata, siehe Übungsaufgabe 32). Dazu können wir annehmen, dass $Z = \mathrm{Spec}(B)$ affin ist. Die Mengen $Z(a_i) = D(a_i)$, für $i = 0, \dots, n$, bilden eine offene Überdeckung von Z (siehe den Beweis von Satz 8.11). Es genügt also, für alle i die Einschränkungen von h

$$\mathrm{Spec}(B_{a_i}) = D(a_i) \;\to\; D_+(X_i) = \mathrm{Spec}(A[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)})$$

zu betrachten, und, äquivalent dazu, die A-Algebren-Homomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \beta_i = h^\sharp_{D_+(X_i)} : \; A\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] & \to & B_{a_i} \\ \frac{X_j}{X_i} & \mapsto & \frac{a_j}{a_i}\,. \end{array}$$

Nun folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass hierunter $Ker(\psi)_{(X_i)}$ (für ψ wie in (8.26.1) definiert) auf 0 abgebildet wird. Dies folgt aus der früher gegebenen Beschreibung: Für $F(X_0, \dots, X_n)$ homogen vom Grad d in $Ker(\psi)$ ist $F(a_0, \dots, a_n) = 0$, also wird das Element $F(X_0, \dots, X_n)X_i^{-d}$ unter β_i auf 0 abgebildet.

Wir haben also einen Morphismus $g : Z \to X'$ konstruiert, der

$$\begin{tikzcd} h : Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[r, hook, "\nu"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^n_X =: P \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Eindeutigkeit von h: Für jeden solchen Morphismus haben wir $\mathcal{L} = f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Z = g^{-1}(\pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}) \cdot \mathcal{O}_Z$. Nach (a) ist $\mathcal{L}' := \pi^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{X'}$ invertierbar; tatsächlich ist $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_{X'}(1)$, wie in Definition 8.5 definiert und in Lemma 8.6 als invertierbar erkannt. Damit erhalten wir einen Epimorphismus

$$\alpha \;:\; g^*\mathcal{L}' \;\twoheadrightarrow\; \mathcal{L}$$

von invertierbaren $\mathcal{O}_Z$-Moduln (vergleiche Bemerkung 8.25 (c)). Nach dem folgenden Lemma ist dann α ein Isomorphismus. Wir haben also einen Isomorphismus

$$\alpha \;:\; h^*\mathcal{O}_P(1) = g^*\mathcal{O}_{X'}(1) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{L}\,,$$

unter dem offenbar die globalen Schnitte $X_0, \ldots, X_n$ auf $s_0, \ldots, s_n$ abgebildet werden. Die behauptete Eindeutigkeit von g folgt also aus der Eindeutigkeit von h (Satz 8.11), zusammen mit der eindeutigen Faktorisierung von h als νg (Übungsaufgabe 32).

Lemma 8.27 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ ein Epimorphismus von invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann ist φ ein Isomorphismus.

Beweis Wir haben zu zeigen, dass die Halmabbildungen injektiv sind. Da die Halme $\mathcal{L}_x$ und $\mathcal{M}_x$ freie $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln vom Rang 1 sind, haben wir also ohne Einschränkung einen lokalen Ring R und einen surjektiven R-Modul-Homomorphismus

$$\varphi \ : \ R \twoheadrightarrow R\,.$$

Dann ist $\varphi(1)$ nicht im maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ enthalten, also $a = \varphi(1)$ eine Einheit. Ist nun $r \in R$ mit $0 = \varphi(r) = r\varphi(1) = ra$, so folgt $0 = \varphi(r)a^{-1} = r$.

Corollar 8.28 Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von noetherschen Schemata, sei $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$ und $D' \subseteq Y$ das abgeschlossene Unterschema zur Idealgarbe $J' = f^{-1}J \cdot \mathcal{O}_Y$ (dies entspricht nach Bemerkung 8.25 (d) gerade $D \times_X Y \hookrightarrow Y$).

(a) Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $f' : Bl_{D'}(Y) \to Bl_D(X)$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y' = Bl_{D'}(Y) & \xrightarrow{f'} & Bl_D(X) = X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutativ macht.

(b) Ist f eine abgeschlossene Immersion, so auch f'. Wir nennen dann Y' auch die **strikte Transformierte** von Y in X''.

Beweis (a) folgt sofort aus der universellen Eigenschaft.

