

Étale Kohomologie

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Sommersemester 2010

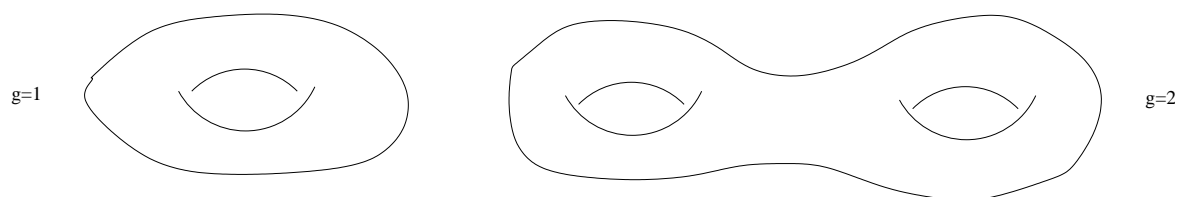
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grothendieck-Topologien/Siten	2
3	Konstruktionen für Prägarben und Garben	4
4	Die abelschen Kategorien der Garben und Prägarben	14
5	Kohomologie auf Siten	17
6	Spektralsequenzen	20
7	Der étale Situs	29
8	Der étale Situs eines Körpers; Überlagerungen	34
9	Henselsche Ringe	39
10	Beispiele von étalen Garben	48
11	Čech-Kohomologie	56
12	Vergleich von Siten	64

1 Einleitung

In der Mathematik sucht man oft Invarianten, mit denen man die betrachteten Objekte charakterisieren oder klassifizieren kann. Häufig werden solche Invarianten durch Kohomologiegruppen gewonnen.

Am ältesten ist diese Vorgehensweise in der Topologie, wo man zum Beispiel die singulären Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbb{Q})$ eines topologischen Raums X betrachtet, die durch explizite 'Zykel' und 'Ränder' definiert werden. Sie genügen zum Beispiel, um das sogenannte Geschlecht g einer (kompakten) Riemannschen Fläche X zu charakterisieren: Sieht X topologisch wie eine Kugel mit g Henkeln aus:



so ist $\dim_{\mathbb{Q}} H^1(X, \mathbb{Q}) = 2g$. Diese Kohomologiegruppen kann man auch als Garbenkohomologie (der konstanten Garbe) beschreiben.

Riemannsche Flächen können auch als komplexe algebraische Kurven aufgefasst werden, also als algebraische Kurven über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Für beliebige algebraische Varietäten X über einem beliebigen Körper k (oder beliebige Schemata) kann man ebenfalls eine Garbenkohomologie betrachten, bezüglich der Zariski-Topologie, und diese ist nützlich für kohärente Garben, zum Beispiel bei der Grothendieck-Serre-Dualität und dem Satz von Riemann-Roch.

Die Zariski-Kohomologie einer algebraischen Varietät X über \mathbb{C} liefert aber nicht die singuläre Kohomologie des topologischen Raums $X(\mathbb{C})$; dies liegt daran, dass die letztere Topologie viel feiner als die Zariski-Topologie ist. Weiter möchte man auch eine analoge Topologie für Varietäten über beliebigen Körpern k haben. Für Körper positiver Charakteristik zeigte Serre aber, dass es keine Kohomologietheorie $H^*(-, \mathbb{Q})$ gibt, so dass $H^1(X, \mathbb{Q})$ die Dimension $2g$ für eine glatte projektive Kurve von Geschlecht g hat. Eine solche Theorie war aber von Weil gefordert worden, um die Weil-Vermutungen für Varietäten über endlichen Körpern zu zeigen, mittels einer Fixpunktformel wie man sie aus der Topologie kennt.

Die Lösung hierfür fand Grothendieck, indem er, zusammen mit M. Artin, die étale Kohomologie entwickelte. Diese liefert für jedes $\ell \neq \text{char}(k)$ Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbb{Q}_{\ell})$, die die von Weil geforderten Eigenschaften besitzen, und mit denen Deligne dann auch schließlich die Weilvermutungen beweisen konnte.

2 Grothendieck-Topologien/Siten

Grothendiecks Ansatz für die étale Kohomologie (und seitdem für viele andere Theorien) war, sich von topologischen Räumen zu lösen. Er bemerkte, dass man nur den Begriff ‘Überdeckungen’ mit gewissen Eigenschaften benötigt, um Garben und ihre Kohomologien zu definieren, wobei man ‘offene Menge’ durch ‘Objekt in einer Kategorie’ ersetzt.

Definition 2.1 Sei \mathcal{X} eine Kategorie und \mathcal{C} eine weitere Kategorie. Eine **Prägarbe auf \mathcal{X} mit Werten in \mathcal{C}** ist ein *kontravarianter* Funktor

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Morphismen von Prägarben sind Morphismen von Funktoren.

(Wir ignorieren dabei –tatsächlich nicht-triviale – mengentheoretische Probleme, indem wir annehmen, dass die Kategorie \mathcal{X} klein ist). Ist \mathcal{C} die Kategorie \underline{Ab} der abelschen Gruppen (bzw. \underline{Rg} der Ringe, bzw. ...), so spricht man von Prägarben von abelschen Gruppen [kurz: abelsche Prägarben] (bzw. von Ringen, bzw. ...).

Beispiel 2.2 Sei X ein topologischer Raum. Diesem kann man die folgende Kategorie \underline{X} zuordnen:

Objekte sind die offenen Mengen $U \subseteq X$. Morphismen sind die Inklusionen $V \subseteq U$. Dann sieht man, dass eine Prägarbe auf \underline{X} in Grothendiecks Sinn genau eine klassische Prägarbe ist: Für jede Inklusion $V \subseteq U$ hat man wegen der kontravarianten Funktorialität einen Pfeil $P(U) \rightarrow P(V)$, und die Funktoreigenschaften liefern gerade die Prägarben-Eigenschaften für diese ‘Restriktionen’ $res_{U,V}$.

Definition 2.3 Sei \mathcal{X} eine Kategorie.

(a): Eine **Grothendieck-Topologie** auf \mathcal{X} besteht aus einer Menge \mathcal{T} von Familien $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ von Morphismen in \mathcal{X} , genannt **Überdeckungen** von \mathcal{T} , so dass gilt:

(T1) Ist $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in \mathcal{T} und $V \rightarrow U$ ein Morphismus in \mathcal{X} , so existieren alle Faserprodukte $U_i \times_U V$, und $(U_i \times_U V \rightarrow V)_{i \in I}$ ist in \mathcal{T} .

(T2) Ist $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in \mathcal{T} und $(V_{ij} \rightarrow U_i)_{j \in J_i}$ in \mathcal{T} für alle $i \in I$, so ist die durch Komposition der Morphismen entstehende Familie

$$(V_{ij} \rightarrow U)_{i,j}$$

in \mathcal{T} .

(T3) Ist $\varphi : U' \rightarrow U$ ein Isomorphismus, so ist $(U' \xrightarrow{\varphi} U)$ in \mathcal{T} .

(b) Ein **Situs** ist ein Paar $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ mit einer Kategorie \mathcal{X} und einer Grothendieck-Topologie \mathcal{T} auf \mathcal{X} . Man bezeichnet die unterliegende Kategorie \mathcal{X} auch mit $Cat(\mathcal{S})$ und die Topologie auch mit $Cov(\mathcal{S})$, also $\mathcal{S} = (Cat(\mathcal{S}), Cov(\mathcal{S}))$. Manchmal wird auch $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ eine Grothendieck-Topologie genannt.

Beispiel 2.4 Nimmt man im Beispiel 2.2 die üblichen Überdeckungen $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U \subseteq X$, so bilden die zugehörigen Familien $(U_i \hookrightarrow U)_{i \in I}$ eine Grothendieck-Topologie auf \underline{X} . Beachte: Das Faserprodukt von offenen Mengen $U \subseteq X, V \subseteq X$ ist der Durchschnitt $U \cap V$.

Definition 2.5 Sei $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Situs, und sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Produkten (also z.B. die Kategorie der Mengen oder der abelschen Gruppen). Eine Prägarbe

$$F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$$

heißt Garbe (bezüglich \mathcal{T}), wenn für jede Überdeckung $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in \mathcal{T} das Diagramm

$$F(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i F(U_i) \xrightarrow[\alpha_2]{\alpha_1} \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist, wobei rechts der Pfeil α_1 von den ersten Projektionen $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$ und der Pfeil α_2 von den zweiten Projektionen $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$ induziert wird (Dies bedeutet, dass α der Differenzkern von α_1 und α_2 ist, siehe Alg. Geo. II, 1.A.18). Morphismen von Garben sind Morphismen der unterliegenden Prägarben.

Bemerkung 2.6 Sei \mathcal{C} die Kategorie der Mengen. Bezeichnen wir für $s \in F(U)$ die Komponente von $\alpha(s)$ in $F(U_i)$ mit $s|_{U_i}$ und für $(s_i) \in \prod_i F(U_i)$ die Bilder von s_i und s_j in $F(U_i \times_U U_j)$ mit $s_i|_{U_i \times_U U_j}$ bzw. $s_j|_{U_i \times_U U_j}$ so erhalten wir wörtlich dieselben Bedingungen wie bei üblichen Garben auf topologischen Räumen, außer dass wir $U_i \cap U_j$ durch $U_i \times_U U_j$ ersetzen: Die Bedingungen sind:

- (i) Sind $s, t \in \mathcal{F}(U)$ und ist $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ für alle i , so ist $s = t$.
- (ii) Ist $(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \times_U U_j} = s_j|_{U_i \times_U U_j}$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für alle $i \in I$.

Definition 2.7 (a) Ein Morphismus $f : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ von Siten ist ein (kovarianter) Funktor $f^0 : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ (!), welcher die folgenden Eigenschaften hat:

- (S1) Ist $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)$ in \mathcal{T} , so ist $(f^0(U_i) \xrightarrow{f^0(\varphi_i)} f^0(U))$ in \mathcal{T}' .
- (S2) Ist $(U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T} und $V \rightarrow U$ ein Morphismus in \mathcal{T} , so der kanonische Morphismus

$$f^0(U_i \times_U V) \rightarrow f^0(U_i) \times_{f^0(U)} f^0(V)$$

ein Isomorphismus für alle i .

Beispiel 2.8 Ist $f : X' \rightarrow X$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, so erhalten wir einen Morphismus $f : \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X)$ der zugehörigen Siten (Beispiel 2.4) durch

$$f^{-1} : \frac{X}{U} \rightarrow \frac{X'}{f^{-1}(U)}.$$

3 Konstruktionen für Prägarben und Garben

Für eine Kategorie \mathcal{X} sei $Pr(\mathcal{X})$ die Kategorie der abelschen Prägarben auf \mathcal{X} .

Definition 3.1 (Push-forward) Sei $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Siten und sei $P' : \mathcal{X}' \rightarrow \underline{Ab}$ eine abelsche Prägarbe. Dann ist das direkte Bild/Push-forward $f_P P'$ von P' definiert als die Prägarbe

$$f_P P' = P' f^0 : \mathcal{X} \xrightarrow{f^0} \mathcal{X}' \xrightarrow{P'} \underline{Ab}.$$

Explizit ist also $(f_P P')(U) = P'(f^0(U))$ für U in \mathcal{X} und $f_P(\varphi) = P'(f^0(\varphi)) : P'(f^0(U_1)) \rightarrow P'(f^0(U_2))$ für $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ in \mathcal{X} . Für einen Morphismus $\psi : P'_1 \rightarrow P'_2$ von abelschen Prägarben auf \mathcal{X} erhält man einen Morphismus

$$(3.1.1) \quad f_P \psi : f_P P'_1 \rightarrow f_P P'_2$$

wie folgt: Für U in \mathcal{X} definiere

$$\begin{array}{ccc} (f_P \psi)_U & : & (f_P P'_1)(U) \rightarrow (f_P P'_2)(U) \\ \parallel & & \parallel \\ \psi_{f_P(U)} & : & P'_1(f^0(U)) \rightarrow P'_2(f^0(U)) \end{array}$$

Man sieht leicht, dass dies einen Morphismus von Prägarben (3.1.1) gibt und dass man so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} f_P : Pr(\mathcal{X}') & \rightarrow & Pr(\mathcal{X}) \\ & P' \mapsto & f_P P' \\ & \psi \mapsto & f_P \psi \end{array}$$

erhält.

Proposition 3.2 Der Funktor

$$f_P : Pr(\mathcal{X}') \rightarrow Pr(\mathcal{X})$$

besitzt ein Linksadjungiertes

$$f^P : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Pr(\mathcal{X}').$$

Für eine Prägarbe Pr auf \mathcal{X} heißt $f^P P$ das Urbild/Pull-back von P .

Für Prägarben $P \in Pr(\mathcal{X})$ und $P' \in Pr(\mathcal{X}')$ gilt also

$$Hom_{\mathcal{X}'}(f^P P, P') \cong Hom_{\mathcal{X}}(P, f_P P'),$$

funktoriell in P und P' .

Beweis von 3.2: Für U' in \mathcal{X}' betrachte die folgende Kategorie $I_{U'}$: Objekte sind Paare (U, ψ) , wobei U ein Objekt in \mathcal{X} und

$$\psi : U' \rightarrow f^0(U)$$

ein Morphismus in \mathcal{X}' ist. Ein Morphismus $(U_1, \psi_1) \rightarrow (U_2, \psi_2)$ ist ein Morphismus $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ in \mathcal{X} , für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & f^0(U_1) & \\ \psi_1 \nearrow & \downarrow f^0(\varphi) & \\ U' & & \\ \psi_2 \searrow & & \\ & f^0(U_2) & \end{array}$$

kommutativ ist. Dann haben wir einen Funktor

$$\begin{aligned} P : \quad I_{U'}^0 &\rightarrow \underline{Ab} \\ (U, \psi) &\mapsto P(U) \\ \varphi &\mapsto P(\varphi) \end{aligned}$$

(wobei $I_{U'}^0$ die zu $I_{U'}$ duale Kategorie bezeichnet) und definieren

$$(f^P P)(U') = \lim_{\substack{\rightarrow \\ (U, \psi) \in I_{U'}^0}} P(U)$$

als den induktiven Limes (Die Idee ist, dass $(f^P P)(U')$ der induktive Limes aller Schnittmengen $P(U)$ ist, für die “ U' in $f^0(U)$ enthalten ist”, siehe unten, Beispiel 3.4).

Ist $\varphi' : U' \rightarrow V'$ ein Morphismus in \mathcal{X}' , so erhalten wir einen Funktor

$$I_{V'} \rightarrow I_{U'} ,$$

indem wir einem Objekt $(V, V' \rightarrow f(V))$ in $I_{V'}$ das Objekt $(V, U' \xrightarrow{\varphi'} V' \rightarrow f(V))$ zuordnen, und einem Morphismus $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ denselben Morphismus.

Dies liefert einen Morphismus

$$(f^P P)(V') = \lim_{\substack{\rightarrow \\ I_{V'}^0}} P(U) \rightarrow \lim_{\substack{\rightarrow \\ I_{U'}^0}} P(U) = (f^P P)(U') .$$

Hierdurch wird $f^P P$ zu einem kontravarianten Funktor

$$f^P P : \mathcal{X}' \rightarrow \underline{Ab} ,$$

also einer abelschen Prägarbe auf \mathcal{X}' .

Wir zeigen nun die Adjunktion. Sei P' eine abelsche Prägarbe auf \mathcal{X}' und

$$(3.2.1) \quad v : f^P P \rightarrow P'$$

ein Morphismus von abelschen Prägarben. Für jedes U in \mathcal{X} hat man dann den Homomorphismus

$$v_{f^0(U)} : (f^P P)(f^0(U)) \rightarrow P'(f^0(U)) = (f_P P')(U) .$$

Weiter ist das Paar $(U, id_{f^0(U)})$ ein Objekt von $I_{f^0(U)}$, und wir erhalten den kanonischen Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow \lim_{\substack{\rightarrow \\ (V, \psi) \in I_{f^0(U)}}} P(V) = (f^P P)(f^0(U)) ,$$

durch Komposition also einen Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow (f_P P')(U) ,$$

der offenbar funktoriell in U ist, also einen Morphismus von abelschen Prägarben auf \mathcal{X}

$$(3.2.2) \quad w : P \rightarrow f_P P' .$$

Sei umgekehrt ein Morphismus w wie in (3.2.2) gegeben, und sei $U' \in ob(\mathcal{X}')$. Dann hat man für jedes Objekt $(U, \psi : U' \rightarrow f^0(U))$ in $I_{U'}$ den Homomorphismus

$$P(U) \xrightarrow{w_U} (f_P P')(U) = P'(f^0(U)) \xrightarrow{P'(\psi)} P'(U') .$$

Dieser ist funktoriell in (U, ψ) und liefert daher einen Homomorphismus (universelle Eigenschaft des induktiven Limes)

$$(f^P P)(U') = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (U, \psi) \in I_{U'}^0}} P(U) \rightarrow P'(U'),$$

der seinerseits funktoriell in U' ist und somit einen Morphismus

$$v : f^P P \rightarrow P'$$

von abelschen Prägarben auf \mathcal{X}' ergibt.

Schließlich zeigt man leicht, dass die Zuordnungen $v \mapsto w$ und $w \mapsto v$ zueinander invers sind.

Bemerkung 3.3 Dasselbe gilt für Prägarben mit Werten in einer Kategorie \mathcal{C} , falls in \mathcal{C} beliebige direkte Limiten existieren, also z.B. $\mathcal{C} = \underline{Set}, \underline{Rg}, \dots$

Beispiel 3.4 Sei $f : X' \rightarrow X$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und

$$f : \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U),$$

der zugehörige Morphismus von Siten. Dann sind

$$f_P : Pr(X') \rightarrow Pr(X), \quad f^P : Pr(X) \rightarrow Pr(X')$$

die üblichen Funktoren. Dies ist klar für f_P : Es ist $(f_P P')(U) = P'(f^{-1}(U))$. Aber auch für f^P erhält man die übliche Konstruktion: für $U' \subseteq X'$ ist $I_{U'}$ die geordnete Menge (!) der offenen Mengen $U \subseteq X$ mit $f(U') \subseteq U$, also $U' \subseteq f^{-1}(U)$.

Für einen Situs $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ sei $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ die Kategorie der abelschen Garben (bezüglich \mathcal{T}) auf \mathcal{X} . Wir haben eine volltreue Einbettung

$$i = i_{\mathcal{T}} : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \hookrightarrow Pr(\mathcal{X}).$$

Satz 3.5 Die Einbettung i besitzt ein Linksadjungiertes

$$a = a_{\mathcal{T}} : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Für eine Prägarbe P heißt aP die (bezüglich \mathcal{T}) assoziierte Garbe.

Es ist also für alle Prägarben P und alle Garben F

$$Hom_{Pr}(P, iF) \xrightarrow{\sim} Hom_{Sh}(aP, F).$$

Manchmal schreibt man auch P^+ für aP .

Zum Beweis brauchen wir einige Vorbereitungen.

Definition 3.6 Eine **Verfeinerungsabbildung**

$$(V_j \rightarrow U)_{j \in J} \rightarrow (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$$

von Überdeckungen von U ist eine Abbildung $\varepsilon : J \rightarrow I$ der Indexmengen und eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ von U -Morphismen $f_j : V_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)}$.

Mit den Verfeinerungsabbildungen als Morphismen, und den offensichtlichen Kompositionen, erhalten wir die Kategorie $\mathcal{T}(U)$ der Überdeckungen von U (bezüglich der Topologie \mathcal{T}).

Definition 3.7 Sei U in \mathcal{X} und P eine abelsche Prägarbe auf \mathcal{X} .