(b): Die Behauptung ist lokal in X; wie können also annehmen, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist. Dann ist nach Voraussetzung $Y = \mathrm{Spec}(A')$ für einen Epimorphismus $A \twoheadrightarrow A'$. Weiter entspricht J einem Ideal $I \subseteq A$ und $f^{-1}J\mathcal{O}_Y$ dem Ideal $\overline{I} = IA'$; dabei ist in diesem Fall $I \twoheadrightarrow \overline{I}$ surjektiv. Daher ist

$$\underset{n\geq 0}{\oplus} I^n \ \to \ \underset{n\geq 0}{\oplus} \overline{I}^n$$

surjektiv und

$$Y' = Proj(\oplus \overline{I}^n) \ \hookrightarrow \ Proj(\oplus I^n) = X'$$

eine abgeschlossene Immersion (siehe 8.A.5).

Lemma 8.29 Sei $\pi : Bl_D(X) \to X$ die Aufblasung im abgeschlossenen Unterschema $D \subseteq X$. Für die offene Menge $U = X - D$ ist dann

$$\pi^{-1}(U) \ \underset{\sim}{\xrightarrow{\pi}} \ U$$

ein Isomorphismus (d.h., π ist ein "Isomorphismus außerhalb von D").

Beweis Es ist $J|_U = \mathcal{O}_U$, und die *Proj*-Konstruktion ist mit Restriktionen auf offene Unterschemata verträglich. Daher gilt

$$\pi^{-1}(U) = Proj((\bigoplus_{d\geq 0} J^n)|_U) = Proj(\bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{O}_U) \ \xrightarrow{\sim} \quad U$$

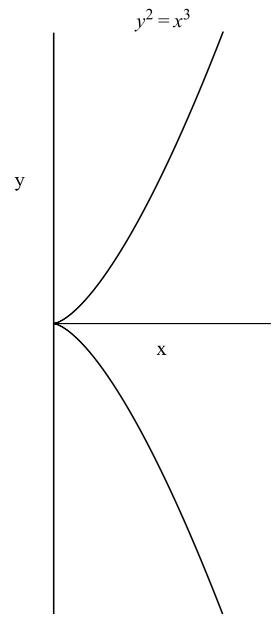
nach 8.21 (a).

Die Behauptung folgt auch unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der Aufblasung; allgemeiner folgt hieraus, aber auch aus 8.21(a):

Lemma 8.30 Ist $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit invertierbarer Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$, so ist $\pi : Bl_D(X) \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus.

Aufblasungen können (hoffentlich immer) zur Auflösung von Singularitäten genommen werden.

Beispiel 8.31 Betrachte die Knotenkurve/Neilsche Parabel $C : y^2 = x^3$



über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, also

$$C = \mathrm{Spec}(k[x,y]/ < y^2 - x^3 >) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}_k^2 .$$

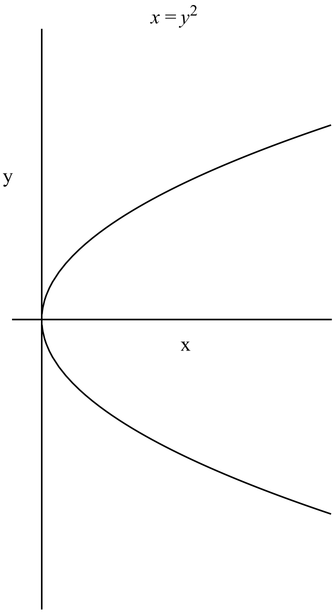
Der Gradient von $f(x,y) = y^2 - x^3$ ist

$$grad(f) = (-3x^2, 2y) .$$

Der einzige abgeschlossene Punkt von C, der nicht regulär ist, ist der Ursprung $0 = (0,0)$ (siehe Übungsaufgabe 39; dies gilt auch für $char(k) = 2, 3.$). Wir blasen $\mathbb{A}_k^2$ und C in 0 auf und erhalten in der Karte $D_+(X)$ (Man spricht auch von der X-Karte, oder der Karte $X \neq 0$)

$$A_1 = k[x,y'] \ \twoheadrightarrow \ k[x,y']/ < (y')^2 - x > ,$$

also die reguläre Parabel $C' = \mathrm{Spec}(k[x,y']/ < (y')^2 - x >)$



In Gleichungen, mit der neuen Variable y' mit $y = y'x$ drückt sich dies so aus

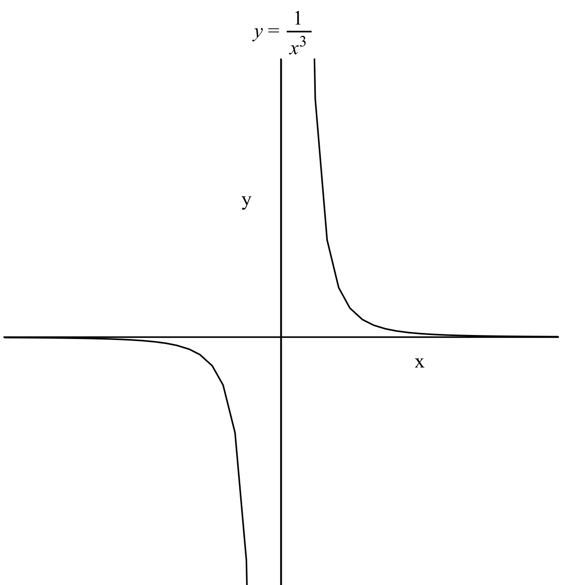
$$\begin{array}{rrcll} & y^2 & = & x^3 & \\ & (y'x)^2 & = & x^3 & \quad / : x^2 \\ C' : & y'^2 & = & x\,. & \end{array}$$

Der exzeptionelle Divisor ist durch die Gleichung $x = 0$ gegeben, also gleich die y'-Achse. Er ist tangential zu C' in 0.

In der Y-Karte $D_+(Y)$ erhalten wir x' mit $x = y \cdot x'$ und die Gleichung

$$\begin{array}{rrcll} & y^2 & = & (yx')^3 & \quad / : y^2 \\ C' : & 1 & = & y \cdot x'^3\,. & \end{array}$$

die ebenfalls regulär ist.



Der exzeptionelle Divisor ist hier durch $y = 0$ gegeben, also die x'-Achse – er schneidet die strikte Transformierte C' in dieser Karte nicht.

Global beschrieben ist

$$C' = Proj(k[x,y][X,Y]/ < Y^2 - xX^2 >)\,.$$

8.A Projektive Schemata und homogene Ideale

Wir zeigen in diesem Anhang, dass alle abgeschlossenen Unterschemata von $\mathbb{P}^n_A$, für einen Ring A, durch homogene Ideale gegeben sind.

Sei $S = \bigoplus_{i\geq 0} S_i$ ein graduierter Ring, der als S_0-Algebra von S_1 erzeugt wird, und sei $X = Proj(S)$. Dann sind die Garben $\mathcal{O}_X(n) = S(n)^\sim$ invertierbare $\mathcal{O}_X$-Moduln für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 8.A.1 Für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ definiere $\Gamma_n(X, \mathcal{F}) := \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ und

$$\Gamma_*(X, \mathcal{F}) \;=\; \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

(Erinnerung: Es ist $\mathcal{F}(n) = \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$).

Lemma 8.A.2 (a) $\Gamma_*(X, \mathcal{F})$ ist in kanonischer Weise ein graduierter S-Modul.

(b) Ist M ein graduierter S-Modul, so gibt es einen kanonischen Homomorphismus von graduierten S-Moduln

$$\phi_M \;:\; M \;\to\; \Gamma_*(X, \tilde{M})\,. \tag{8.A.2.1}$$

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ haben wir einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$M_n \;\to\; \Gamma(X, \tilde{M}(n)) \tag{8.A.2.2}$$

wie folgt. Indem wir $\tilde{M}(n)$ mit $(M(n))^\sim$ identifizieren und beachten, dass $M_n = M(n)_0$ ist, genügt es, den Fall $n = 0$ zu betrachten, also einen Homomorphismus

$$M_0 \;\to\; \Gamma(X, \tilde{M}) \tag{8.A.2.3}$$

zu konstruieren. Diesen definieren wir, indem wir $m \in M_0$ auf die Abbildung

$$\mathfrak{p} \;\mapsto\; \frac{m}{1} \in M_{(\mathfrak{p})}$$

abbilden. Durch die direkte Summe der Homomorphismen (8.A.2.2) erhalten wir (8.A.2.1).