(a) Für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T} heißt

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) = \ker\left(\prod_i P(U_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)\right)$$

die **nullte Čech-Kohomologie** von P bezüglich \mathfrak{U} . Hierbei seien α_1 und α_2 wie in Definition 2.5 definiert.

(b) Nenne

$$\check{H}^0(U, P) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

die **nullte Čech-Kohomologie** von P für U , wobei der direkte Limes über die Kategorie $\mathcal{T}(U)^0$ geführt wird.

Bemerkung 3.8 Eine Prägarbe \mathcal{P} auf \mathcal{X} ist also genau eine Garbe bezüglich \mathcal{T} , wenn für alle U in \mathcal{X} und alle $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ in $\mathcal{T}(U)$ der kanonische Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist auch $P(U) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$ ein Isomorphismus.

Beweis von Satz 3.5 Sei P eine abelsche Prägarbe auf \mathcal{X} . Für U in \mathcal{X} definiere

$$\tilde{P}(U) := \check{H}^0(U, P).$$

Dies liefert eine Prägarbe, denn für $\varphi : V \rightarrow U$ in \mathcal{X} haben wir einen kanonischen Homomorphismus

$$(3.5.1) \quad \varphi^* : \check{H}^0(U, P) \rightarrow \check{H}^0(V, P),$$

weil wir für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ von U die Überdeckung $\mathfrak{U}_V := (U_i \times_U V \rightarrow V)$ von V erhalten, also einen induzierten Homomorphismus

$$(3.5.2) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}_V, P),$$

und durch Übergang zu den Limiten dann (3.5.1).

Ein Morphismus von abelschen Prägarben

$$\psi : P_1 \rightarrow P_2$$

induziert einen kanonischen Morphismus von Prägarben

$$(3.5.3) \quad \tilde{\psi} : \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$$

wie folgt: Für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ induziert ψ einen Homomorphismus

$$(3.5.4) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_2).$$

Dies ist verträglich mit Verfeinerungen und ergibt im Limes über $\mathcal{T}(U)$ einen Homomorphismus

$$(3.5.5) \quad \tilde{\psi}_U : \check{H}^0(U, P_1) \rightarrow \check{H}^0(U, P_2).$$

Für jeden Morphismus $\varphi : V \rightarrow U$ ist dabei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi}_U : & \check{H}^0(U, P_1) & \longrightarrow & \check{H}^0(U, P_2) \\ & \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \tilde{\psi}_V : & \check{H}^0(V, P_1) & \longrightarrow & \check{H}^0(V, P_2) \end{array}$$

kommutativ. Dies liefert (3.5.3). Man sieht leicht, dass dies einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(\mathcal{X}) & \rightarrow & Pr(\mathcal{X}) \\ P & \mapsto & \tilde{P} \\ \psi & \mapsto & \tilde{\psi} \end{array}$$

ergibt.

Definition 3.9 Eine Prägarbe P heißt *separiert* bezüglich \mathcal{T} , wenn für jede Überdeckung $(U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T} der Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow \prod_i P(U_i)$$

injektiv ist. (Äquivalent ist, dass $P(U) \rightarrow \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$ injektiv ist).

Lemma 3.10 (a) Ist P eine abelsche Prägarbe, so ist \tilde{P} separiert.

(b) Es gibt einen kanonischen Morphismus $P \rightarrow \tilde{P}$.

(c) Ist P eine separierte abelsche Prägarbe, so ist $P \rightarrow \tilde{P}$ ein Monomorphismus und \tilde{P} eine Garbe.

(d) Ist F eine Garbe, so ist $F \rightarrow \tilde{F}$ ein Isomorphismus.

Vorbemerkung zum Beweis: Wir werden später sehen (siehe 3.11 und 3.12):

1) Für jedes Element $\bar{s} \in \check{H}^0(U, P)$ gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ in $\mathcal{T}(U)$ und ein Element $s \in \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$, das unter

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$$

auf \bar{s} abgebildet wird (wir sagen, dass \bar{s} durch s repräsentiert wird).

2) Wird \bar{s} von $s_1 \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_1, P)$ und $s_2 \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_2, P)$ (mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in \mathcal{T}(U)$) repräsentiert, so gibt es Verfeinerungsabbildungen $\mathfrak{U}_3 \rightarrow \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_3 \rightarrow \mathfrak{U}_2$, so dass s_1 und s_2 dasselbe Bild in $\check{H}^0(\mathfrak{U}_3, P)$ haben.

Beweis von 3.10 (a): Sei $(U_i \rightarrow U)_i$ eine Überdeckung in \mathcal{T} und $\bar{s} \in \ker(\tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i))$.

Zu zeigen ist $\bar{s} = 0$. Zu $\bar{s} \in \tilde{P}(U) = \check{H}^0(U, P)$ gibt es eine Überdeckung $(V_j \rightarrow U)_j$ und ein Element $s \in \check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P)$, welches \bar{s} repräsentiert.

Sei s_i das Bild von s unter

$$\check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P) \rightarrow \check{H}^0((V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)_j, P).$$

Dieses repräsentiert $\bar{s}|_{U_i} = 0 \in \check{H}^0(U_i, P)$. Nach der Vorbemerkung gibt es also für jedes $i \in I$ eine Verfeinerungsabbildung

$$f_i : (W_{ik} \rightarrow U_i)_k \rightarrow (V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)_j$$

derart, dass s_i unter f_i^* auf 0 in $\check{H}^0((W_{ik} \rightarrow U_i)_k, P)$ abgebildet wird.

Durch Komposition der Überdeckungen $(W_{ik} \rightarrow U_i)_k$ und $(U_i \rightarrow U)_i$ (Axiom (T2)) erhalten wir eine Überdeckung $(W_{ik} \rightarrow U)_k$ und mittels der f_i eine Verfeinerungsabbildung

$$f : (W_{ik} \rightarrow U)_k \rightarrow (V_j \rightarrow U)_j,$$

und unter

$$f^* : \check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P) \rightarrow \check{H}^0((W_{ik} \rightarrow U)_k, P)$$

geht s nach Konstruktion auf 0. Daher ist $\bar{s} = 0$.

(b): Dies wird durch die kanonischen Homomorphismen

$$P(U) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0((U \xrightarrow{id} U), P) \rightarrow \check{H}^0(U, P) = \tilde{P}(U)$$

gegeben.

(c) Sei P eine separierte abelsche Prägarbe.

Behauptung 3.10.1: Für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T} ist $\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$ injektiv.

Beweis Nach der Vorbemerkung genügt es, für jede Verfeinerung $f : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$ die Injektivität von

$$f^* : \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0((V_j \rightarrow U), P)$$

zu zeigen.

Betrachte dazu die als Komposition von $(V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)$ und $(U_i \rightarrow U)$ entstehende Überdeckung

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U)$$

mit den beiden Verfeinerungsabbildungen

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U) \xrightarrow{pr_2} (U_i \rightarrow U)$$

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U) \xrightarrow{pr_1} (V_j \rightarrow U) \xrightarrow{f} (U_i \rightarrow U).$$

Nach dem folgenden Lemma 3.11 sind die beiden induzierten Homomorphismen

$$\check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \xrightleftharpoons[pr_1^* f^*]{pr_2^*} \check{H}^0((V_j \times_U U_i \rightarrow U), P)$$

gleich. Es genügt also, die Injektivität von pr_2^* zu beweisen; dann ist auch $pr_1^* f^*$ und damit f^* injektiv. Aber pr_2^* entsteht durch die Einschränkung von

$$\prod_i P(U_i) \xrightarrow{pr_2^*} \prod_i \prod_j P(V_j \times_U U_i)$$

auf $\check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$, und für jedes i ist $P(U_i) \rightarrow \prod_j P(V_j \times_U U_i)$ injektiv, da P separiert ist.

Wenden wir Behauptung 3.10.1 auf die Überdeckung $(U \rightarrow U)$ an, so folgt die Injektivität von

$$P(U) = \check{H}^0((U \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0(U, P) = \tilde{P}(U),$$

also die erste Behauptung von (c).

Wir beweisen nun, dass \tilde{P} eine Garbe ist. Sei $(U_i \rightarrow U)$ eine Überdeckung. Wir haben zu zeigen, dass

$$(3.10.2) \quad \tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \tilde{P}(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist. Nach (a) ist \tilde{P} separiert, also die erste Abbildung injektiv. Sei nun

$$(\bar{s}_i) \in \ker(\prod_i \tilde{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \tilde{P}(U_i \times_U U_j)).$$

Wähle für jedes i eine Überdeckung $(V_{ik} \rightarrow U_i)$ und ein Element $s_i \in \check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U_i), P)$, welches $\bar{s}_i \in \tilde{P}(U_i)$ repräsentiert. Sei s_{ij}^1 das Bild von s_i unter

$$\check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U_i), P) \rightarrow \check{H}^0((V_{ik} \times_U U_j \rightarrow U_i \times_U U), P)$$

und s_{ij}^2 das Bild von s_j unter

$$\check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U_j), P) \rightarrow \check{H}^0((U_i \times_U V_{ik} \rightarrow U_i \times_U U_j), P).$$

Die von s_{ij}^1 und s_{ij}^2 repräsentierten Elemente in $\check{H}^0(U_i \times_U U_j, P)$ sind gleich den Bildern von \bar{s}_i bzw. \bar{s}_j , sind also gleich. Aus Behauptung 3.10.1 folgt also, dass s_{ij}^1 und s_{ij}^2 das gleiche Bild in

$$\check{H}^0((V_{ik} \times_U V_{j\ell} \rightarrow U_i \times_U U_j), P) \subseteq \prod_{k,\ell} P(V_{ik} \times_U V_{j\ell})$$

haben. Hieraus folgt wiederum, dass

$$s' = (s_i) \in \ker(\prod_{i,k} P(V_{ik}) \rightrightarrows \prod_{i,k,j,\ell} P(V_{jk} \times_U V_{j\ell})) = \check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U), P).$$

Das von s' repräsentierte Element \bar{s}' in $\tilde{P}(U)$ wird dabei unter $\tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i)$ auf (\bar{s}_i) abgebildet. Damit ist (c) bewiesen.

(d) folgt sofort aus Bemerkung 3.8. Damit ist 3.10 bewiesen.

Aus Lemma 3.10 folgt Satz 3.5: Ist P eine abelsche Prägarbe, so setzen wir

$$aP = \tilde{\tilde{P}}.$$

Nach 3.10 (a) ist \tilde{P} separiert, und nach 3.10 (c) ist $\tilde{\tilde{P}}$ eine Garbe. Weiter erhalten wir nach 3.10 (b) einen kanonischen Morphismus von abelschen Prägarben

$$can : P \rightarrow \tilde{P} \rightarrow \tilde{\tilde{P}} = aP.$$

Ist nun F eine abelsche Garbe und

$$\psi : P \rightarrow F (= iF)$$

ein Morphismus von abelschen Prägarben, so erhalten wir wegen der Funktorialität der benutzten Konstruktionen (Zuordnung $P \mapsto \tilde{P}$, Morphismus $P \rightarrow \tilde{P}$) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\psi} & F \\ \downarrow & & \downarrow \rho_1 \wr \\ \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{F} \\ \downarrow & & \downarrow \rho_2 \wr \\ aP = \tilde{\tilde{P}} & \xrightarrow{\tilde{\tilde{\psi}}} & \tilde{\tilde{F}} = aF \end{array} \quad \rho$$

wobei rechts nach 3.10 (d) Isomorphismen stehen. Setzen wir nun

$$a\psi = \tilde{\tilde{\psi}},$$

so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{can} & aP \\ \searrow \psi & & \swarrow \rho^{-1}a\psi =: \psi' \\ & F & \end{array}$$

wobei ψ' eindeutig ist: Hierfür genügt es zu zeigen, dass in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{can} & \tilde{P} \\ \searrow \psi & & \swarrow \mu \\ & F & \end{array}$$

der rechte Morphismus μ eindeutig ist (Hieraus folgt durch zweimalige Anwendung, dass ψ' eindeutig ist). Wegen der Additivität genügt es, dies für $\psi = 0$ zu zeigen. Ist aber $\psi = 0$ und $(U_i \rightarrow U)$ eine Überdeckung in \mathcal{T} , so folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P(U) & \longrightarrow & \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) & \hookrightarrow & \prod_i P(U_i) & \xrightarrow{pr_i} & P(U_i) \\ \psi_U \downarrow & & \mu \swarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_{U_i=0} \\ F(U) & \xrightarrow{\sim} & \check{H}^0((U_i \rightarrow U), F) & \hookrightarrow & \prod_i F(U_i) & \xrightarrow{pr_i} & F(U_i) \end{array}$$

dass $\mu = 0$.

Lemma 3.11 Seien

$$f, g : (U'_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

zwei Verfeinerungsabbildungen von Überdeckungen in der Grothendieck-Topologie \mathcal{T} . Dann sind für jede abelsche Prägarbe P die induzierten Abbildungen

$$f^*, g^* : \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0((U'_j \rightarrow U), P)$$

gleich.

Beweis Sei $f = (\varepsilon, (f_j))$ und $g = (\delta, (g_j))$. Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \prod_i P(U_i) & \xrightarrow{d^0=\alpha_1-\alpha_2} & \prod_{i_1, i_2} P(U_{i_1} \times_U U_{i_2}) \\ f^* \downarrow & \swarrow \Delta^1 & \downarrow f^* \\ \prod_j P(U_j) & \xrightarrow{d^0=\alpha_1-\alpha_2} & \prod_{j_1, j_2} P(U_{j_1} \times_U U_{j_2}), \\ & & \downarrow g^* \end{array}$$

wobei Δ^1 durch

$$(\Delta^1 s)_j = P((f_j, g_j)_U)(s_{\varepsilon(j), \delta(j)})$$

definiert ist, mit dem kanonischen Morphismus

$$(f_j, g_j)_U : U'_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)} \times_U U_{\delta(j)}.$$

Man rechnet nach, dass

$$\Delta^1 \circ d^0 = g^* - f^*.$$

Daher sind f^* und g^* auf $\ker d^0 = \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$ gleich.

Durch dieses Resultat können wir den Limes

$$\check{H}^0(U, P) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{T}(U)^0}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

besser verstehen: Für zwei Überdeckungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ in $\mathcal{T}(U)$ nenne \mathfrak{U}' feiner als \mathfrak{U} (Bezeichnung $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$), wenn es eine Verfeinerungsabbildung $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$ gibt. Damit wird die unterliegende Menge $\mathcal{T}(U)_0$ zu einer geordneten Menge. Diese ist induktiv geordnet: Für zwei Überdeckungen $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_i$ und $\mathfrak{V} = (V_j \rightarrow U)_j$ gibt es die gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{W} = (U_i \times_U V_j \rightarrow U)_{i,j}$ mit den offensichtlichen Verfeinerungsabbildungen

$$\mathfrak{U} \leftarrow \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{V},$$

also $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$.

Nach Lemma 3.11 erhalten wir weiter für $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$ durch Wahl einer Verfeinerungsabbildung $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$ einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$(3.11.1) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}', P).$$

Corollar 3.12 Es ist

$$\check{H}^0(U, P) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{T}(U)_0}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P),$$

der induktive Limes über die induktiv geordnete Menge $\mathcal{T}(U)_0$.

Hieraus folgt die Vorbemerkung zum Beweis von Lemma 3.10

Wir kommen nun zum Push-Forward und Pull-Back für Garben. Sei

$$f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

ein Morphismus von Siten.

Lemma 3.13 Ist F' eine abelsche Garbe auf $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$, so ist $f_P F'$ wieder eine Garbe.

Beweis: selbst!

Lemma/Definition 3.14 (a) $f_* F' := f_P F'$ heißt das direkte Bild (oder Push-Forward) von F' (bezüglich f).

(b) Für eine abelsche Garbe F auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ heißt $f^* F := a f^P F$ das (Garben-)Urbild (oder Pull-Back) von F .

(c) Der Funktor

$$f^* = a f^P : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$$

ist linksadjungiert zum Funktor

$$f_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Beweis Für Garben F' auf $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ und F auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist kanonisch

$$\begin{aligned} Hom_{Sh}(f^* F, F') &= Hom_{Sh}(a f^P F, F') = Hom_{Pr}(f^P F, i F') \\ &= Hom_{Pr}(F, f_P i F') = Hom_{Sh}(F, f_* F'). \end{aligned}$$

4 Die abelschen Kategorien der Garben und Prägarben

Sei \mathcal{X} eine Kategorie.

Satz 4.1 (a) Die Kategorie $Pr(\mathcal{X})$ der abelschen Prägarben auf \mathcal{X} bildet eine abelsche Kategorie.

(b) Eine Sequenz von abelschen Prägarben

$$0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn für alle $U \in ob(\mathcal{X})$ ($:=$ Objekte von \mathcal{X}) die Sequenz

$$0 \rightarrow P'(U) \rightarrow P(U) \rightarrow P''(U) \rightarrow 0$$

exakt in \underline{Ab} ist.

Beweis: Völlig analog zum klassischen Fall eines topologischen Raums (vergleiche Alg. Geo. II, Definition 3.18 für die Definition von Kernen und Cokernen).

Satz 4.2 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Situs.

(a) Die Kategorie $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ der abelschen Garben auf \mathcal{X} bezüglich \mathcal{T} ist eine abelsche Kategorie.

(b) Der Kern eines Morphismus $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ von abelschen Garben ist gleich dem Prägarben-Kern $\ker^P \varphi$ (d.h., $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi_U : F_1(U) \rightarrow F_2(U))$ für alle U in \mathcal{X}).

(c) Der Cokern eines Morphismus $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ von abelschen Garben ist gleich $a \operatorname{coker}^P \varphi$, d.h., die assoziierte Garbe zum Prägarben-Kokern $\operatorname{coker}^P \varphi$ (definiert durch $(\operatorname{coker}^P \varphi)(U) = \operatorname{coker}(\varphi_U : F_1(U) \rightarrow F_2(U))$ für alle U in \mathcal{X}).

(d) Insbesondere ist $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ ein Epimorphismus in $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ genau dann, wenn es zu jedem U in \mathcal{X} und jedem $s \in F_2(U)$ eine Überdeckung $(U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T} gibt, sowie Schnitte $s_i \in F_2(U_i)$, die unter φ auf $s|_{U_i}$ abgebildet werden.

Beweis Die Eigenschaften (a) - (c) folgen leicht aus 4.1 und der universellen Eigenschaft der assoziierten Garbe. Für (d) bemerken wir, dass φ genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $\operatorname{coker} \varphi = 0$, also wenn $a(\operatorname{coker}^P \varphi) = 0$. Dies bedeutet aber, dass es für jedes U in \mathcal{X} und jedes $\bar{s} \in (\operatorname{coker}^P \varphi)(U)$ eine Überdeckung $(U_i \rightarrow U)$ gibt mit $\bar{s}|_{U_i} = 0$ für alle i . Wegen $(\operatorname{coker}^P \varphi)(U_i) = \operatorname{coker}(\varphi_{U_i} : F_1(U_i) \rightarrow F_2(U_i))$ folgt die Behauptung.

Satz 4.3 (a) In $Pr(\mathcal{X})$ und $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ existieren beliebige Limiten (inverse Limiten) und Kolimiten (direkte Limiten).

(b) Der Funktor $i : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \hookrightarrow Pr(\mathcal{X})$ ist linksexakt.

(c) Der Funktor $a : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist exakt.

Beweis (a) In $Pr(\mathcal{X})$ ist

$$(\varprojlim^P P_i)(U) = \varprojlim_i P(U_i),$$

analog für direkte Limiten. Ist nun $(F_i)_{i \in I}$ ein Diagramm von Garben, so ist $\lim_{\leftarrow i}^P P_i$ wieder eine Garbe, da inverse Limiten miteinander vertauschen. Wir können also $\lim_{\leftarrow i} F_i = \lim_{\leftarrow i}^P F_i$ setzen. Der direkte Limes ist

$$\lim_{\rightarrow i} F_i = a(\lim_{\rightarrow i}^P F_i),$$

denn wir haben für jede Garbe G die universelle Eigenschaft

$$\text{Hom}_{\text{Sh}}(a \lim_{\rightarrow}^P F_i, G) \cong \text{Hom}_{\text{Pr}}(\lim_{\rightarrow} F_i, iG) \cong \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_{\text{Pr}}(F_i, iG) \cong \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_{\text{Sh}}(F_i, G)$$

(b) Aus der Adjunktion von i und a folgt sofort, dass i linksexakt und a rechtsexakt ist (siehe Lemma 4.5 unten).

(c) Wegen $aP = \tilde{P}$ genügt es zu zeigen, dass der Funktor $P \mapsto \tilde{P}$ linksexakt ist. Aber es ist

$$\tilde{P}(U) = \lim_{\rightarrow \mathfrak{U} \in \mathfrak{T}(U)_0} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P),$$

die Zuordnung $P \mapsto \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$ ist linksexakt, und die Bildung des induktiven Limes ist ein exakter Funktor.

Satz 4.4 Sei $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Siten.

- (a) $f_P : \text{Pr}(\mathcal{X}') \rightarrow \text{Pr}(\mathcal{X})$ ist exakt und $f^P : \text{Pr}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Pr}(\mathcal{X}')$ ist rechtsexakt.
- (b) Existieren endliche Limiten in \mathcal{X} und \mathcal{X}' , so ist f^P exakt.
- (c) $f_* : \text{Sh}(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist linksexakt und $f^* : \text{Sh}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ ist rechtsexakt.
- (d) Existieren endliche Limiten in \mathcal{X} und \mathcal{X}' , so ist f^* exakt.

Beweis (a) Die Exaktheit von f_P ist nach 4.1 klar, und wegen der Adjunktion ist f^P rechtsexakt (siehe unten).

(b) Aus der Voraussetzung folgt, dass für jedes U' in \mathcal{X}' die Kategorie $I_{U'}^0$ (siehe Beweis von 3.2) kofiltrierend ist (siehe Anhang). Hieraus folgt, dass die Bildung des induktiven Limes über $I_{U'}^0$ exakt ist (siehe Anhang).

Lemma 4.5 Sei \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien, und seien $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren, so dass G rechtsadjungiert zu F ist ($\Leftrightarrow F$ ist linksadjungiert zu G). Dann ist G linksexakt und F rechtsexakt.

Beweis Nach Voraussetzung haben wir bifunktorielle Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B)$$

für $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ und $B \in \text{ob}(\mathcal{B})$.

(a) Sei

$$(4.5.1) \quad 0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow 0$$

exakt in \mathcal{B} . Wir haben zu zeigen, dass

$$(4.5.2) \quad 0 \rightarrow GB_1 \rightarrow GB_2 \rightarrow GB_3$$

exakt ist. Dies bedeutet, dass die Sequenz

$$(4.5.3) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_3)$$

für alle $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ exakt ist ($\Leftrightarrow GB_1$ ist der Kern von $GB_2 \rightarrow GB_3$). Per Adjunktion identifiziert sich (4.5.3) aber mit

$$(4.5.4) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_3).$$

Diese Sequenz ist wegen Exaktheit von (4.5.1) exakt.

(b) Die Rechtsexaktheit von F ist analog (bzw. dual).

5 Kohomologie auf Siten

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Situs.

Lemma/Definition 5.1 (a) Für ein Objekt U in \mathcal{X} definiere die abelsche Prägarbe \mathbb{Z}_U^P durch

$$\mathbb{Z}_U^P(V) = \bigoplus_{\text{Hom}(V,U)} \mathbb{Z} = \bigoplus_{f \in \text{Hom}(V,U)} \mathbb{Z}f \quad \text{für } V \text{ in } \mathcal{X}.$$

Für jede abelsche Prägarbe P auf \mathcal{X} gilt dann

$$\text{Hom}_{Pr(\mathcal{X})}(\mathbb{Z}_U^P, P) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, F(U)) = P(U),$$

funktoriell in P (d.h., \mathbb{Z}_U^P stellt den Funktor $P \mapsto P(U)$ dar).

(b) Definiere die abelsche Garbe \mathbb{Z}_U durch

$$\mathbb{Z}_U = a\mathbb{Z}_U^P.$$

Dann gilt funktoriell für Garben F auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$

$$\text{Hom}_{Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})}(\mathbb{Z}_U, F) = F(U).$$

Beweis (a): Jeder Morphismus $f : \mathbb{Z}_U^P \rightarrow P$ ist eindeutig durch $f_U(1_{id_U}) \in P(U)$ bestimmt.

(b) folgt aus (a) durch die Adjunktion von a und i .

Proposition 5.2 Die abelschen Kategorien $Pr(\mathcal{X})$ und $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ haben genügend viele Injektive.

Beweis Wir zeigen für $\mathcal{A} = Pr(\mathcal{X})$ oder $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$:

- 1) \mathcal{A} erfüllt $AB3^*$, d.h., in \mathcal{A} exakt beliebige Summen
- 2) \mathcal{A} erfüllt $AB5$, d.h., \mathcal{A} erfüllt $AB3$ (Existenz beliebiger Produkte), und die Bildung von induktiven Limiten ist exakt.
- 3) \mathcal{A} besitzt eine Familie von Generatoren (Erzeugern), d.h., eine Familie $(Z_i)_{i \in I}$ von Objekten in \mathcal{A} , so dass gilt: Für jedes A in \mathcal{A} und jedes Unterobjekt $B \subsetneq A$ existiert ein $i \in I$ und ein Morphismus $Z_i \rightarrow A$, der nicht über die kanonische Inklusion $B \rightarrow A$ faktorisiert.

Nach einem allgemeinen Satz (siehe Koh. Sch. = Vorlesung ‘Kohomologie von Schemata’, Satz 6.11) besitzt \mathcal{A} dann genügend viele Injektive.

Für $Pr(\mathcal{X})$ sind $AB3^*$ und $AB5$ klar nach (dem Beweis von) Satz 4.3 (a), (da diese Aussagen in Ab gelten), und es folgt aus 5.1 (a), dass die (\mathbb{Z}_U) eine Familie von Generatoren bilden.

Für $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ gelten ebenfalls $AB3^*$ und $AB3$ (beliebige Limiten und Kolimiten existieren nach 4.3(a)), und $AB5$ folgt aus der expliziten Beschreibung der Kolimiten im Beweis von 4.3 (a) und der Exaktheit des Funktors $P \rightsquigarrow aP$ (siehe 4.3 (c)). Die Existenz von Generatoren folgt aus 5.1 (b).

Definition 5.3 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Situs und U ein Objekt in \mathcal{X} . Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} H^i(U, -) := H^i(U, \mathcal{T}; -) & : & Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Ab \\ & & F \rightsquigarrow H^i(U, F) \end{array}$$

ist die i -te Rechtsabbildung (siehe Koh. Sch., Definition 6.22) des linksexakten Funktors

$$F \rightsquigarrow F(U) =: \Gamma(U, F) =: H^0(U, F).$$

$H^i(U, F)$ heißt die i -te Kohomologie von F auf U (oder i -te Kohomologiegruppe auf U mit Koeffizienten in F).

Nach Konstruktion ist also $H^i(U, F) = H^i(I(U))$, wobei $F \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung von F in $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist.

Beispiel 5.4 Ist X ein topologischer Raum und F eine Garbe auf X , so ist $H^i(X, F)$ die übliche Garbenkohomologie auf X .

Definition 5.5 Sei $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von kleinen Siten. Dann ist $R^i f_*$ die i -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$f_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})).$$

$R^i f_* F$ heißt das i -te höhere direkte Bild von F .

Hier ist also $R^i f_* F = \mathcal{H}^i(f_* I)$, wobei $F \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung in $Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ ist.

Bemerkung 5.6 (a) Nach allgemeinen Eigenschaften von rechtsabgeleiteten Funktoren (siehe Koh. Sch., Satz 6.25) hat man für jede kurze exakte Sequenz

$$(5.6.1) \quad 0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

von Garben auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ und jedes Objekt U in \mathcal{X} eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(U, F') \rightarrow H^0(U, F) \rightarrow H^0(U, F'') \xrightarrow{\delta} H^1(U, F') \\ \dots &\rightarrow H^n(U, F') \rightarrow H^n(U, F) \rightarrow H^n(U, F'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U, F') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Diese ist funktoriell in U und funktoriell in den kurzen exakten Sequenzen (5.6.1).

(b) Entsprechend erhält man für jeden Morphismus von Siten $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ und jede kurze exakte Sequenz von Garben auf $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$

$$(5.6.2) \quad 0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow R^n f_* G' \rightarrow R^n f_* G \rightarrow R^n f_* G'' \xrightarrow{\delta} R^{n+1} f_* G' \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell in den kurzen exakten Sequenzen (5.6.2).

Satz 5.7 (a) Sei F eine abelsche Garbe auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Für jeden Morphismus $\alpha : V \rightarrow U$ in \mathcal{X} hat man kanonische Restriktionshomomorphismen

$$(5.7.1) \quad \alpha^* : H^i(U, F) \rightarrow H^i(V, F) \quad (i \geq 0),$$

die für $i = 0$ mit der Restriktion $F(U) \rightarrow F(V)$ übereinstimmen, funktoriell in F sind, und mit den exakten Sequenzen aus 5.6 (a) verträglich sind (d.h., auch verträglich mit Verbindungsmorphismen).

(b) Hierdurch erhalten wir eine abelsche Prägarbe

$$\underline{H}^i(F) : U \mapsto H(U, F)$$

für jedes $i \geq 0$.

Beweis Ist $F \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung, so haben wir einen Homomorphismus von Komplexen

$$I(U) \rightarrow I(V),$$

und die Abbildungen (5.7.1) entstehen durch Übergang zur Kohomologie. Es folgt sofort, dass man für einen weiteren Morphismus $\beta : W \rightarrow V$ die Beziehung $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$ hat, wegen der Transitivität der Restriktionen für I . Weiter gilt $id_U^* = id$, so dass wir (b) erhalten. Die weiteren Funktorialitäten in (a) sind ebenfalls aus der Konstruktion klar: Für einen Morphismus von Garben $F \rightarrow G$ finden wir einen Morphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & J \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \hookrightarrow & I \end{array}$$

von injektiven Auflösungen, der nach Definition die Funktorialität der Kohomologie liefert, nämlich die kanonischen Morphismen $H^i(U, F) = H^i(I(U)) \rightarrow H^i(J(U)) = H^i(U, G)$. Dies zeigt die Verträglichkeit mit α^* . Der Fall der exakten Sequenzen, die aus einem exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von Auflösungen folgen, ist analog.

Satz 5.8 Sei $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Siten. Für jede Garbe $F \in Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ und jedes $i \geq 0$ ist $R^i f_* F$ die Garbe, die zur Prägarbe

$$U \mapsto H^i(f^{-1}(U), F)$$

auf \mathcal{X}' assoziiert ist.

Beweis Sei $F \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung in $Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$. Dann ist $R^i f_* F = \mathcal{H}^i(f_* I)$ die Garbe, die zum Prägarben-Quotienten

$$\begin{aligned} U \mapsto & \ker^P(f_* I^i \rightarrow f_* I^{i+1})(U) / \text{im}^P(f_* I^{i-1} \rightarrow f_* I)(U) \\ & \parallel \\ & \ker(I^i(f^{-1}(U)) \rightarrow I^{i+1}(f^{-1}(U))) / \text{im}(I^{i-1}(f^{-1}(U)) / I^i(f^{-1}(U))) \\ & \parallel \\ & H^i(f^{-1}(U), F) \end{aligned}$$

assoziiert ist.

6 Spektralsequenzen

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

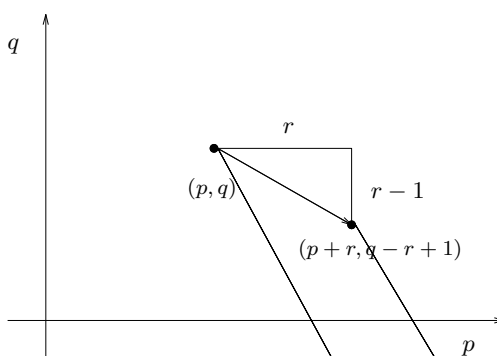
Definition 6.1 Eine Spektralsequenz in \mathcal{A}

$$E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$$

besteht aus

- (a) Objekten $E_1^{p,q}$ in \mathcal{A} für alle $p, q \in \mathbb{Z}$,
- (b) Subquotienten $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$ von $E_1^{p,q}$ für alle $r \geq 2$,
- (c) Morphismen (genannt die **Differentiale** der Spektralsequenz)

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1},$$



so dass

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-1})}{\text{im}(d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q})},$$

- (d) Subquotienten $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}$ von $E_1^{p,q}$, so dass

$$B_r^{p,q} \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$$

für alle $r \geq 1$ (also $E_\infty^{p,q}$ "kleiner als $E_r^{p,q}$ für alle $r \geq 1$ "),

- (e) Objekten $(E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in \mathcal{A} mit absteigenden Filtrierungen

$$E^n \supseteq \dots \supseteq F^p E^n \supseteq F^{p+1} E^n \supseteq \dots$$

und Isomorphismen

$$E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} F^p E^{p,q} / F^{p+1} E^{p,q}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Definition 6.2 Die Spektralsequenz heißt endlich konvergent, wenn es für jedes $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ gilt

$$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} \quad \text{für } r \gg 0,$$

und wenn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Filtrierung $F^p E^n$ endlich ist, d.h.,

$$F^p E^n = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gg 0, \\ E^n & \text{für } p \ll 0. \end{cases}$$

Satz 6.3 Sei A^\cdot ein Komplex in \mathcal{A} , und sei $F^p A^\cdot$ eine absteigende Filtrierung durch Unterkomplexe. Dann gibt es eine Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p A^\cdot / F^{p+1} A^\cdot) \Rightarrow E^{p+q} = H^n(A^\cdot).$$

Ist A^\cdot nach unten beschränkt und die Filtrierung F^p biregulär, d.h.,

$$F^p A^n = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gg 0, \\ A^n & \text{für } p \ll 0 \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$, so ist die Spektralsequenz endlich konvergent.

Beweis Für $r \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q := n - p$ setze

$$F^p H^n(A^\cdot) = \text{im}(H^n(F^p A^\cdot) \rightarrow H^n(A^\cdot))$$

sowie

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} = & \text{im}(H^n(F^p A^\cdot / F^{p+r} A^\cdot) \xrightarrow{\alpha^{p,r}} H^n(F^p A^\cdot / F^{p+1} A^\cdot) = E_1^{p,q}) & \\ \uparrow & \uparrow & \parallel \\ Z_\infty^{p,q} = & \text{im}(H^n(F^p A^\cdot) \xrightarrow{\alpha^p} H^n(F^p A^\cdot / F^{p+1} A^\cdot)) & \\ \uparrow & \uparrow \delta & \parallel \\ B_\infty^{p,q} = & \text{im}(H^{n-1}(A^\cdot / F^p A^\cdot) \xrightarrow{\delta^p} H^n(F^p A^\cdot / F^{p+1} A^\cdot)) & \\ \uparrow & \uparrow & \parallel \\ B_r^{p,q} = & \text{im}(H^{n-1}(F^{p-r+1} A^\cdot / F^p A^\cdot) \xrightarrow{\delta^{p,r}} H^n(F^p A^\cdot / F^p A^\cdot)) & \end{array}$$

Hier werden die Morphismen $\alpha, \alpha^{p,r}$ und das obere kommutative Diagramm durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F^p / F^{p+r} & \xrightarrow{\alpha^{p,r}} & F^p / F^{p+1} \\ \uparrow & & \parallel \\ F^p & \xrightarrow{\alpha^p} & F^p / F^{p+1} \end{array}$$

induziert. Hier schreiben wir F^m für $F^m A^\cdot$.

Die Verbindungshomomorphismen δ, δ^p und $\delta^{p,r}$ sowie die weiteren kommutativen Diagramme werden durch die folgenden kommutativen Diagramme und die zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta : & 0 & \longrightarrow & F^p & \longrightarrow & A^\cdot & \longrightarrow & A^\cdot / F^p & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \alpha^p & & \downarrow & & \parallel & & \\ \delta^p : & 0 & \longrightarrow & F^p / F^{p+1} & \longrightarrow & A^\cdot / F^{p+1} & \longrightarrow & A^\cdot / F^p & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \delta^{p,r} : & 0 & \longrightarrow & F^p / F^{p+1} & \longrightarrow & F^{p-r+1} / F^{p+1} & \longrightarrow & F^{p-r+1} / F^p & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Wir erhalten kommutative Diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} H^n(F^p/F^{p+r+1}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+r}) & \xrightarrow{\delta^{p+r,r+1}} & H^{n+1}(F^{p+r}/F^{p+r+1}) \\ \parallel & & \downarrow \alpha^{p,r} & \searrow \beta & \downarrow \gamma \\ H^n(F^p/F^{p+r+1}) & \xrightarrow{\alpha^{p,r+1}} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \longrightarrow & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+r+1}) \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} H^n(F^{p+1}/F^{p+r}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+r}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+1}) \\ \parallel & & \downarrow \delta^{p+r,r+1} & \searrow \beta & \downarrow \\ H^n(F^p/F^{p+r}) & \xrightarrow{\delta^{p+r,r}} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \xrightarrow{\gamma} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+r+1}) \end{array}$$

Aus (1) folgt $Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$, und aus (2) folgt (durch Ummummern $p+r \rightsquigarrow p$) $B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q}$.