Weiter erhalten wir aus der Isomorphie $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n)$ (siehe 8.4 (b)) eine Isomorphie

$$\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}(n) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{F}(m+n)$$

und damit bilineare Abbildungen

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \times \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{F}(m+n))\,. \tag{8.A.2.4}$$

Hierdurch wird $\Gamma_+(X, \mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X(n))$ zu einem graduierten Ring (Fall $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$) und $\Gamma_*(X, \mathcal{F})$ zu einem $\Gamma_+(X, \mathcal{O}_X)$-Modul. Weiter sieht man leicht, dass die durch (8.A.2.1) gegebene Abbildung

$$S \;\to\; \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) \tag{8.A.2.5}$$

ein Morphismus von graduierten Ringen ist. Hierdurch wird $\Gamma_*(X, \mathcal{F})$ auch zu einem graduierten S-Modul und (a) ist bewiesen.

Für (b) betrachten wir $\mathcal{F} = \tilde{M}$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) & \times & \Gamma_*(X, \tilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma_*(X, \tilde{M}) \\
\uparrow{\scriptstyle \phi_S} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_M} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_M} \\
S & \times & M & \longrightarrow & M
\end{array}$$

in dem die obere Zeile durch (8.A.2.4) und die untere durch die S-Modul-Struktur von M gegeben ist. Dies zeigt, dass ϕ_M ein S-Modul-Homomorphismus ist.

Proposition 8.A.3 Sei S als S_0-Algebra von S_1 erzeugt. Dann gilt:

(a) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gibt es einen kanonischen Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\Psi_{\mathcal{F}} \ : \ \Gamma_*(X,\mathcal{F})^{\sim} \ \to \ \mathcal{F}\,.$$

(b) Dieser ist ein Isomorphismus, wenn $\mathcal{F}$ quasi-kohärent ist und S als S_0-Algebra von endlich vielen Elementen in S_1 erzeugt wird.

Beweis (a): Zunächst definieren wir für jedes $f \in S_1$ einen Homomorphismus von $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = S_{(f)}$-Moduln

$$(8.A.3.1) \qquad \psi_f \ : \ (\Gamma_*(X,\mathcal{F})^{\sim})(D_+(f)) \overset{(8.4.2)}{=} \Gamma_*(X,\mathcal{F})_{(f)} \ \to \ \mathcal{F}(D_+(f))$$

wie folgt. Jedes Element der linken Seite lässt sich schreiben als $\frac{m}{f^d}$ mit $d \geq 0$ und $m \in \Gamma(X,\mathcal{F}(d))$. Wir können f^{-d} nach (8.A.2.2) als einen Schnitt in $\mathcal{O}_X(-d)(D_+(f))$ auffassen, und erhalten aus dem Tensorprodukt $m \otimes f^{-d}$ einen Schnitt in $\mathcal{F}(D_+(f))$. Dies definieren wir als $\psi_f(\frac{m}{f^d})$, wobei man leicht sieht, dass dies nicht von den Wahlen abhängt.

Da $D_+(f)$ affin ist, erhalten wir nach Satz 4.6 aus ψ_f einen Morphismus

$$(8.A.3.2) \qquad \Psi_f \ : \ \Gamma_*(X,\mathcal{F})^{\sim}|_{D_+(f)} \ \to \ \mathcal{F}|_{D_+(f)}$$

von $\mathcal{O}_X|_{D_+(f)}$-Moduln. Wird nun S als S_0-Algebra von S_1 erzeugt, so wird X von den obigen Mengen $D_+(f)$ überdeckt, und für je zwei Elemente $f, f' \in S_1$ stimmen die Morphismen ψ_f und $\psi_{f'}$ auf dem Durchschnitt $D_+(f) \cap D_+(f')$ überein (was man leicht in den Halmabbildungen nachprüft): die ψ_f verkleben sich also zu einem Morphismus Ψ wie in (a) behauptet.

(b): Sei $\mathcal{F}$ quasi-kohärent und S über S_0 von $f_1, \ldots, f_n \in S_1$ erzeugt. . Es genügt zu zeigen, dass dann alle ψ_{f_i} Isomorphismen sind. Da auch $\Gamma_*(X,\mathcal{F})^{\sim}$ nach 8.2 quasi-kohärent ist, und da $D_+(f_i)$ affin ist, genügt es zu zeigen, dass alle Morphismen

$$\psi_{f_i} \ : \ \Gamma_*(X,\mathcal{F})_{(f_i)} \ \to \ \mathcal{F}(D_+(f_i))$$

Isomorphismen sind. Schreibe $f = f_i$.