Damit folgt insgesamt

$$0 = B_1^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_1^{p,q} = E_1^{p,q}$$

Wir benutzen nun das folgende Lemma

Lemma 6.4 Ist

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow \psi & \\ A' & \xrightarrow{\varphi'} & A & \xrightarrow{\eta} & A'' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in \mathcal{A} , mit exakter Zeile, so ist $\text{im}(\varphi') \subseteq \text{im}(\varphi)$, sowie kanonisch

$$\text{im}(\varphi)/\text{im}(\varphi') \cong \text{im}(\psi).$$

Beweis: Die erste Behauptung ist klar, und wegen $\ker \eta = \text{im} \varphi' \subseteq \text{im} \varphi$ induziert ρ einen Isomorphismus

$$\text{im} \varphi / \text{im} \varphi' = \text{im} \varphi / \ker \eta \xrightarrow{\sim} \eta(\text{im} \varphi) = \text{im}(\eta\varphi) = \text{im} \psi.$$

Durch Anwendung von 6.4 folgt nun ein Isomorphismus

$$\delta_r^{p,q} : Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} = \text{im} \alpha^{p,r} / \text{im} \alpha^{p,r+1} \stackrel{(1)}{\cong} \text{im} \beta \stackrel{(2)}{\cong} \text{im} \delta^{p+r,r+1} / \text{im} \delta^{p+r,r} = B_{r+1}^{p+r,q-r+1} / B_r^{p+r,q-r+1}.$$

Damit definieren wir die Differentiale

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q} \twoheadrightarrow Z_r^{p,q}/B_{r+1}^{p,q} \xrightarrow[\sim]{\delta_r^{p,q}} B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1} \hookrightarrow Z_r^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1}.$$

Es folgt

$$\ker d_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q} \quad , \quad \text{im} d_r^{p,q} = B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1}$$

und damit

$$\frac{\ker d_r^{p,q}}{\text{im} d_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}.$$

Schließlich ergeben die kommutativen Diagramme

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} & & H^n(F^p) & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow \rho & \\ H^n(F^{p+1}) & \longrightarrow & H^n(A) & \longrightarrow & H^n(A/F^{p+1}) \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} H^{n-1}(A/F^p) & \xrightarrow{\delta} & H^n(F^p) & \longrightarrow & H^n(A) \\ \parallel & & \downarrow \alpha^p & \searrow \rho & \downarrow \\ H^{n-1}(A/F^p) & \xrightarrow{\delta^p} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \longrightarrow & H^n(A/F^{p+1}) \end{array}$$

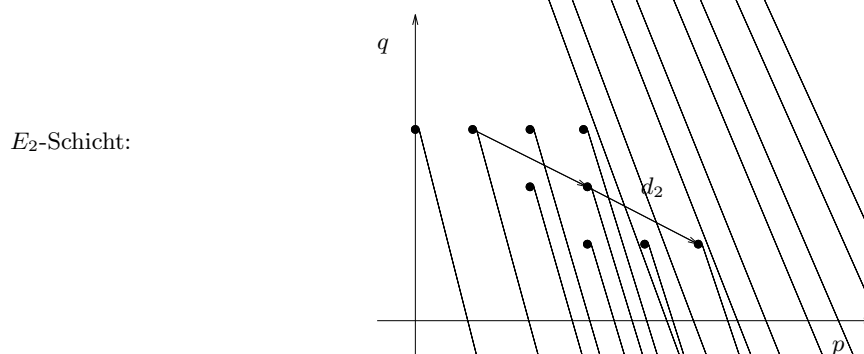
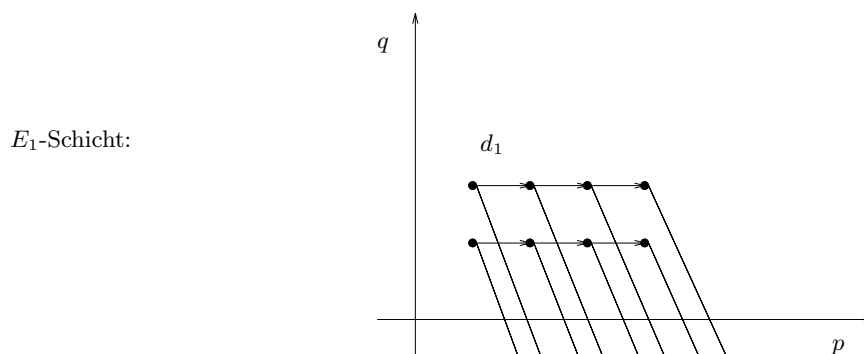
zusammen mit Lemma 6.4 die Beziehungen $F^{p+1}H^n(A) \subseteq F^pH^n(A)$ sowie

$$E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q} = \text{im } \alpha^p / \text{im } \delta^p \stackrel{(4)}{\cong} \text{im } \rho \stackrel{(3)}{\cong} F^pH^n(A)/F^{p+1}H^n(A).$$

Damit sind alle Eigenschaften einer Spektralsequenz gezeigt. Die Zusatzbehauptung über die Konvergenz ist klar, da die n -te Kohomologie eines Komplexes C nur von $C^{n-1} \rightarrow C^n \rightarrow C^{n+1}$ abhängt.

Wir erklären nun einiges zum Arbeiten mit Spektralsequenzen.

1) Die Schichten: Für jedes r betrachtet man die E_r -Schicht aller Terme $E_r^{p,q}$ und ihrer Differentiale

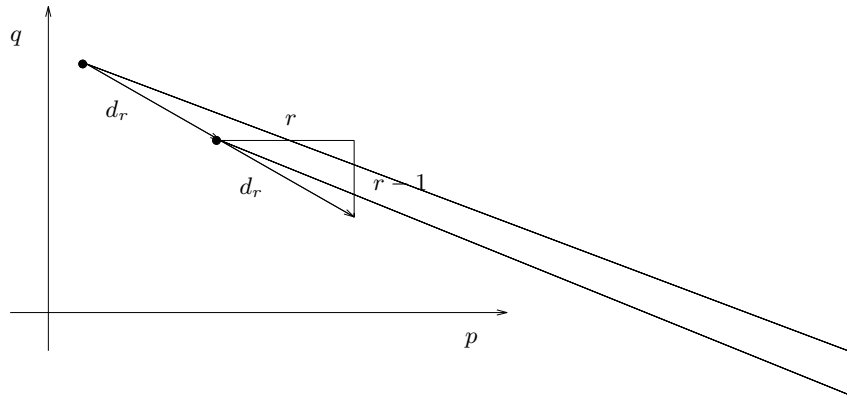


Es ist $d_r d_r = 0$ und $E_{r+1} = \ker d_r / \text{im } d_r$.

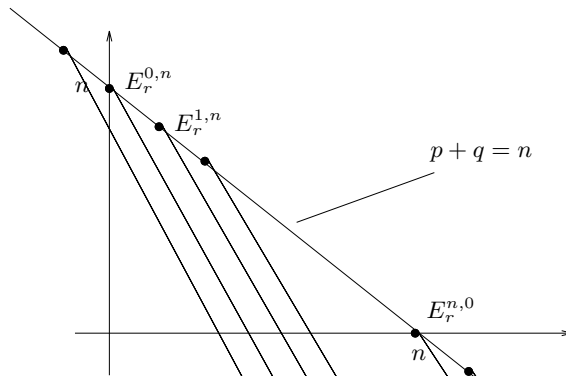
2) Limes/Konvergenz: Sei

$$E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q} \quad (\text{oder } E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q})$$

E_r -Schicht:



eine endlich konvergente Spektralsequenz. Wir erhalten das folgende Bild:



Die Terme, die zu E^n beitragen, stehen auf der Geraden $p+q=n$. Wir haben eine (endliche) Filtrierung

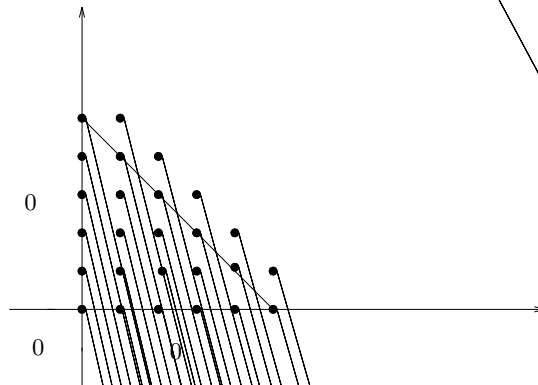
$$E^n \supseteq \dots \supseteq F^p E^n \supseteq F^{p+1} E^n \supseteq \dots$$

und

$$F^p E^n / F^{p+1} E^n = E_\infty^{p,q}, \quad p+q=n.$$

Links steht ein Subquotient von E^n , rechts steht ein Subquotient von $E_1^{p,q}$; weiter ist $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ für $r \gg 0$.

3) Spektralsequenzen im 1. Quadranten: Sei $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ (bzw. $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$) eine endlich konvergente Spektralsequenz mit $E_1^{p,q} = 0$ (bzw. $E_2^{p,q} = 0$) für $p < 0$ oder $q < 0$.



Lemma/Definition 6.5 (a) Es ist $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ für $r > \max(p, q+1)$.

(b) Für $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ gibt es kanonische Morphismen

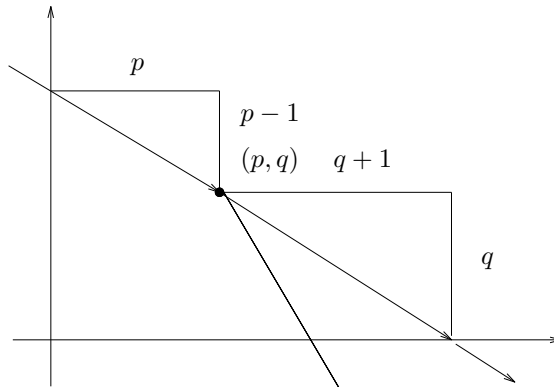
$$\begin{array}{ccc} E^n & \xrightarrow{e} & E_1^{0,n} \\ E_1^{n,0} & \xrightarrow{e} & E^n. \end{array}$$

Diese heißen Kantenmorphisme (edge morphisms).

(c) Für $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ gibt es kanonische Kantenmorphisme

$$\begin{array}{ccc} E^n & \xrightarrow{e} & E_2^{0,n} \\ E_2^{n,0} & \xrightarrow{e} & E^n \end{array}$$

Beweis (a):



Ist $r > q + 1$, so wird das aus $E_r^{p,q}$ ausgehende Differential $d_r^{p,q}$ null (weil es in 0 landet). Ist $r > p$, so ist das in $E_r^{p,q}$ einlaufende Differential (explizit: $d_r^{p-r, q+r-1}$) null. Gilt beides, so ist $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r / \text{im } d_2 = E_r^{p,q} / 0 = E_r^{p,q}$. Da dies für alle höheren r gilt (und die Spektralsequenz konvergiert), ist $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

(b): Ist $E_\infty^{p,q} = 0$ für $p < 0$, so ist (wegen der Konvergenz) $E^n = F^0 E^n$ und

$$E_{r+1}^{0,n} = \ker(E_r^{0,n} \xrightarrow{d_r^{0,n}} E_r^{r, n-r+1}) \subseteq E_r^{0,n}$$

für alle r , also $E_\infty^{0,n} \subseteq E_1^{0,n}$. Wir erhalten

$$e : E^n \rightarrow F^0 E^n / F^1 E^n \cong E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_1^{0,n}.$$

Ist $E_\infty^{p,q} = 0$ für $q < 0$, so ist wegen der Konvergenz $F^{n+1} E^n = 0$ und $E_{r+1}^{n,0} = \text{coker}(E_r^{n-r, r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{n,0})$ ein Quotient von E_r^n . Also haben wir $E_1^{n,0} \rightarrow E_\infty^{n,0}$ und einen Morphismus

$$e : E_1^{n,0} \rightarrow E_\infty^{n,0} \cong F^n E^n / F^{n+1} E^n \hookrightarrow E^n.$$

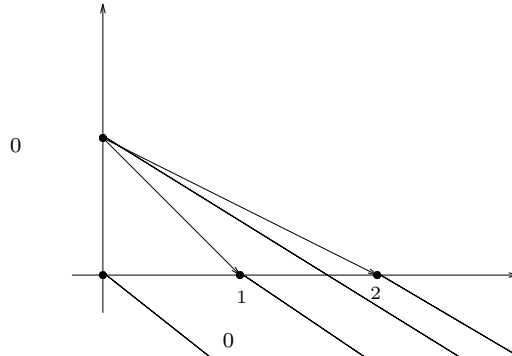
(c) ist analog.

Lemma 6.7 (Exakte Sequenz der niedrigen Terme) Sei $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ (oder $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$) eine endlich konvergente Spektralsequenz im 1. Quadranten. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \xrightarrow{e} E^1 \xrightarrow{e} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{e} E,$$

wobei e immer den Kantenmorphismus bezeichnet.

Beweis Das Bild



(oder 6.5 (a)) zeigt

$$E_\infty^{1,0} = E_2^{0,1}, \quad E_\infty^{0,1} = \ker d_2^{0,1}, \quad E_\infty^{2,0} = \operatorname{coker} d_2^{0,1}$$

Hieraus erhalten wir exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{e} E^1 \rightarrow \ker d_2^{0,1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker d_2^{0,1} \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_\infty^{2,0}$$

und durch Zusammensetzen und Komposition mit $E_\infty^{2,0} \subseteq E^2$ die behauptete Sequenz.

Ein wichtiges Beispiel für Spektralsequenzen ist:

Satz 6.8 (Grothendieck-Leray-Spektralsequenz) Seien $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ links-exakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien, wobei \mathcal{A} und \mathcal{B} genügend viele Injektive haben und F Injektive in G -azyklische abbildet. Dann gibt es für jedes Objekt X in \mathcal{A} eine endlich konvergente Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = R^p G(R^q F X) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)X$$

Wir benötigen einige Vorüberlegungen. Sei \mathcal{A} eine Kategorie mit genügend vielen Injektiven.

Lemma 6.9 Ist A ein nach unten beschränkter Komplex in \mathcal{A} , so gibt es einen Morphismus von Komplexen

$$\varphi : A \rightarrow I$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) I ist ein nach unten beschränkter Komplex mit injektiven Komponenten I^n .
- (b) φ ist ein Quasiisomorphismus
- (c) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $A^n \hookrightarrow I^n$ ein Monomorphismus.

Beweisskizze: Ohne Einschränkung sei $A^m = 0$ für $m < 0$. Ist dann $I^0 \xrightarrow{d^0} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n$ und $\varphi^i : A^i \rightarrow I^i$ für $i \leq n$ bereits konstruiert, so betrachte die Fasersumme

$$\begin{array}{ccccccc}
 A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} d^{n-1} & \longrightarrow & A^{n+1} \\
 \downarrow \varphi^{n-1} & & \downarrow \varphi^n & & \downarrow & & \downarrow \\
 I^{n-1} & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & I^n & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} \partial^{n-1} & \longrightarrow & \operatorname{coker} \partial^{n-1} \oplus_{A^n} A^{n+1} \hookrightarrow I^{n+1}
 \end{array}$$

und einem Monomorphismus wie angegeben mit injektiven I^{n+1} . Dabei zeigt man, dass die mittleren vertikalen Morphismen Monomorphismen sind, also auch der rechte Morphismus $\varphi^{n+1} : A^{n+1} \hookrightarrow I^{n+1}$, der durch Komposition entsteht. Für mehr Details siehe den Anhang.

Lemma/Definition 6.10 (Hyperkohomologie/Hyperderivationen) Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein links-exakter Funktor. Für einen nach unten beschränkten Komplex A in \mathcal{A} und $n \in \mathbb{Z}$ definiere

$$R^n F(A) := H^n(FI) \in \text{ob}(\mathcal{B}),$$

wobei

$$A \xrightarrow{\varphi} I$$

ein Quasiisomorphismus wie in 6.9 ist. Diese Objekte sind bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von φ .

Beweis der Behauptung: Seien $\varphi_i : A \rightarrow I_i$ zwei Morphismen wie in 6.9 ($i = 1, 2$). Sei $\varphi_3 : I_1 \oplus_A I_2 \hookrightarrow I_3$ ein Monomorphismus und Quasiisomorphismus von der Fasersumme in einem Komplex I_3 mit injektiven Komponenten. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$(6.10.1) \quad \begin{array}{ccc} A \hookrightarrow I_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & I_2 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ I_1 \hookrightarrow I_1 \oplus_A I_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & I_1 \oplus_A I_2 \\ & \searrow \beta_1 & \searrow \beta_2 \\ & & I_3 \end{array}$$

Mit φ_1 und φ_2 sind auch α_1 und α_2 Quasiisomorphismen. Daher sind auch β_1 und β_2 Quasiisomorphismen. Da I_1, I_2 und I_3 injektive Komponenten haben, folgt, dass β_1 und β_2 sogar Homotopieäquivalenzen sind (siehe den Anhang). Daher sind auch

$$FI_1 \xrightarrow{F\beta_1} FI_3 \xleftarrow{F\beta_2} FI_2$$

Homotopieäquivalenzen, also Quasiisomorphismen. Wir erhalten also Isomorphismen

$$(F\beta_2)_*^{-1}(F\beta_1)_* : H^n(FI_1) \xrightarrow{\sim} H^n(FI_2)$$

für alle n .

Wir zeigen, dass diese nicht von den Wahlen abhängen: Ist $I_2 \oplus_A I_3 \xrightarrow{\varphi_4} I_4$ ein anderer Morphismus wie in 6.9, so erhalten wir ein analoges Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow I_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & I_2 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ I_1 \hookrightarrow I_1 \oplus_A I_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & I_1 \oplus_A I_2 \\ & \searrow \gamma_1 & \searrow \gamma_2 \\ & & I_4 \end{array}$$

Andererseits finden wir auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & I_4 & \\
 \varphi_4 \nearrow & & \searrow \psi_4 \\
 I_1 \oplus_A I_2 & & I_4 \\
 \varphi_3 \searrow & & \nearrow \psi_3 \\
 & I_3 &
 \end{array}$$

von Quasiisomorphismen, wobei I_4 injektive Komponenten hat (dieselbe Konstruktion wie für (6.10.1)). Dann sind ψ_3 und ψ_4 Homotopieäquivalenzen, und man erhält, dass in der Kategorie $K(\mathcal{A})$ der Komplex modulo Homotopie gilt:

$$\beta_2^{-1}\beta_1 = \gamma_2^{-1}\gamma_1.$$

Es gilt nämlich $\beta_1 = \varphi_3\alpha_1, \beta_2 = \varphi_3\alpha_2, \gamma_1 = \varphi_4\alpha_1, \gamma_2 = \varphi_4\alpha_2$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 \psi_3\beta_2 &= \psi_3\varphi_3\alpha_2 = \psi_4\varphi_4\alpha_2 = \psi_4\gamma_2 \\
 \psi_3\beta_1 &= \psi_3\varphi_3\alpha_1 = \psi_4\varphi_4\alpha_1 = \psi_4\gamma_1
 \end{aligned}$$

und damit

$$\beta_2^{-1}\beta_1 = \gamma_2^{-1}\psi_4^{-1}\psi_3\psi_3^{-1}\psi_4\gamma_1 = \gamma_2^{-1}\gamma_1.$$

Damit gilt also auch

$$H^i(\beta_2^{-1})H^i(\beta_1) = H^i(\gamma_2^{-1})H^i(\gamma_1)$$

wie behauptet.

To be continued.

7 Der étale Situs

Definition 7.1 (a) Eine Klasse E von Morphismen von Schemata heiße **zulässig**, wenn gilt

(M1) Alle Isomorphismen sind in E ,

(M2) E ist abgeschlossen unter Kompositionen (sind $\varphi : Y \rightarrow X$ und $\psi : Z \rightarrow Y$ in E , so auch $\psi \circ \varphi : Z \rightarrow X$),

(M3) E ist abgeschlossen unter Basiswechsel (Ist $\varphi : Y \rightarrow X$ in E und $\psi : X' \rightarrow X$ ein beliebiger Morphismus, so ist der Basiswechsel $\varphi' : Y' = Y \times_X X' \rightarrow X'$ in E).

(b) Sei E zulässig. Eine E -Überdeckung $(U_i \xrightarrow{g_i} X)_{i \in I}$ eines Schemas X ist eine Familie von E -Morphismen (Morphismen in E) mit $\bigcup_i g_i(U_i) = X$.

Beispiele 7.2 Wichtige Beispiele von zulässigen Klassen sind

(a) die Klasse (Zar) aller offenen Immersionen,

(b) die Klasse (t) aller étalen Morphismen,

(c) die Klasse (fl) aller flachen Morphismen, die lokal von endlichen Typ sind.

Bemerkung 7.3 Sind die betrachteten Schemata nicht lokal noethersch, so sollte man "von endlichem Typ" durch "von endlicher Präsentation" ersetzen, auch in der folgenden Erinnerung.

Erinnerung 7.4 ('Kohomologie von Schemata', §3, §4) (a) Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ von Schemata heißt **unverzweigt**, wenn er die folgenden quivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) f ist lokal von endlichem Typ, und für alle $y \in Y$ ist $k(y)/k(x)$ eine endliche separable Körpererweiterung, $x = f(y) \in X$.