Injektivität: Sei $d \geq 0$ und $m \in \Gamma(X,\mathcal{F}(d))$ mit $\psi_f(\frac{m}{f^d}) = 0$. Nach dem Beweis von 8.4 (a) ist $\mathcal{O}_X(-d)|_{D_+(f)}$ frei mit Basis f^{-d} und daher

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(-d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}(d)|_{D_+(f)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}|_{D_+(f)} \\ f^{-d} \otimes m & \mapsto & \psi_f(\frac{m}{f^d}) \end{array}$$

ein Isomorphismus, woraus die Behauptung folgt.

Die *Surjektivität* folgt aus dem folgenden

Lemma 8.A.4 Sei X ein Schema, $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Sei $f \in \Gamma(X,\mathcal{L})$ und

$$X(f) \ := \ \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}\,.$$

(a) $X(f)$ ist offen in X und $\mathcal{L}|_{X(f)}$ ist freier $\mathcal{O}_{X(f)}$-Modul mit Basis $f|_{X(f)}$.

(b) Ist X quasi-kompakt und $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ mit $s|_{X(f)} = 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n s = 0$, wobei $f^n s$ als Schnitt in $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ aufgefasst wird (Beachte $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{X(f)} \cong \mathcal{F}|_{X(f)}$).

(c) X besitze eine endliche affine offene Überdeckung (U_i), so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei ist für jedes i und $U_i \cap U_j$ quasi kompakt für alle i, j. Ist $t \in \Gamma(X(f),\mathcal{F})$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n t \in \Gamma(X(f),\mathcal{F})$ Restriktion eines globalen Schnitts $s \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n})$ ist. Beachte: Nach (a) haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}|_{X(f)} & \cong & \mathcal{F}|_{X(f)} \\ g \otimes f^{\otimes n} & \leftarrow\!\shortmid & g\,. \end{array}$$

Beweis (vergleiche Übungsaufgabe 24 für $\mathcal{L} = \mathcal{F} = \mathcal{O}_X$)

(a): Ist (U_i) eine offene Überdeckung, so dass $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$, und entspricht hierbei $f|_{U_i}$ dem Schnitt $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, so ist $X(f) \cap U_i = U_i(g_i)$, und letztere Menge ist offen.

(b): Sei wieder $(U_i)_{i\in I}$ eine trivialsierende Überdeckung für $\mathcal{L}$, wobei ohne Einschränkung alle U_i affin sind und I endlich ist (da X quasi-kompakt ist). Dann ist $s|_{U_i(g_i)} = 0$ für alle i, und nach Lemma 4.9 (a) und der Endlichkeit von I gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g_i^n s_{U_i} = 0$ für alle i. Für $f^n s$ gilt dann offenbar $f^n s|_{U_i} = 0$ für alle i, also $f^n s = 0$.

(c): Sei (U_i) wie eben. Nach Lemma 4.9 (b) und der Endlichkeit von I gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Schnitte $b_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit $g_i^n t|_{U_i(g_i)} = b_i|_{U_i(g_i)}$ für alle i. Dann gilt

$$b_i|_{U_i(g_i)\cap U_j(g_j)} \;=\; b_j|_{U_i(g_i)\cap U_j(g_j)}$$

für alle i, j. Da alle $U_i \cap U_j$ quasi-kompakt sind und I endlich ist, gibt es nach (b) ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f^N|_{U_i} \cdot b_i|_{u_i \cap U_j} \;=\; f^N|_{U_j} \cdot b_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle i, j, wobei wir $f^N|_{U_i} \cdot b_i$ als Schnitt von $\mathcal{L}^{\otimes N} \otimes \mathcal{F}$ über U_i auffassen. Nach der Garbenbedingung gibt es also ein $t \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes N} \otimes \mathcal{F})$ mit $t|_{U_i} = f^N|_{U_i} \cdot b_i$ für alle i. Es folgt

$$t|_{U_i \cap X(f)} = f^N|_{U_i \cap X(f)} \cdot b|_{U_i \cap X(f)}$$

für alle i und damit $t|_{X(f)} = f^N|_{X(f)} \cdot b$.

Lemma 8.A.5 Sei $I \subseteq S$ ein homogenes Ideal. Die Surjektion

$$\varphi \;:\; S \;\twoheadrightarrow\; S/I = S'$$

von graduierten Ringen induziert einen Schema-Morphismus

$$i \;:\; Y \;=\; Proj(S/I) \;\hookrightarrow\; Proj(S) = X$$

der eine abgeschlossene Immersion ist. Die zugehörige Idealgarbe ist

$$J \;=\; I^{\sim} \;\subseteq\; S^{\sim} \;=\; \mathcal{O}_X$$

und der unterliegende topologische Raum ist via i homöomorph zu

$$V_+(I) \;=\; \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}\,.$$

Beweis: 1) Es folgt wie im affinen Fall (Alg. Geo. I, Satz 5.12), dass φ eine stetige Abbildung

$$\begin{array}{rccc} i & : & Proj(S/I) & \rightarrow & Proj(S) \\ & & \mathfrak{p} & \mapsto & \psi^{-1}(\mathfrak{p}') \end{array}$$

liefert, die einen Homöomorphismus zwischen $Proj(S/I)$ und der abgeschlossenen Teilmenge $V_+(I) \subseteq Proj(S)$ induziert.

2) Ist $\mathfrak{p}' \in Proj(S/I)$ und $\mathfrak{p} = i(\mathfrak{p}')$, so ist $\mathfrak{p}' = \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S'$, und wir erhalten einen surjektiven Homomorphismus von lokalen Ringen

$$\psi_{\mathfrak{p}} \;:\; S_{\mathfrak{p}} \;\twoheadrightarrow\; S'_{\mathfrak{p}'}\,. \tag{8.A.5.1}$$

Ist $f \in S$ homogen und $f' \in S'$ das Bild, so hat man andererseits einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\psi_f \;:\; S_{(f)} \;\twoheadrightarrow\; S'_{(f')}\,. \tag{8.A.5.2}$$

Nach Konstruktion von $Proj(S)$ und $Proj(S')$ erhält man aus (8.A.5.1) und (8.A.5.2) nun leicht, dass die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Proj(S)}(U) & \rightarrow & \mathcal{O}_{Proj(S')}(i^{-1}(U)) \\ s & \mapsto & (\mathfrak{p}' \mapsto \psi_{i(\mathfrak{p}')}(s(i(\mathfrak{p}')))) \end{array}$$

für $U \subseteq Proj(S)$ offen einen Morphismus

$$i^\sharp \;:\; \mathcal{O}_{Proj(S)} \;\to\; i_*\mathcal{O}_{Proj(S')}$$

von Ringgarben definieren, der für die Schnitte auf $U = D_+(f)$ (mit $f \in S$ homogen) mit (8.A.5.2) identifiziert werden kann und für $\mathfrak{p}' \in Proj(S')$ die Halmabbildung (8.A.5.1) liefert. Zusammen mit 1) ergibt sich, dass $(i, i^\sharp)$ eine abgeschlossene Immersion ist. Die zugehörige Idealgarbe ist $I^\sim$, da für $f \in S$ homogen der Kern von (8.A.5.1) gleich $I_{(f)}$ ist.

Wir erhalten aus 8.A.3:

Satz 8.A.6 Sei A ein Ring und $X = \mathbb{P}^n_A = Proj(A[X_0, \ldots, X_n])$. Jede quasi-kohärente Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$ ist von der Form $\mathfrak{a}^\sim$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[X_0, \ldots, X_n]$.

Beweis Sei $\mathfrak{a} = \Gamma_*(X, J) \subseteq \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) = A[X_0, \ldots, X_n]$, wobei sich die letzte Gleichheit aus Lemma 8.7 ergibt. Nach Proposition 8.A.3 ist dann $\mathfrak{a}^\sim = J \subseteq \mathcal{O}_X = A[X_0, \ldots, X_n]^\sim$.

Zusammen mit Lemma 8.A.5 folgt sofort:

Corollar 8.A.7 Ist $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$ eine abgeschlossene Immersion, so identifiziert sich Y als A-Schema mit einem Schema $Proj(A[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[X_0, \ldots, X_n]$.

Dies zeigt, dass die Definitionen von projektiven A-Schemata in 6.11 und in Alg. Geo. I 10.19 äquivalent sind.