(ii) f ist lokal von endlichem Typ, und $\Omega_{Y/X}^1 = 0$.

(iii) f ist lokal von endlichem Typ, und die Diagonale $\Delta_{Y/X} : Y \hookrightarrow Y \times_X Y$ ist eine offene Immersion.

(iv) f ist lokal von endlichem Typ und formal unverzweigt.

(b) Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ heißt **tale**, wenn er die folgenden quivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) f ist flach und unverzweigt,

(ii) f ist lokal von endlichem Typ und formal tale.

Lemma/Definition 7.5 (a) Sei \mathcal{C} eine Kategorie von Schemata und E eine zulässige Klasse von Morphismen. Dann bildet \mathcal{C} mit den E -berdeckungen einen Situs, der mit \mathcal{C}_E bezeichnet wird.

(b) Der **kleine E -Situs** eines Schemas X besteht aus allen X -Schemata $Y \rightarrow X$, deren Strukturmorphismus $Y \rightarrow X$ in E liegt, zusammen mit den E -berdeckungen, und wird mit X_E bezeichnet.

Definition 7.6 Dies definiert insbesondere den kleinen étalen Situs $X_{\text{t}}$ eines Schemas X . Unter einer étalen Garbe auf X versteht man im Allgemeinen eine Garbe F auf dem kleinen Situs $X_{\text{t}}$ und ihre tale Kohomologie ist

$$X_{\text{t}}^i(X, F) := H^i(X_{\text{t}}, F)$$

die in Definition 5.3 definierte Kohomologie auf diesem Situs.

Bemerkung 7.7 Nach Koho, Proposition 3.10 sind alle Morphismen in $X_{\text{ét}}$ étale: Ist

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ & \searrow \varphi_1 & \swarrow \varphi_2 \\ & X & \end{array}$$

ein Morphismus von étalen X -Schemata (d.h., ein kommutatives Diagramm mit étalen φ_1 und φ_2), so ist f étale.

Lemma/Definition 7.8 Seien E und E' zwei zulässige Klassen von Morphismen. Ein Morphismus

$$f : X' \rightarrow X$$

von Schemata definiert einen Morphismus von Siten

$$f : X'_{E'} \rightarrow X_E$$

vermöge

$$f^0 : X_E \rightarrow X_{E'} \\ V \mapsto V \times_X X',$$

falls für $V_1 \rightarrow V_2$ in X_E der Basiswechsel $V_1 \times_X X' \rightarrow V_2 \times_X X'$ in E' ist. In diesem Fall erhalten wir Funktoren

$$\begin{aligned} f_P &: Pr(X'_E) \rightarrow Pr(X_E) \\ f^P &: Pr(X_E) \rightarrow Pr(X'_{E'}) \\ f_* &: Sh(X'_{E'}) \rightarrow Sh(X_E) \\ f^* &: Sh(X_E) \rightarrow Sh(X'_{E'}), \end{aligned}$$

wobei f^P linksadjungiert zu f_P und f^* linksadjungiert zu f_* ist. Die Funktoren f_P, f^P und f^* sind exakt, der Funktor f_* ist linksexakt.

Diese Situation liegt insbesondere für $E' = E$ vor, also insbesondere für $E' = E = \text{ét}$. Wir haben also adjungierte Paare

$$\begin{aligned} f_P &: Pr(X') \rightarrow Pr(X) & f^P &: Pr(X) \rightarrow Pr(X'), \\ f_* &: Sh(X'_{\text{ét}}) \rightarrow Sh(X_{\text{ét}}), & f^* &: Sh(X_{\text{ét}}) \rightarrow Sh(X'_{\text{ét}}), \end{aligned}$$

wobei f_* linksexakt ist und die anderen Funktoren exakt.

Beweis der Behauptungen: f^0 definiert einen Morphismus von Siten: Ist $Y \rightarrow X$ in X_E (also ein E -Morphismus) und $(U_i \rightarrow Y)$ eine E -Überdeckung (also eine surjektive Familie von E -Morphismen), so ist nach Voraussetzung $Y \times_X X' \rightarrow X'$ in $X'_{E'}$; weiter ist

$$(U_i \times_X X' \rightarrow Y \times_X X')$$

eine E -Überdeckung: die Morphismen sind nach Voraussetzung E' -Morphismen, und für *jede* surjektive Familie

$$(Y_i \xrightarrow{\pi_i} Y)$$

von Schema-Morphismen und *jeden* Schema-Morphismus $X' \rightarrow X$ ist

$$(Y_i \times_X X' \xrightarrow{\pi'_i} Y \times_X X' =: Y')$$

wieder eine surjektive Familie: Ist $y' \in Y'$ mit Bild y in Y , so gibt es ein i für das $\pi_i^{-1}(y) = (Y_i)_y = Y_i \times_Y k(y)$ nicht-leer ist. Dann ist auch $(\pi'_i)^{-1}(y') = (Y_i \times_X X') \times_{Y \times_X X'} y' = Y_i \times_Y y' = (Y_i \times_Y y) \times_y k(y') = (Y_i \times_Y k(y)) \times_{k(y)} k(y') \neq \emptyset$. Dies zeigt Eigenschaft (S1) aus 2.7 für f^0 . Weiter ist für jedes $Z \rightarrow X$ in X_E und jeden X -Morphismus $Z \rightarrow Y$ (also jeden Morphismus in X_E) der kanonische Morphismus

$$(U_i \times_Y Z) \times_X X' \rightarrow (U_i \times_X X') \times_{Y \times_X X'} (Z \times_X X')$$

ein Isomorphismus. Dies zeigt 2.7 (S2).

Die Exaktheitsbehauptungen folgen aus Satz 4.4, da in X_E und $X'_{E'}$ Faserprodukte und damit endliche Limiten existieren.

Definition 7.9 Sei X ein Schema.

(a) Ein geometrischer Punkt von X ist ein Morphismus

$$i_{\bar{x}} : \bar{x} = \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X,$$

wobei Ω ein separabler abgeschlossener (z.B. ein algebraisch abgeschlossener) Körper ist. Ist $x = i_{\bar{x}}(\bar{x}) \in X$, so sprechen wir auch von einem geometrischen Punkt über X .

(b) Für eine étale Prägarbe P auf X und einen geometrischen Punkt wie oben heißt

$$P_{\bar{x}} := (i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) \in \underline{Ab}$$

der Halm von P bei \bar{x} .

Bemerkung 7.10 Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(X_{\text{ét}}) & \rightarrow & \underline{AB} \\ P & \mapsto & P_{\bar{x}} \end{array}$$

ist exakt. Denn nach 7.8 ist $i_{\bar{x}}^P : X_{\text{ét}} \rightarrow \bar{x}_{\text{ét}}$ exakt. Weiter ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(\underline{x}_{\text{ét}}) & \rightarrow & \underline{Ab} \\ Q & \mapsto & Q(\underline{x}) \end{array}$$

exakt.

Definition 7.11 Sei $F \in S(X_{\text{ét}})$, $s \in F(X)$, und \bar{x} ein geometrischer Punkt.

(a) Das Bild von s unter $F(X) \rightarrow F_{\bar{x}}$ wird mit $s_{\bar{x}}$ bezeichnet und heißt der Keim von s bei \bar{x} .

(b) Ist $U \rightarrow X$ étale, so gibt es im allgemeinen keine kanonische Abbildung $F(U) \rightarrow F_{\bar{x}}$, aber jeder Lift von $\bar{x} \rightarrow X$ zu U definiert eine solche, und wir bezeichnen das Bild von $s \in F(U)$ in $F_{\bar{x}}$ wieder mit $s_{\bar{x}}$ (Offenbar existiert immer ein Lift, wenn es einen Punkt $u \in U$ gibt, der auf das Bild $x \in X$ von $\bar{x} \rightarrow X$ abgebildet wird).

Definition 7.12 Eine **étale Umgebung** eines geometrischen Punktes $\bar{x} \rightarrow X$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \downarrow \text{étale} \\ & & X \end{array}$$

Ein Morphismus von étalen Umgebungen ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & U_1 \\ & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & \longrightarrow & U_2 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

wobei U_2 und U_1 étale über X sind.

Bemerkung 7.13 Ein kommutatives Diagramm am Schemata

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

entspricht einem X' -Morphismus $X' \rightarrow Y \times_X X'$, d.h., einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y \times_X X' \\ & \searrow \text{id} & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & X' \end{array}$$

bzw. einem Schnitt von $\text{pr}_2 : Y \times_X X' \rightarrow X'$ (Kurz ausgedrückt ist $\text{Hom}_X(X', Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{X'}(X', Y \times_X X')$). Dies zeigt, dass eine étale Umgebung von $\bar{x} \rightarrow X$ sich mit einem Morphismus

$$\bar{x} \rightarrow U \times_X \bar{x}$$

in $\bar{x}_{\text{ét}}$ identifiziert, wobei $U \rightarrow X$ étale ist, also einem Objekt in der Kategorie $I_{\bar{x}}$ für den Morphismus von Siten $\bar{x}_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$, $U \mapsto U \times_X \bar{x}$ (siehe 7.8), der für die Definition von $i_{\bar{x}}^P$ verwendet wird. Weiter entsprechen auch die Morphismen étaler Umgebungen von $\bar{x} \rightarrow X$ den Morphismen in $I_{\bar{x}}$, nämlich den X -Morphismen $U_1 \rightarrow U_2$, für die

$$\begin{array}{ccc} & & U_1 \times_X \bar{x} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & \longrightarrow & U_2 \times_X \bar{x} \end{array}$$

kommutativ ist. Zusammen mit der Definition von $i_{\bar{x}}^P$ folgt, dass für eine étale Prägarbe P auf X gilt:

$$(7.13.1) \quad P_{\bar{x}} = \lim_{\rightarrow} P(U)$$

wobei der induktive Limes über alle étalen Umgebungen von $\bar{x} \rightarrow X$ läuft.

Lemma 7.14 (a) Ist $U \rightarrow X$ étale und $s \in F(U)$ nicht-trivial, so gibt es einen geometrischen Punkt \bar{x} von U mit $s_{\bar{x}} \neq 0$ in $F_{\bar{x}}$.

(b) Insbesondere gilt: $F = 0 \Leftrightarrow F_{\bar{x}} = 0$ für alle geometrischen Punkte \bar{x} von X .

Beweis (a): Gibt es keine solchen geometrischen Punkte, so besitzt jeder Punkt $u \in U$ eine étale Umgebung $V_u \rightarrow U$ mit $s|_{V_u} = 0$, und mit der Separiertheit von F folgt $s = 0$ (die V_u überdecken U).

(b) ist klar hieraus.

Lemma 7.15 Sei $f : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ ein Morphismus von Siten. Bildet f^P Garben auf Garben ab, so ist kanonisch $f^P a = a f^P$ (präziser: $f^P i a = i a f^P$ für die Einbettungen $i : Sh(\mathcal{S}) \rightarrow Pr(\mathcal{S})$ und $i : Sh(\mathcal{S}') \rightarrow Pr(\mathcal{S}')$).

Beweis: Sei P eine Prägarbe auf \mathcal{S} und F Garbe auf \mathcal{S}' . Dann haben wir Isomorphismen

$$\begin{aligned} Hom_{Pr(\mathcal{S}')} (f^P i a P, i F) &\cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (i a P, f_P i F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (i a P, i f_* F) \\ &\cong Hom_{Sh(\mathcal{S})} (a P, f_* F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (P, i f_* F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (P, f_P i F) \\ &\cong Hom_{Pr(\mathcal{S}')} (f^P P, i F) \cong Hom_{Sh(\mathcal{S}')} (a f^P P, F) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung: Nach Voraussetzung ist $f^P i a P = i G$ für eine Garbe G , und die erste Gruppe ist isomorph zu $Hom_{Sh(\mathcal{S}')} (G, F)$. Mit dem Yoneda-Lemma folgt $G \cong a f^P P$, also $f^P i a P \cong i a f^P P$.

Corollar 7.16 Für eine étale Prägarbe P auf X und einen geometrischen Punkt \bar{x} von X ist $P_{\bar{x}} = (a P)_{\bar{x}}$.

Beweis: Für $i_{\bar{x}} : \bar{x} \rightarrow X$ gilt $P_{\bar{x}} = (i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) = (a i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) \stackrel{7.15}{=} (i_{\bar{x}}^P a P)(\bar{x}) \stackrel{\text{Def.}}{=} (a P)_{\bar{x}}$, denn $i_{\bar{x}}^P$ führt Garben in Garben über: Für eine Garbe F auf X gilt

$$(i_{\bar{x}}^P F)(\coprod_{i \in I} \bar{x}) = \prod_{i \in I} (i_{\bar{x}}^P F)(\bar{x}),$$

denn für ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V = \coprod_{i \in I} \bar{x} & \xrightarrow{(f_i)} & U \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

existiert die Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} & & \coprod_{i \in I} U \\ & \nearrow \coprod_i f_i & \downarrow \\ V = \coprod_{i \in I} \bar{x} & \longrightarrow & U, \end{array}$$

d.h., die oben stehenden Morphismen sind kofinal in der Kategorie I_V , und wir können für $(f^P F)(V)$ den Limes über diese bilden; weiter ist $F(\coprod_i U_i) = \prod_i F(U_i)$.

8 Der étale Situs eines Körpers; Überlagerungen

Der folgende Satz ist Grothendieck's Version der (unendlichen) Galoistheorie.

Satz 8.1 Sei k ein Körper, k_s ein separabler Abschluss von k und $G_k := Gal(k_s/k)$ die absolute Galoisgruppe von k . Dann ist der Funktor

$$\begin{aligned} \phi = Hom_k(\text{Spec } k_s, -) : \text{Spec}, (k)_{\text{ét}} &\rightarrow \mathcal{C}(G_k) = \text{Kategorie der diskreten } G_k\text{-Mengen} \\ Y &\mapsto \phi(Y) := Y(k_s) := Hom_k(\text{Spec } k_s, Y) \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Siten, wobei die Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{C}(G_k)$ durch die surjektiven Familien $(M_i \rightarrow M)_i$ gegeben ist.

Bemerkung 8.2 (a) Mit der Krull-Topologie (Umgebungsbasis der 1 aus den Untergruppen $Gal(k_s/L)$, für L/k endlich) ist G_k eine pro-endliche Gruppe:

$$G_k = \varprojlim_{L/k \text{ endl. gal., } L \subseteq k_s} Gal(L/k).$$

(b) G_k operiert von rechts auf $\text{Spec } k_s$, daher von links auf $\phi(Y)$.

(c) Eine G_k -Menge M heißt diskret, wenn für jedes $m \in M$ der Stabilisator $Stab(m) := \{g \in G_k \mid gm = m\}$ offen (und damit von endlichem Index) in G_k ist.

Wir benutzen (siehe Koh. Sch., Satz 3.8)

Lemma 8.3 Ist $Y \rightarrow \text{Spec}(k)$ étale, so ist $Y = \coprod_{i \in I} \text{Spec}(L_i)$, wobei L_i/k endliche separable Körpererweiterungen sind. Ist Y von endlichem Typ über k , so ist I endlich.

Beweis: Für die zweite Behauptung siehe loc. cit.. Allgemein besitzt also jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $U = \coprod_{i=1}^r \text{Spec}(L_i)$. Dies zeigt, dass jeder Punkt offen ist, also dass Y die diskrete Topologie trägt. Zusammen folgt die erste Behauptung.

Beweis von Satz 8.1: 1) Ein Umkehrfunktor zu ϕ ist der Funktor

$$\psi : M = \coprod_{j \in J} M_j \mapsto \coprod_{j \in J} \text{Spec}(Hom_{G_k}(M_j, k_s)).$$

Hierbei sei M_j zusammenhängend, d.h., G_k operiere transitiv auf M_j , und $Hom_{G_k}(M_j, k_s)$ wird zur k -Algebra durch die k Algebrenstruktur von k_s . Offenbar ist jede zusammenhängende diskrete G_k -Menge von der Form G_k/U mit $U \leq G_k$ offen, und die Zuordnung ist

$$G_k/U \mapsto \text{Spec}(k_s^U).$$

ψ ist quasi-invers zu ϕ : Es genügt, dies für zusammenhängende G_k -Mengen bzw. für endliche separable Körpererweiterungen zu prüfen. Sei also M zusammenhängend diskrete G_k -Menge, ohne Einschränkung $M = G_k/U$ für eine offene Untergruppe $U \subseteq G_k$. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(M) = Hom_{G_k}(G_k/U, k_s) &\xrightarrow{\sim} k_s^U =: L \subseteq k_s \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

ein Algebrenisomorphismus. Umgekehrt ist

$$\phi(\mathrm{Spec}(L)) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k_s), \mathrm{Spec}(L)) \cong \mathrm{Hom}_k(L, k_s) \cong G_k/U,$$

ein Isomorphismus von diskreten G_k -Mengen, indem die Einbettung $L \hookrightarrow k_s$ auf $1 \in G_k$ abgebildet wird.

Wir erhalten also eine Kategorienäquivalenz zwischen étalen k -Schemata Y und diskreten G_k -Mengen, durch Wahl einer k -Einbettung $L \hookrightarrow k_s$ für jede endliche separable Körpererweiterung L/k . Aus den folgenden beiden Tatsachen folgt, dass ϕ auch eine Äquivalenz von Sites ist:

2) Es gilt $\phi(Y' \times_Y Y'') = (Y' \times_Y Y'')(k_s) = Y'(K_s) \times_{Y(k_s)} Y''(k_s)$

3) Ist $\mathrm{Spec} L' \rightarrow \mathrm{Spec} L$ étale, so ist $L \subseteq L'$ eine separable Körpererweiterung von k in k_s und die Abbildung $\mathrm{Hom}_k(L'k_s) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ ist surjektiv, wie aus der Algebra bekannt ist.

Corollar 8.4 Es gibt eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(\mathrm{Spec}(k)_{\mathrm{ét}}) & \xrightarrow{\sim} & (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}), \\ F & \mapsto & F_{\bar{x}} \end{array}$$

wobei $F_{\bar{x}}$ der Halm im geometrischen Punkt $\bar{x} = \mathrm{Spec}(k_s) \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ ist.

Beweis: Wir zeigen eine allgemeinere Tatsache.

Definition 8.5 Für einen Situs $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ sei $(\mathcal{X}, \mathcal{T})^\sim$ die Kategorie der Garben von Mengen auf \mathcal{S} ; dies heißt auch der **Topos** zu \mathcal{S} .

Satz 8.6 Für einen Körper k ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Spec}(k)_{\mathrm{ét}})^\sim & \xrightarrow{\sim} & (\text{diskrete } G_k\text{-Mengen}), \\ F & \mapsto & F_{\bar{x}} \end{array}$$

eine Kategorienäquivalenz.

Hieraus folgt Corollar 8.4, weil sich unter 8.6 offenbar die abelschen Garben und die diskreten G_k -Moduln entsprechen (als die abelschen Gruppenobjekte in diesen Kategorien).

Beweis von Satz 8.6: Wir haben funktorielle Isomorphismen für jede Garbe F auf $\mathrm{Spec}(k)_{\mathrm{ét}}$:

$$F_{\bar{x}} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \subseteq L \subseteq k_s \\ L/k \text{ endl. separabel}}} F(\mathrm{Spec}(L)).$$

Da die Kategorienäquivalenz aus Satz 8.1

$$\mathrm{Spec}(L) \mapsto G_k/U$$

mit $U = \mathrm{Gal}(k_s/L) \leq G_k$ zuordnet, und die $k \subseteq L \subseteq k_s$ wie oben allen offenen Untergruppen $U \leq G_k$ entsprechen, folgt die Behauptung aus dem folgenden Satz.

Satz 8.7 (a) Sei G eine Gruppe und $\mathcal{M}(G)$ die Kategorie der linken G -Mengen. Dann bilden die surjektiven Familien $(M_i \rightarrow M)$ von G -Mengen eine Grothendieck-Topologie \mathcal{T}_G auf $\mathcal{M}(G)$, die sogenannte kanonische Topologie. Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} \Phi : (\mathcal{M}(G), \mathcal{T}_G)^\sim & \rightarrow & \mathcal{M}(G) \\ F & \mapsto & F(G) \end{array}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit Quasi-Inversem

$$\text{Hom}_G(-, M) \xrightarrow{\Psi} M.$$

(b) Sei G eine pro-endliche Gruppe (d.h., ein projektiver Limes von endlichen Gruppen, versehen mit der pro-endlichen Topologie) und sei $\mathcal{C}(G)$ die Kategorie der stetigen G -Mengen (bezüglich der diskreten Topologie auf diesen Mengen). Dann bilden die surjektiven Familien $(M_i \rightarrow M)$ von diskreten G -Mengen eine Grothendieck-Topologie, die sogenannte kanonische Topologie, die wieder mit \mathcal{T}_G bezeichnet sei. Der Funktor

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathcal{C}(G), \mathcal{T}_G)^\sim &\rightarrow \mathcal{C}(G) \\ F &\mapsto F(G) := \varprojlim_{U \leq G \text{ offen}} F(G/U) \end{aligned}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit Quasi-Inversem

$$\text{Hom}_G(-, M) \xrightarrow{\Psi} M$$

Beweis (a) Sei G eine diskrete Gruppe.

(i) $F(G)$ wird wie folgt eine Links- G -Menge: für $g \in G$ ist die Rechtstranslation mit g

$$\begin{aligned} R_g : G &\rightarrow G \\ g' &\mapsto g'g \end{aligned}$$

ein Morphismus von Links- G -Mengen und wir definieren eine Links- G -Operation auf $F(G)$ durch

$$gx = F(Rg)(x)$$

[$F(R_{gg'}) = F(R_{g'} \circ R_g) = F(R_g) \circ F(R_{g'})$, da F kontravariant ist]. Die Zuordnung $F \mapsto F(G)$ ist dabei offenbar funktoriell.

(ii) F_M ist eine Garbe: leicht

(iii) Wir haben einen funktoriellen Isomorphismus $M_{F_M} \xrightarrow{\sim} M$, da die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(G, M) &\xrightarrow{\sim} M \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

eine Bijektion von G -Mengen ist: $gf \mapsto gf(1) = f(1 \cdot g) = f(g) = g \cdot f(g)$.

(iv) Wir haben einen funktoriellen Isomorphismus $F_{M_F} \xrightarrow{\sim} F$, d.h.,

$$\text{Hom}_G(N, F(G)) \xrightarrow{\sim} F(N),$$

denn für $N = \coprod_{i \in I} N_i$ ist $F(N) = \prod_{i \in I} F(N_i)$; durch Betrachtung der Bahnen ist also o.E. $N = G/U$ für $U \subset G$ Untergruppe. Wir betrachten die Garbenbedingung für die Überdeckung $G \rightarrow G/U$. Wir haben eine Bijektion von G -Mengen

$$\begin{aligned} \coprod_{u \in U} G &\rightarrow G \times_{G/U} G \\ g_u &\mapsto (g, gu); \end{aligned}$$

daher ist

$$\begin{aligned} F(G/U) \rightarrow F(G) &\cong F(G \times_{G/U} G) \xrightarrow{\sim} \prod_{u \in U} F(G) \\ f &\cong (\dots, f, \dots) \\ &(\dots, uf, \dots)_{u \in U} \end{aligned}$$

exakt, also kanonisch

$$F(G/U) \xrightarrow{\sim} F(G)^U = \{f \in F(G), uf = f \text{ für alle } u \in U\} \cong \text{Hom}_G(G/U, F(G)) \\ \varphi(U) \leftarrow \varphi$$

wie gewünscht.

2. Fall Sei G pro-endlich.

(i) Es ist

$$M_F = \varinjlim_{\substack{U \trianglelefteq G \text{ offener} \\ \text{Normalteiler}}} F(G/U),$$

und dies wird ein diskreter G -Modul, da nach dem 1. Fall $F(G/U)$ ein G/U -Modul ist.

(ii) Es folgt auch wieder leicht, dass F_M eine Garbe ist.

(iii) Für M in T_G ist

$$\varinjlim_{V \leq G \text{ offen}} \text{Hom}_G(G/U, M) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{V \leq G \text{ offen}} M^U \xrightarrow{\sim} M.$$

(iv) Nach dem 1. Fall ist weiter für jede offene Untergruppe $U < G$ und jeden Normalteiler $U' \trianglelefteq G$ mit $U' \subseteq U$

$$F(G/U) \xrightarrow{\sim} \{f \in F(G/U') \mid \bar{u}f = f \text{ für alle } \bar{u} \in U/U'\},$$

also insgesamt

$$F(G/U) \cong (M_F)^U,$$

und wie oben folgt

$$\text{Hom}_G(N, M_F) \xrightarrow{\sim} F(N)$$

(jede Bahn ist isomorph zu G/U für U offene Untergruppe in G).

Bemerkung 8.8 Aus 8.1 und (dem Beweis von) 8.4 folgt: Wir haben eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{aligned} \text{Sh}(\text{Spec}(k)_{\text{ét}}) &\rightarrow \mathcal{C}(G_k) = (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}) \\ F &\mapsto F_{\bar{x}} \end{aligned}$$

mit Quasi-Inversem

$$M \mapsto F \text{ mit } F(\text{Spec}(L)) = M^{G_L} \text{ für } L/K \text{ endlich separabel.}$$

Corollar 8.9 Sei k ein Körper mit separablem Abschluss k_s , und sei $G_k = \text{Gal}(k_s/k)$ die absolute Galoisgruppe von k und $\bar{x} : \text{Spec}(k_s) \rightarrow \text{Spec}(k)$. Dann gibt es funktorielle Isomorphismen für alle étalen abelschen Garben F auf $\text{Spec}(k)$ und alle $i \geq 0$

$$H_{\text{ét}}^i(\text{Spec}(k), F) \xrightarrow{\sim} H^i(G_k, F_{\bar{x}}),$$

verträglich mit langen exakten Kohomologiesequenzen.

Beweis Dies folgt aus der Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h(\mathrm{Spec}(k)_{\acute{e}t}) & \rightarrow & \mathcal{C}(G_k) = (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}) \\ F & \mapsto & F_{\bar{x}} \end{array}$$

und den folgenden beiden Tatsachen:

(i) Es gibt kanonische funktorielle Isomorphismen (siehe 8.8)

$$F(k) := F(\mathrm{Spec}(k)) \xrightarrow{\sim} F_{\bar{x}}^{G_k}.$$

(ii) $H^i(G_k, -)$ ist der i -te rechtsabgeleitete Funktor von

$$M \mapsto H^0(G_k, M) = M^{G_k}$$

(siehe Algebra II).

Étale Kohomologie von Körpern ist also Galoiskohomologie.

9 Henselsche Ringe

Die Henselschen Ringe und insbesondere die strikt Henselschen Ringe spielen in der étalen Topologie die Rolle, die in der Zariski-Topologie die üblichen lokalen Ringe spielen.

Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$.

Lemma/Definition 9.1 Sei x der abgeschlossene Punkt von $X = \text{Spec}(A)$.

A heißt Henselsch, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

(a) Ist $f \in A[X]$ normiert und $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$ mit $g_0, h_0 \in k[X]$ normiert und koprim (d.h., $\langle g_0, h_0 \rangle = k[X]$), so gibt es normierte Polynome $g, h \in A[X]$ mit $f = g \cdot h$, $\bar{g} = g_0$ und $\bar{h} = h_0$ (Hierbei sei $\bar{f} = f \bmod \mathfrak{m}$ in $k[X]$; entsprechend für g und h). Die Polynome g, h sind strikt koprim (d.h., $\langle g, h \rangle = A[X]$).

(a') Ist $f \in A[X]$ und $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$ mit g_0 normiert und g_0 und h_0 koprim, so gibt es $g, h \in A[X]$ mit g normiert, $\bar{g} = g_0$ und $\bar{h} = h_0$.

(b) Jede endliche A -Algebra ist direktes Produkt von lokalen Ringen B_i .

(b') Ist B endliche A -Algebra, so lässt sich jedes Idempotente $e_0 \in B/\mathfrak{m}B$ (d.h., $e_0^2 = e_0$) zu einem Idempotenten $e \in B$ liften.

(c) Ist $f : Y \rightarrow X$ quasi-endlich (siehe unten) und separiert, so ist

$$Y = Y_0 \amalg Y_1 \amalg \dots \amalg Y_r,$$

wobei gilt: $x_0 \notin f(X_0)$ und für $i \geq 1$ ist Y_i endlich über X und $Y_i = \text{Spec}(B_i)$ für einen lokalen Ring B_i .

(d) Ist $f : Y \rightarrow X$ étale und hat Y einen Punkt y mit $f(y) = x$ und $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$, so hat f einen Schnitt $s : X \rightarrow Y$ (d.h., $fs = id_X$).

(d') Seien $f_1, \dots, f_n \in A[X_1, \dots, X_n]$ und sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ mit $\bar{f}_i(a) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\det(\partial \bar{f}_i / \partial x_j(a)) \neq 0$. Dann existiert ein $b \in A^n$ mit $\bar{b} = a$ und $f_i(b) = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Definition 9.2 Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ von Schemata heißt quasi-endlich, wenn er endlich präsentiert (bei noetherschen Schemata: von endlichem Typ) ist und endliche Fasern hat ($f^{-1}(x)$ ist endlich für alle $x \in X$).

Ist f étale und endlich präsentiert/von endlichem Typ, so ist f quasi-endlich.

Beweis der Äquivalenz in 9.1:

(a') \Rightarrow (a) ist trivial, bis auf den Zusatz in (a). Ist f aber normiert, so ist $A[x]/\langle f \rangle$ endlich über A . Wegen $f \in \langle g, h \rangle$, d.h., $\langle f \rangle \subseteq \langle g, h \rangle$ ist also auch $D = A[X]/\langle g, h \rangle$ endlich über A , und nach dem Nakayama-Lemma ist $D = 0$, da $D/\mathfrak{m}D = k[x]/\langle g_0, h_0 \rangle = 0$.

(a) \Rightarrow (b): Sei B eine endlich A -Algebra. Nach dem going-up-Theorem (Alg. Geo. I, Satz 6.4) liegt jedes maximale Ideal von B über \mathfrak{m} ; also ist B genau dann lokal, wenn $B/\mathfrak{m}B$ lokal ist.

Spezialfall: Sei $B = A[X]/\langle f \rangle$ mit einem normierten Polynom f .

Ist \bar{f} eine Potenz eines irreduziblen Polynoms, so ist $B/\mathfrak{m}B = k[X]/\langle\bar{f}\rangle$ lokal, also B lokal. Andernfalls erhalten wir nach (a), dass $f = g \cdot h$ mit g, h normiert mit $\text{Grad} \geq 1$ und strikt koprim, und mit dem chinesischen Restsatz folgt

$$B = A[X]/\langle f \rangle \cong A/\langle g \rangle \times A/\langle h \rangle.$$

Durch Induktion über die Anzahl der Primfaktoren von \bar{f} folgt die Behauptung.

Allgemeiner Fall: Angenommen, B ist nicht lokal. Dann existiert ein $b \in B$, so dass \bar{b} ein nicht-triviales Idempotentes in $B/\mathfrak{m}B$ ist ($B/\mathfrak{m}B$ ist eine Artinsche k -Algebra, also ein Produkt von lokalen Ringen). Da b ganz über A ist, gibt es ein normiertes Polynom $f \in A[X]$ mit $f(b) = 0$. Wir haben dann einen Ringhomomorphismus (durch Einsetzen von b)

$$\varphi : C = A[X]/\langle f \rangle \rightarrow B \quad , \quad X \mapsto b.$$

Betrachte die Reduktion mod \mathfrak{m}

$$\bar{\varphi} : C/\mathfrak{m}C = k[X]/\langle\bar{f}\rangle \rightarrow B/\mathfrak{m}B.$$

Ist $\bar{f} = \prod_i p_i^{n_i}$ mit irreduziblen Polynomen p_i , so ist

$$k[X]/\langle\bar{f}\rangle \cong \prod_i k[X]/\langle p_i^{n_i} \rangle$$

und für den Quotienten im $(\bar{\varphi})$ gilt

$$\text{im}(\bar{\varphi}) = k[X]/\langle g_0 \rangle = \prod_i k[X]/\langle p_i^{m_i} \rangle$$

mit $g_0 = \prod_i p_i^{m_i} \mid \bar{f}$. Dies zeigt, dass das Idempotente $\bar{b} \in \text{im}(\bar{\varphi})$ zu einem Idempotenten $\bar{e} \in C/\mathfrak{m}C$ liftet (die Zerlegungen sind eindeutig). Nach dem ersten Fall existiert also ein Idempotentes $e \in C$ mit $e \bmod \mathfrak{m} = \bar{e}$, also $\bar{\varphi}(e) = \bar{b}$. Daher ist $\varphi(e)$ ein nicht-triviales Idempotentes in B .

Dies liefert eine Ringzerlegung $B = Be \times B(1 - e)$ in zwei nicht-triviale Ringe, und induktiv über die (endliche) Anzahl der Komponenten von $B/\mathfrak{m}B$ folgt die Behauptung.

Beachte: Es gibt eine bijektive Entsprechung für kommutative Ringe mit Eins R :

Zerlegung in ein Produkt	Idempotente
$R = R_1 \times R_2$	$\mapsto (1, 0) \text{ und } (0, 1)$
$R = Re \times R(1 - e)$	$\leftarrow e \text{ und } 1 - e$

(Beachte: e Idempotentes $\Rightarrow 1 - e$ Idempotentes).

Dies zeigt auch (b) \Leftrightarrow (b').

(b) \Rightarrow (c): Wir benötigen:

Satz 9.3 (Stein-Faktorisierung/Zariskis Hauptsatz) Sei $f : Y \rightarrow X$ ein quasi-endlicher, separierter Morphismus von Schemata, wobei X quasi-kompakt ist. Dann gibt es eine Faktorisierung

$$f : Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{f'} X,$$

wobei f' endlich und j eine offene Immersion ist.

Beweis: Ohne! Siehe Referenzen in Milne 'Etale Cohomology', Seite 6.

Damit betrachte $f : Y \rightarrow X = \text{Spec}(A)$, quasi-endlich und separiert, mit A wie oben. Sei

$$Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{f'} X$$

wie in Satz 9.3. Da f' affin ist, ist $Y' = \text{Spec}(B')$ affin. Nach (b) ist

$$Y' = \coprod_{i=1}^r Y_i,$$

wobei $Y_i = \text{Spec}(B_i)$ für eine lokale endliche A -Algebra B_i ist. Sei

$$Y_* = \coprod_{i \in I} Y_i$$

das Produkt derjenigen Y_i , deren abgeschlossener Punkt y_i in Y liegt. Dann ist Y_* offen und abgeschlossen in Y' und liegt in Y , denn die kleinste offene Umgebung von $y_i \in Y_i$ ist Y_i . Damit ist Y_* auch offen und abgeschlossen in Y , und es folgt

$$Y = Y_0 \amalg Y_*,$$

wobei $x \notin f(Y_0)$, also (c).

(c) \Rightarrow (d): Sei $f : Y \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ étale und $y \in Y$ mit $f(y) = x$ und $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$. Indem wir Y durch eine affine offene Umgebung von y ersetzen, ist ohne Einschränkung f quasi-endlich und separiert. Nach (c) ist dann ohne Einschränkung $Y = \text{Spec}(B)$ mit B lokal und endlich über A . Da f étale ist, ist

$$B/\mathfrak{m}B = B/\mathfrak{m}_B = k(y) = k(x) = A/\mathfrak{m}.$$

Nach dem Nakayama-Lemma wird B als A -Modul von $1 \in B$ erzeugt. Hieraus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Da B flach über A ist, ist

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_A B \rightarrow A \otimes_A B \xrightarrow{\beta} B \otimes_A B \rightarrow 0$$

exakt. Der Homomorphismus β identifiziert sich mit

$$i_2 : B \rightarrow B \otimes_A B \quad , \quad b \mapsto 1 \otimes b.$$

Dieser ist injektiv, da die Komposition mit $\mu : B \otimes_A B \rightarrow B$, $b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$, die Identität ist. Es folgt $\mathfrak{a} \otimes_A B = 0$, also auch $\mathfrak{a} = 0$, da $A \rightarrow B$ als flacher Homomorphismus lokaler Ringe auch treufach ist (siehe Corollar 10.4 unten). Also ist $A \xrightarrow{\sim} B$ und dies liefert den gewünschten Schnitt.

(d) \Rightarrow (d'): Sei $B = A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ mit $\bar{f}_i(a) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) und $\det(\partial f_i / \partial X_j(a)) \neq 0$ in k . Dann entspricht a einem maximalen Ideal von $(B/\mathfrak{m}B)$ also auch von B ; sei dies mit \mathfrak{n} bezeichnet. Dann ist $\det(\partial f_i / \partial X_j)$ eine Einheit in $B_{\mathfrak{n}}$, also existiert ein $b \in B \setminus \mathfrak{n}$ mit $\det(\partial f_i / \partial X_j)$ Einheit in B_b . Es ist aber

$$B_b \cong A[X_1, \dots, X_n, T]/\langle f_1, \dots, f_n, bT - 1 \rangle$$

und die zugehörige Jacobi-Determinante ist $\det(\partial f_i / \partial X_j) b$, also eine Einheit. Nach dem Jacobi-Kriterium ist B_b étale über A (Koh. Sch., Corollar 4.12 und Bemerkung 4.19). Weiter liefert \mathfrak{n} ein maximales Ideal von B_b über \mathfrak{m} mit Restklassenkörper isomorph zu $k = A/\mathfrak{m}$. Nach (d) existiert also ein Schnitt $s : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B_b)$, d.h., ein A -Homomorphismus $B_b \rightarrow A$ und dies entspricht einem $b \in A^n$ mit $f_i(b) = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

(d') \Rightarrow (a'): Sei $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ und $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$ mit g_0 normiert vom Grad ≥ 1 . Es gilt genau dann

$$f(X) = g(X) \cdot h(X) = (X^r + b_{r-1}X^{r-1} + \dots + b_0)(c_s X^s + \dots + c_0)$$

mit $r + s = n$, wenn $(b_0, \dots, b_{r-1}, c_0, \dots, c_s) \in A^{n+1}$ das folgende Gleichungssystem in den $n + 1$ Variablen $(X_0, \dots, X_{r-1}, Y_0, \dots, Y_s)$ löst:

$$(9.1.1) \quad \begin{aligned} X_0 Y_0 &= a_0 \\ X_0 Y_1 + X_1 Y_0 &= a_1 \\ X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0 &= a_2 \\ &\vdots \\ X_{r-1} Y_s + Y_{s-1} &= a_{n-1} \\ Y_s &= a_n \end{aligned}$$

($n + 1$ Gleichungen). Die zugehörige Jacobische ist

$$J = \det \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} Y_0 & 0 \\ Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_s & \vdots \\ & Y_s & \vdots \\ & & \vdots \end{matrix}}^r & \overbrace{\begin{matrix} X_0 & 0 \\ X_1 & X_0 \\ X_2 & & X_0 \\ \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots \\ \vdots & 1 \end{matrix}}^s \end{pmatrix}$$

Dies ist gerade $\text{Res}(G, H)$, die Resultante von

$$\begin{aligned} G &= x^r + X_{r-1}x^{r-1} + \dots + X_0 \\ H &= Y_s x^s + Y_{s-1}x^{s-1} + \dots + Y_0 \end{aligned}$$

(siehe etwa Bosch 'Algebra', Kap. 4.4). Nach (d') gibt es also eine Lösung von (9.1.1), wenn $\text{Res}(g_0, h_0) \neq 0$ in k (da dann der Vektor (\bar{b}, \bar{c}) der Koeffizienten von g_0 bzw. h_0 das System (9.1.1) modulo \mathfrak{m} löst und $J(\bar{b}, \bar{c}) \neq 0$ ist). Aber nach klassischer Algebra (loc. cit Korollar 8) ist $\text{Res}(g_0, h_0)$ genau dann 0, wenn $\deg(g_0) < r$ und $\deg(h_0) < s$, oder wenn g_0 und h_0 einen gemeinsamen Faktor haben; beides ist nach Voraussetzung nicht der Fall.

Corollar 9.4 Ist A henselsch, so auch jeder lokale Ring B , der endlich über A ist, also insbesondere jeder Faktoring A/J .

Beweis: Dies folgt mit Kriterium 9.1 (b), da eine endliche B -Algebra auch endlich über A ist.

Corollar 9.5 Ist A henselsch, so ist der Funktor

$$B \mapsto B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$$

eine Kategorieäquivalenz

$$\left(\begin{array}{c} \text{endliche étale} \\ A\text{-Algebren} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{c} \text{endliche étale} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right).$$

Insbesondere hat man für den geometrischen Punkt $\bar{x} = \text{Spec}(k_s)$ einen Isomorphismus

$$G_k = \pi_1(\text{Spec}(k), \bar{x}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\text{Spec}(A), \bar{x}).$$

Beweis: Dies folgt mit den Kriterien 9.1(b), (b') und (d). Details: selbst!

Jeder Körper ist ein henselscher Ring, ebenso jeder artinsche Ring (da jeder artinsche Ring Produkt von lokalen Ringen ist). Außerdem gilt:

Proposition 9.6 Jeder vollständige lokale Ring ist henselsch.

Beweis Wir benutzen Kriterium 9.1 (d). Sei B eine étale A -Algebra, und sei $s_0 : B/\mathfrak{m}B \rightarrow k$ ein Schnitt von $k \rightarrow B/\mathfrak{m}B$. Um einen Schnitt

$$s : B \rightarrow A \cong \varprojlim_r A/\mathfrak{m}^r$$

von $A \rightarrow B$ zu finden, genügt es, kompatible A -lineare Abbildungen

$$s_r : B \rightarrow A/\mathfrak{m}^r$$

zu finden. Für $r = 1$ nehmen wir $s_1 : B \xrightarrow{\text{can}} B/\mathfrak{m} \xrightarrow{s_0} A/\mathfrak{m} = k$. Ist nun s_r für ein $r \geq 1$ gefunden, so folgt die Existenz von s_{r+1} aus der formalen Glattheit von B über A (Koh. Sch., Definition 4.2): Im folgenden Diagramm existiert der Lift s_{r+1} von s_r

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s_r} & A/\mathfrak{m}^r \\ \uparrow & \searrow s_{r+1} & \uparrow \varphi_r \\ A & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^{r+1}, \end{array}$$

da $\ker(\varphi_r) = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ ein nilpotentes Ideal ist.

Lemma/Definition 9.7 Sei A ein lokaler Ring. Es gibt einen henselschen Ring A^h mit der folgenden universellen Eigenschaft: Es gibt einen lokalen Homomorphismus $i : A \rightarrow A^h$, und jeder lokale Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ in einem henselschen lokalen Ring B faktorisiert eindeutig über i (es gibt genau einen Homomorphismus $\tilde{\varphi}$, der folgendes Diagramm kommutativ macht):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^h \\ \searrow \varphi & & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & B \end{array}$$

A^h heißt die Henselierung von A .

Zur Konstruktion von A^h benötigen wir

Definition 9.8 Sei A lokal mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Eine étale (bzw. essentiell étale) Umgebung von (A, \mathfrak{m}) ist ein Paar (B, \mathfrak{n}) , so dass B eine étale A -Algebra ist (bzw. eine Lokalisierung einer solchen) und $\mathfrak{n} \subseteq B$ ein Ideal über \mathfrak{m} , so dass die induzierte Abbildung $k = A/\mathfrak{m} \rightarrow B/\mathfrak{n} = k(\mathfrak{n})$ ein Isomorphismus ist (Es folgt, dass \mathfrak{n} ein maximales Ideal ist).

Lemma 9.9 (a) Sind (B, \mathfrak{n}) und (B', \mathfrak{n}') (essentiell) étale Umgebungen von (A, \mathfrak{m}) mit $\text{Spec}(B')$ zusammenhängend, so gibt es höchstens einen A -Homomorphismus $f : B \rightarrow B'$ mit $f^{-1}(\mathfrak{n}') = \mathfrak{n}$.

(b) Sind (B, \mathfrak{n}) und (B', \mathfrak{n}') (essentiell) étale Umgebungen von (A, \mathfrak{m}) , so gibt es eine (essentiell) étale Umgebung (B'', \mathfrak{n}'') von A und A -Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ & \searrow f & \\ & & B'' \\ & \nearrow f' & \\ B' & & \end{array}$$

mit $f^{-1}(\mathfrak{n}'') = \mathfrak{n}$ und $(f')^{-1}(\mathfrak{n}'') = \mathfrak{n}'$.

Beweis: (a) folgt aus dem folgenden allgemeineren Resultat:

Lemma 9.10 Seien $f, g : Y' \rightarrow Y$ Morphismen von X -Schemata, wobei Y' zusammenhängend ist und Y étale und separiert über X ist. Gibt es einen Punkt $y' \in Y'$ mit $f(y') = g(y') = y$ und so dass die von f und g induzierten Abbildungen $k(y) \rightarrow k(y')$ übereinstimmen, so ist $f = g$.

Beweis Seien $\Gamma_f, \Gamma_g : Y' \rightarrow Y' \times_X Y$ die Graphen von f bzw. g ($\Gamma_f = (id_{Y'}, f)$, analog für g). Dies sind Schnitte von $pr_1 : Y' \times_X Y \rightarrow Y'$, und pr_1 ist étale und separiert, als Basiswechsel von $Y \rightarrow X$. Die Voraussetzung impliziert, dass $\Gamma_f(y') = \Gamma_g(y')$ (Man benötigt auch die Bedingung an $k(y) \rightarrow k(y')$, wie das Beispiel $y = Y' = \text{Spec}(k'), k'$ endlich galoisch/ k , $X = \text{Spec } k$, zeigt!). Aus Koh. Sch., Corollar 3.13 folgt nun, dass $\Gamma_f = \Gamma_g$, also die Behauptung, da $f = pr_2 \circ \Gamma_f$ und $g = pr_2 \circ \Gamma_g$.

Für (b) betrachte $B'' = B \otimes_A B'$. Die Homomorphismen $B \rightarrow k(\mathfrak{n}) = k$ und $B' \rightarrow k(\mathfrak{n}') = k$ induzieren einen Homomorphismus $\alpha : B'' \rightarrow k$. Sei $\mathfrak{n}'' = \ker \alpha$, dann leistet (B'', \mathfrak{n}'') das Verlangte.

Hieraus folgt, dass die zusammenhängenden étalen (bzw. essentiell étalen) Umgebungen von A ein induktives System bilden, und wir definieren

$$(A^h, \mathfrak{m}^h) = \varinjlim_{\substack{(B, \mathfrak{n}) \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } (A, \mathfrak{m})}} (B, \mathfrak{n}) = \varinjlim_{\substack{(B, \mathfrak{n}) \text{ ess. étale} \\ \text{Umgeb. von } (A, \mathfrak{m})}} (B, \mathfrak{n}).$$

Beachte: die étalen A -Algebren B sind von endlicher Präsentation und bilden daher ohne Einschränkung eine Indexmenge.

1) A^h ist lokal mit maximalem Ideal \mathfrak{m}^h : Es genügt zu zeigen, dass $A^h \setminus \mathfrak{m}^h$ aus Einheiten besteht. Sei $x \in A^h$, repräsentiert durch $y \in B$, (B, \mathfrak{n}) étale Umgebung von (A, \mathfrak{m}) . Ist

$x \notin \mathfrak{m}^h$, so ist $y \notin \mathfrak{n}$, also y Einheit in $B_{\mathfrak{n}}$. Daher existiert ein $b \in B - \mathfrak{n}$, so dass y eine Einheit in B_b ist. Dann ist (B_b, \mathfrak{n}_b) eine étale Umgebung von (A, \mathfrak{m}) , und das Bild des Inversen von y in B_b ist ein Inverses von x , d.h., x ist eine Einheit.

2) Offenbar gilt $k \xrightarrow{\sim} \varinjlim B/\mathfrak{n}_B = A^h/\mathfrak{m}^h$.

3) $A \rightarrow A^h$ ist ein lokaler Homomorphismus, da \mathfrak{m} in \mathfrak{m}^h abgebildet wird.

4) A^h ist henselsch: Sei $A^h \rightarrow C$ étale, $\mathfrak{c} \subseteq C$ ein Ideal über \mathfrak{m}^h mit $k = k(\mathfrak{m}^h) \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{c})$. Da C von endlichem Typ über $A^h = \varinjlim B$ ist, existiert eine étale Umgebung (B_0, \mathfrak{n}_0) von (A, \mathfrak{m}) mit $C = B_0 \otimes_A A^h$ (Betrachte eine Präsentation $C = A^h[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ und ein B_0 , so dass die endlich vielen Koeffizienten der f_i im Bild von $B_0 \rightarrow A^h$ liegen). Damit erhalten wir einen Schnitt

$$C = B_0 \otimes_A \varinjlim B \rightarrow \varinjlim B$$

von $A^h \rightarrow C$ wie folgt: Wir betrachten ohne Einschränkung die kofinale Familie der étalen Umgebungen (B, \mathfrak{n}) mit (eindeutig bestimmten!) Morphismus $(B_0, \mathfrak{n}_0) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$, und dann ist der obige Homomorphismus induziert von den Homomorphismen

$$B_0 \otimes_A B \rightarrow B \quad , \quad b_0 \otimes b \mapsto b_0 b.$$

5) Universelle Eigenschaft: Sei (C, \mathfrak{n}_C) henselsch und $\varphi : A \rightarrow C$ ein lokaler Morphismus. Wir suchen den Homomorphismus $\tilde{\varphi}$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^h \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & C \end{array}$$

in eindeutiger Weise kommutativ macht. Es genügt zu zeigen: Für alle étalen Umgebungen (B, \mathfrak{n}) von (A, \mathfrak{m}) existiert genau ein Homomorphismus φ_B , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \varphi_B \\ & & C \end{array}$$

kommutativ macht. Äquivalent ist: In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_A C \\ & \searrow \varphi & \nearrow \\ & & C \end{array}$$

existiert genau ein A -linearer Schnitt $B \otimes_A C \rightarrow C$ von ψ . Aus $k = A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}$ erhalten wir aber einen surjektiven Homomorphismus $\psi : B \otimes_A C \rightarrow C/\mathfrak{n}_C$ und einen Isomorphismus $C/\mathfrak{n}_C \xrightarrow{\sim} (B \otimes_A C)/\ker(\psi)$. Da C henselsch ist, erhalten wir also nach 9.1 (d) einen Schnitt von $C \rightarrow B \otimes_A C$ wie gewünscht. Dieser ist eindeutig nach Kohomologie von Schemata, Corollar 3.13.

Proposition 9.11 (a) A^h ist flach über A .

(b) Seien

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \varprojlim_r A/\mathfrak{m}^r \\ \hat{A}^h &= \varprojlim_r A^h/(\mathfrak{m}^h)^r\end{aligned}$$

die Kompletterungen von A bzw. A^h . Dann ist $\hat{A} \xrightarrow{\sim} \hat{A}^h$ ein Isomorphismus.

Beweis (a): A^h ist flach als direkter Limes von flachen A -Algebren.

(b) Es genügt zu zeigen, dass $A/\mathfrak{m}^r \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}^r$ für alle étalen Umgebungen (B, \mathfrak{n}) von (A, \mathfrak{m}) . Aber $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}B = \mathfrak{n}$ nach Voraussetzung; also $\mathfrak{m}^r B = \mathfrak{n}^r$ für alle r und

$$(9.11.1) \quad \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \cong \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \otimes_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{m}^r B/\mathfrak{m}^{r+1} B = \mathfrak{n}^r/\mathfrak{n}^{r+1}$$

woraus die Isomorphie $A/\mathfrak{m}^r \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{m}^{r+1}$ induktiv folgt. Die mittlere Isomorphie in (9.11.1) erhalten wir aus der Flachheit von B über A : Deswegen erhalten wir nämlich aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow \mathfrak{m}^r \rightarrow \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow 0$$

die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$(9.11.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^{r+1} \otimes_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r \otimes_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \otimes_A B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^{r+1} B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r B/\mathfrak{m}^{r+1} B \longrightarrow 0 \end{array}$$

und die vertikalen Isomorphismen, da die Injektion $\mathfrak{m}^r \hookrightarrow A$ wegen Flachheit von B über A eine Injektion $\mathfrak{m}^r \otimes_A B \rightarrow A \otimes_A B = B$ mit Bild $\mathfrak{m}^r B$ induziert (entsprechend für $r+1$). Daher ist die rechte vertikale Abbildung ein Isomorphismus.

Bemerkung 9.12 Man kann zeigen:

(a) Ist A noethersch, so ist A^h auch noethersch.

(b) Sei A integer und normal, mit Quotientenkörper K . Sei K_s ein separabler Abschluss von K , A_s der ganze Abschluss von A in K_s , $\bar{\mathfrak{m}} \subset A_s$ ein maximales Ideal über \mathfrak{m} und $Z_{\bar{\mathfrak{m}}} \subset \text{Gal}(K_s/K) = G_K$ die Zerlegungsgruppe, so ist $A^h = A_s^{Z_{\bar{\mathfrak{m}}}}$.

Definition 9.13 Sei X ein Schema und $x \in X$ ein Punkt. Eine étale Umgebung von x ist ein Paar (U, y) , mit $f: U \rightarrow X$ étale, $f(y) = x$ und $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$.

Lemma 9.14 (a) Mit den offensichtlichen Morphismen $(U, y) \rightarrow (U', y')$, nämlich

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array} \quad , \quad y \longmapsto y'$$

bilden diese eine kofiltrierende Kategorie.

(b) Es ist

$$\mathcal{O}_{X,x}^h = \varinjlim_{\substack{U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } x}} \Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \varinjlim_{\substack{(U,y) \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } x}} \mathcal{O}_{U,y}.$$

Beweis Analog zum Beweis von 9.7.

Definition 9.15 Ein **strikt henselscher Ring** ist ein henselscher Ring, dessen Restklassenkörper separabel abgeschlossen ist.

Lemma 9.16 (a) Zu jedem lokalen Ring (A, \mathfrak{m}) existiert ein strikt henselscher Ring $(A^{sh}, \mathfrak{m}^{sh})$ und ein lokaler Morphismus $i : A \rightarrow A^{sh}$, der die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist $\varphi : A \rightarrow C$ ein lokaler Morphismus in einem strikt henselschen Ring (C, \mathfrak{m}_C) , und ist eine $k = A/\mathfrak{m}$ -Einbettung

$$\varphi_0 : A^{sh}/\mathfrak{m}^{sh} \rightarrow C/\mathfrak{m}_C$$

vorgegeben, so existiert genau ein lokaler Morphismus $\tilde{\varphi} : A^{sh} \rightarrow C$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^{sh} \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & C \end{array}$$

kommutativ macht und die Einbettung φ_0 der Restklassenkörper induziert.

(b) Für ein Schema X , einen Punkt $x \in X$ und einen geometrischen Punkt \bar{x} von X über x ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X,x}^{sh} &\cong \mathcal{O}_{X,\bar{x}} := \lim_{\substack{\rightarrow \\ U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } \bar{x}}} \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \\ &= \lim_{\substack{\rightarrow \\ U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } \bar{x}}} \mathcal{O}_{U, \text{Bild von } \bar{x}} \end{aligned}$$

Beweis Analog zu 9.7.

10 Beispiele von étalen Garben

Zuerst betrachten wir durch Schemata dargestellte Garben (von Mengen).

Bemerkung 10.1 In einer Kategorie \mathcal{X} ist ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ genau dann ein Epimorphismus, wenn für jedes Objekt Z in \mathcal{X} der Morphismus

$$f^* : \text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z)$$

injektiv ist.

Definition 10.2 Sei \mathcal{X} eine Kategorie mit Faserprodukten. Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ heißt **striker Epimorphismus**, wenn für alle Objekte Z in \mathcal{X} die Sequenz

$$Y \times_X Y \begin{array}{c} \xrightarrow{pr_1} \\ \xrightarrow{pr_2} \end{array} Y \xrightarrow{f} X$$

exakt ist, d.h., f der Differenzkern von pr_1 und pr_2 ist, d.h., wenn für alle Objekte Z in \mathcal{X} die Sequenz

$$\text{Hom}(X, Z) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(Y, Z) \begin{array}{c} \xrightarrow{pr_1^*} \\ \xrightarrow{pr_2^*} \end{array} \text{Hom}(Y \times_X Y, Z)$$

exakt ist, d.h., f^* der Differenzkern von pr_1^* und pr_2^* ist (Dies bedeutet insbesondere, dass f^* injektiv für alle Z ist, d.h., dass f ein Epimorphismus ist).

Definition 10.3 Ein Morphismus von Schemata $f : Y \rightarrow X$ heißt **treuflach**, wenn f flach und surjektiv ist.

Das folgende Lemma zeigt, dass dies für affine Schemata mit Koh. Sch., Definition 8.9 übereinstimmt.

Lemma 10.4 Sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann ist äquivalent

- (a) φ ist treuflach, d.h., für einen A -Modul M ist $M = 0$, wenn $M \otimes_A B = 0$ ist.
- (b) Eine Sequenz $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ von A -Moduln ist exakt, wenn $B \otimes_A M' \rightarrow B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A M''$ exakt ist.
- (c) $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ist surjektiv.
- (d) Für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} von A ist $\mathfrak{m}B \neq B$.

Beweis (a) \Rightarrow (b): Angenommen, $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ wird exakt nach Tensorieren mit B . Wegen der Flachheit von B über A ist $\text{im}(\psi\varphi) \otimes_A B = \text{im}((\psi \otimes id) \circ (\varphi \otimes id)) = 0$, nach (a) also $\text{im}(\psi\varphi) = 0$, d.h., $\psi\varphi = 0$. Ebenso ist $\ker(\psi)/\text{im}(\varphi) \otimes_A B = \ker(\psi \otimes id)/\text{im}(\varphi \otimes id) = 0$, also $\ker(\psi)/\text{im}(\varphi) = 0$.

(b) \Rightarrow (a): $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn $M = 0$.

(a) \Rightarrow (c): Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq 0$, also

$$\text{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \neq \emptyset.$$

(c) \Rightarrow (d) ist klar, da die Primideale über \mathfrak{m} den Primidealen von $B/\mathfrak{m}B$ entsprechen.

(d) \Rightarrow (a): Sei $x \in M, x \neq 0$, und $N = Ax \subseteq M$. Wegen der Flachheit von B über A genügt es zu zeigen, dass $B \otimes_A N \neq 0$ (dann ist auch $B \otimes_A M \neq 0$). Aber $N \cong A/J$ für ein Ideal $J \subsetneq A$, also $B \otimes_A N \cong B/JB$. Ist $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal mit $J \subseteq \mathfrak{m}$, so ist $JB \subseteq \mathfrak{m}B \neq B$, also $B/JB \neq 0$.

Corollar 10.4 Ein flacher Morphismus von lokalen Ringen $\varphi : A \rightarrow B$ ist treuflach.

Beweis Dies folgt aus 10.3 (d), da nach Voraussetzung $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ für die maximalen Ideale \mathfrak{m} und \mathfrak{n} von A bzw. B .

Satz 10.5 Sei $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus von Schemata. Ist f treuflach und von endlichem Typ, so ist f ein strikter Epimorphismus.

Beweis Für jedes Schema Z haben wir die Exaktheit von

$$\text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z) \rightrightarrows \text{Hom}(Y \times_X Y, Z)$$

zu zeigen.

1. *Fall*: Seien $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B)$ und $Z = \text{Spec}(C)$ alle affin. In diesem Fall identifiziert sich die obige Sequenz mit

$$\text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, B) \rightrightarrows \text{Hom}(C, B \otimes_A B),$$

und die Behauptung folgt aus der Exaktheit von

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & B \otimes_A B & , \\ & & b & \mapsto & b \otimes 1 - 1 \otimes b & \end{array}$$

die (für treuflaches $A \rightarrow B$) in Koh. Sch., Satz 8.12 gezeigt wurde.

2. *Fall* Seien $X = \text{Spec}(A)$ und $Y = \text{Spec}(B)$ affin und Z beliebig, Sei $h \in \text{Hom}(Y, Z)$ gegeben, mit $h \text{pr}_1 = h \text{pr}_2$. Wir haben zu zeigen, dass genau ein $g \in \text{Hom}(X, Z)$ mit $gf = h$ existiert.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von g (falls es existiert). Seien $g_1, g_2 : X \rightarrow Z$ gegeben mit $g_1 f = g_2 f$. Dann müssen g_1 und g_2 als Abbildungen topologischer Räume übereinstimmen, da f surjektiv ist. Sei $x \in X$, und sei U eine affine offene Umgebung von $g_1(x) = g_2(x)$ in Z . Dann gibt es ein $a \in A$ mit $g_1(D(a)) = g_2(D(a)) \subseteq U$. Weiter ist B_a treuflach über A_a . Aus dem 1. Fall folgt also $g_1|_{D(a)} = g_2|_{D(a)}$ als Schema-Morphismen, also die Eindeutigkeit von g .

Sei nun $h : Y \rightarrow Z$ mit $h \text{pr}_1 = h \text{pr}_2$ gegeben. Wegen der bewiesenen Eindeutigkeit von g genügt es, g lokal zu definieren. Sei $x \in X, y \in Y$ mit $f(y) = x$, und $U \subseteq Z$ eine affine offene Umgebung von $h(y)$ in Z . Wir benutzen nun

Lemma 10.6 Sei $f : Y \rightarrow X$ flach und von endlichem Typ. Dann ist f eine offene Abbildung.

Beweis Siehe Milne, 'Etale Cohomology', S. 14, Th. 2.1.

In unserer Situation ist also $f(h^{-1}(U))$ offen in X . Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & y & x \\ Y \times_X Y & \rightrightarrows & Y \xrightarrow{f} X = \text{Spec}(A) \\ & & \downarrow h \\ & & h(y) \in U \subseteq Z \end{array}$$

Nach 10.6 existiert ein $a \in A$ mit $x \in D(a) \subseteq f(h^{-1}(U))$. Dann ist $f^{-1}(D(a)) \subseteq h^{-1}(U)$, denn ist $x_1 \in D(a)$, also $x_1 = f(y_1)$ mit $h(y_1) \in U$, und ist $y_2 \in Y$ mit $f(y_2) = x_1$, so gibt es wegen $f(y_1) = f(y_2)$ ein $y' \in Y \times_X Y$ mit $pr_1(y') = y_1$ und $pr_2(y') = y_2$ (betrachte einen Punkt von $y_1 \times_{x_1} y_2$ und dessen Bild in $Y \times_X Y$). Es folgt

$$h(y_2) = h pr_2(y') = h pr_1(y') = h(y_1) \in U,$$

also $y_2 \in h^{-1}(U)$.

Ist $b \in B$ das Bild von a , so ist $D(b) = f^{-1}(D(a))$, also $h(D(b)) \subseteq U$, und nach dem 1. Fall erhalten wir $g|_{D(a)}$. Wie vorher erklärt, verkleben sich diese lokalen Lösungen zu einem globalen g .

3. *Fall*: Seien X, Y und Z beliebig. Es ist leicht, auf den Fall zu reduzieren, wo X affin ist (wähle eine affine offene Überdeckung und deren Urbild in Y ; wegen der Eindeutigkeit verkleben sich die Morphismen g auf der Überdeckung). Da f quasi-kompakt ist, ist $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ dann endliche Vereinigung von affinen offenen Teilmengen. Sei

$$Y^* = \coprod_{i=1}^n Y_i.$$

Dann ist Y^* affin und $Y^* \rightarrow Y$ treuflach. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(X, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, Z) & \Longrightarrow & \text{Hom}(Y \times_X Y, Z) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(X, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y^*, Z) & \Longrightarrow & \text{Hom}(Y^* \times_X Y^*, Z), \end{array}$$

in dem die untere Zeile nach dem 2. Fall exakt ist. Weiter ist die mittlere vertikale Abbildung offenbar injektiv ($\text{Hom}(-, Z)$ ist eine Zariski-Garbe auf Y). Die Exaktheit der oberen Zeile folgt nun durch eine Diagrammjagd.

Bevor wir Satz 10.5 zur Konstruktion von Garben verwenden, stellen wir noch ein nützliches Garbenkriterium vor.

Proposition 10.7 Eine Prägarbe P (von Mengen oder abelschen Gruppen) auf $X_{\text{ét}}$ (bzw. X_{fl}) ist genau dann eine Garbe, wenn gilt:

- (a) Für jedes $U \in X_{\text{ét}}$ (bzw. X_{fl}) ist die Restriktion von P auf U eine Zariski-Garbe.
- (b) Für jede Überdeckung ($U' \rightarrow U$), wobei U und U' affin sind, ist

$$P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

exakt.

Beweis Offenbar sind die Bedingungen notwendig. Gilt umgekehrt (a), so gilt für jede disjunkte Summe $V = \coprod_j V_j$ von Schemata

$$P(V) = \prod_j P(V_j).$$

Für eine Überdeckung ($U_i \rightarrow U$) ist also die Sequenz

$$(10.7.1) \quad P(U) \rightarrow \prod_i P(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)$$

isomorph zur Sequenz

$$(10.7.2) \quad P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

für die Überdeckung $U' \rightarrow U$ mit $U' = \coprod_i U_i$, denn

$$(\coprod_i U_i) \times_U (\coprod_i U_i) \cong \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j.$$

Gilt (b), so ist die Sequenz (10.7.1) für jede Überdeckung $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ mit endlichem I und affinen U_i und U exakt, da dann $\coprod_i U_i$ affin ist: $\text{Spec}(A) \coprod \text{Spec}(B) \cong \text{Spec}(A \times B)$. Für beliebiges $(U_j \rightarrow U)$ schreibe U als die Vereinigung von affinen offenen Mengen U_i , $U = \cup_i U_i$, und schreibe $f : U' = \coprod_j U'_j \rightarrow U$. Dann ist $f^{-1}(U_i) = \cup_{k \in K_i} U'_{ik}$ mit affinen offenen Teilmengen $U'_{ik} \subseteq f^{-1}(U_i)$. Da $U' \rightarrow U$ flach und lokal von endlichem Typ ist, ist $U'_{ik} \rightarrow U_i$ von endlichem Typ (da beide Schemata affin ist), also $f(U'_{ik})$ offen in U_i nach Lemma 10.6. Da U_i (als affines Schema) quasi-kompakt ist, gibt es daher eine endliche Indexmenge $E_i \subseteq K_i$ mit $U_i = \cup_{k \in E_i} f(U'_{ik})$, d.h., $(U'_{ik} \rightarrow U_i)_{k \in E_i}$ ist eine Überdeckung. Indem wir alle Morphismen der Form $U'_{ik} \rightarrow f(U'_{ik})$ für $k \in K_i - E_i$ hinzunehmen, können wir annehmen, dass alle K_i endlich sind, und $U' = \cup U'_{ik}$. Betrachte dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P(U) & \longrightarrow & P(U') & \rightrightarrows & P(U' \times_U U') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i P(U_i) & \longrightarrow & \prod_i \prod_k P(U'_{ik}) & \rightrightarrows & \prod_i \prod_{k,\ell} P(U'_{ik} \times_U U'_{i\ell}) \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\ \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \prod_{k,\ell} P(U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) & & \end{array}$$

Nach 10.7 (a) sind die beiden ersten Spalten exakt, und nach der Vorbemerkung über (b) ist die zweite Zeile exakt (k läuft in der endlichen Menge K_i für die U'_{ik}). Daher ist $P(U) \hookrightarrow P(U')$ injektiv, also die Prägarbe P separiert (da $(U_i \rightarrow U)$ beliebig war). Hieraus folgt wiederum die Injektivität des unteren Pfeils. Eine leichte Diagrammjagd zeigt nun die Exaktheit der oberen Zeile.

Corollar 10.8 Für jedes X -Schema Z ist der durch Z dargestellte Funktor

$$\text{Hom}_X(-, Z) : U \mapsto Z(U) := \text{Hom}_X(U, Z)$$

eine Garbe von Mengen auf $X_{\text{ét}}$ und X_{fl} .

Beweis Bedingung 10.7 (a) ist bekannt (Verkleben von Morphismen). Bedingung 10.7 (b) folgt aus Satz 10.5: Ist $f : U' \rightarrow U$ ein étaler (oder flacher) X -Morphismus, mit U und U' affin, so ist f treuffach und von endlichem Typ, nach 10.5 also

$$\text{Hom}(U, Z) \rightarrow \text{Hom}(U', Z) \rightrightarrows \text{Hom}(U' \times_U U', Z)$$

exakt. Seien $\pi_U : U \rightarrow X, \pi_{U'} : U' \rightarrow X$ und $\pi_Z : Z \rightarrow X$ die Strukturmorphismen. Wir

haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
Hom_X(U, Z) & \longrightarrow & Hom_X(U', Z) & \xrightarrow{\cong} & Hom_X(U' \times_U U', Z) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(U, Z) & \hookrightarrow & Hom(U', Z) & \xrightarrow{\cong} & Hom(U \times_U U', Z) \\
\downarrow (\pi_Z)_* & & \downarrow (\pi_Z)_* & & \downarrow \\
Hom(U, X) & \xrightarrow{f^*} & Hom(U', X) & & \\
\pi_U \vdash & \longrightarrow & \pi_{U'} & &
\end{array}$$

in dem die mittlere Zeile für alle Schemata Z exakt ist, so dass auch der untere Morphismus f^* injektiv ist. Weiter gilt

$$Hom_X(U, Z) = \{g \in Hom(U, Z) \mid (\pi_Z)_*(g) = \pi_Z g = \pi_U\},$$

entsprechend für $Hom_X(U', Z)$. Hieraus folgt die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm.

Corollar 10.9 Für jedes (abelsche) Gruppenschema G über X ist der durch G dargestellte Funktor eine Garbe von (abelschen) Gruppen auf $X_{\text{ét}}$ und X_{fl} .

Beispiele 10.10 (a) Die Garbe $\mathbb{G}_{a,X} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{G}_{a,\mathbb{Z}} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ liefert für jedes X -Schema U

$$\mathbb{G}_{a,X}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U),$$

und heißt die additive Gruppe über X .

(b) Die Garbe $\mathbb{G}_{m,X} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{G}_m$, mit $\mathbb{G}_m = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$ liefert für jedes X -Schema U

$$\mathbb{G}_{m,X}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times = \Gamma(U, \mathcal{O}_U^\times),$$

und heißt die multiplikative Gruppe über X .

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei μ_n die Garbe $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/\langle T^n - 1 \rangle)$. Diese liefert für jedes X -Schema U

$$\mu_n(U) = \{a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times \mid a^n = 1\},$$

und heißt die Garbe der n -ten Einheitswurzeln.

Lemma 10.11 Die Sequenz von Garben

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \rightarrow & \mu_n & \rightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m \\
& & & & a & \mapsto & a^n
\end{array}$$

ist exakt.

Beweis: Für jedes X -Schema U ist

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mu_n(U) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(U) & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m(U) \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \mu_n(U) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times \\
& & & & a & \longmapsto & a^n
\end{array}$$

exakt.

Proposition 10.12 Sei n invertierbar auf dem Schema X (\Leftrightarrow Für alle $x \in X$ wird n nicht von $\text{char}(k(x))$ geteilt). Dann ist die Sequenz von étalen Garben auf X

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

exakt. Für beliebiges n ist die Sequenz

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

von flachen Garben exakt. Die obigen Sequenzen heißen die Kummersequenzen.

Beweis Es ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ ein Epimorphismus ist. Wir benutzen das Kriterium 4.2 (d). Sei U ein Schema und $s \in \mathbb{G}_m(U)$. Durch Übergang zu einer affinen offenen Überdeckung ist ohne Einschränkung $U = \text{Spec}(A)$ affin und $s = a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times = A^\times$. Dann ist $B = A[T]/\langle T^n - a \rangle$ eine treuflache A -Algebra von endlichem Typ, also $V = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = U$ eine flache Überdeckung, und für $a \in A^\times \subseteq B^\times$ gibt es ein $b \in B^\times$ (nämlich das Bild von T in B) mit $b^n = a$. Nach dem Exaktheitskriterium von 4.2 (d) ist $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ also ein Epimorphismus von flachen Garben. Ist n invertierbar auf X , so ist $n \in A^\times$ und daher B eine étale A -Algebra, also $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ ein Epimorphismus von étalen Garben.

Lemma 10.13 Sei X ein Schema. Für jede Gruppe G ist die zugehörige konstante Zariski, étale oder flache Garbe \underline{G}_X (d.h., die Garbe assoziiert zur konstanten Prägarbe G^P mit $G^P(U) = G$ für alle $U \rightarrow X$) darstellbar durch das Gruppenschema

$$\underline{G}_X = \coprod_{g \in G} X = \coprod_{g \in G} X_{[g]}$$

mit dem offensichtlichen Gruppengesetz.

Beweis Betrachte die Kategorie Sch/X aller X -Schemata. Man sieht sofort, dass für jedes X -Schema Y gilt:

$$\underline{G}_X(Y) = \text{Hom}_X(Y, \underline{G}_X) = \{\varphi : Y \rightarrow G \mid \varphi \text{ lokal konstant}\}$$

(Ist $\varphi : Y \rightarrow G$ lokal konstant gegeben, so ist $Y = \coprod_{g \in G} \varphi^{-1}(g)$). Weiter ist \underline{G}_X eine Garbe für alle drei betrachteten Topologien, nach 10.9. Schließlich ist für die zu G assoziierte Zariski-Garbe G_X^{Zar}

$$G_X^{\text{Zar}}(Y) = \{\varphi : Y \rightarrow G \mid \varphi \text{ lokal konstant}\}$$

(Alg. Geo. II ÜA 13). Da dies bereits eine Garbe für alle drei betrachteten Topologien liefert, folgt die Behauptung.

Bemerkung 10.14 Ist X lokal-noethersch, so gilt

$$G_X(Y) = G^{\pi_0(Y)}$$

für alle $Y \rightarrow X$, die lokal von endlichem Typ (und damit wieder lokal-noethersch) sind, siehe Alg. Geo. II ÜA 13).

Proposition 10.15 Sei X ein Schema der Charakteristik $p > 0$ (\Leftrightarrow der Morphismus $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ faktorisiert über $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \Leftrightarrow$ für jedes offene $U \subseteq X$ ist $p\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = 0$). Sei

$$F : \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X}$$

der Frobenius-Homomorphismus: Für $U \rightarrow X$ flach (oder étale) sei

$$F : \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

der Ringhomomorphismus (!)

$$a \mapsto a^p$$

(dies ist additiv, da $pa = 0$). Dann hat man eine exakte Sequenz von flachen (oder étalen) Garben

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0,$$

(genannt Artin-Schreier-Sequenz), wobei $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X$ die zur abelschen Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ assoziierte konstante Garbe ist, die durch das Gruppenschema

$$\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} \text{Spec}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle)$$

repräsentiert wird.

Beweis: Wegen

$$T^p - T = \prod_{i \in \mathbb{F}_p} (T - i)$$

in $\mathbb{F}_p[T]$ ist

$$\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle \cong \prod_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p,$$

und es ist für jedes X -Schema Y

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(Y, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X) &= \text{Hom}(Y, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\mathbb{F}_p}) \\ &= \text{Hom}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \{a \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \mid a^p - a = 0\} \\ &= \mathbb{F}_p \subseteq \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y). \end{aligned}$$

Dies zeigt auch die Exaktheit von

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,X}.$$

Weiter ist $F - 1$ ein Epimorphismus von Garben für die étale (und flache) Topologie, da für $U = \text{Spec}(A) \subseteq Y$ affin offen und $a \in A$

$$V = \text{Spec}(A[T]/\langle T^p - T - a \rangle) \rightarrow U$$

eine étale Überlagerung ist, so dass $a = (F - 1)b = b^p - b$ für $b = \text{Bild von } T \text{ in } B = A[T]/\langle T^p - T - a \rangle$.

Lemma/Definition 10.16 Sei wieder X ein Schema der Charakteristik $p > 0$ und sei $\alpha_{p,X} \subseteq \mathbb{G}_{a,X}$ die Untergarbe, die durch

$$\alpha_{p,X}(U) = \{a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid a^p = 0\}$$

definiert wird. Dann wird $\alpha_{p,X}$ durch das Gruppenschema $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} \text{Spec}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p \rangle)$ dargestellt. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \alpha_{p,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F} \mathbb{G}_{a,X}$$

ist exakt für die Zariski oder étale Topologie. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \alpha_{p,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0$$

ist exakt für die flache Topologie, aber im Allgemeinen nicht für die étale Topologie.

Beweis: Die ersten Aussagen sind klar. Der Morphismus F ist ein Epimorphismus in der flachen Topologie, weil für jede \mathbb{F}_p -Algebra A die Algebra $B = A[T]/\langle T^p \rangle$ treuflach über A ist. Für einen separabel abgeschlossenen Körper L ist der Frobenius

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{F} & L \\ a & \mapsto & a^p \end{array}$$

aber im Allgemeinen nicht surjektiv, außer wenn L ein vollkommener (perfekter) Körper ist.

Lemma/Definition 10.17 Sei X ein Schema und \mathcal{M} ein quasi-kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U)$$

($\pi_U : U \rightarrow X$ ein X Schema) eine Garbe auf $(Sch/X)_{\text{fl}}$, dem Situs aller X -Schemata mit der flachen Topologie. Hier steht $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$ für $\pi_U^{-1} \mathcal{M} \otimes_{\pi_U^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U (= \pi_U^* \mathcal{M}$, das quasi-kohärente Pull-Back). Insbesondere liefert dies auch eine Garbe auf den kleinen Siten $X_{\text{ét}}$ und X_{fl} , die wir mit $\mathcal{M}_{\text{ét}}$ bzw. \mathcal{M}_{fl} bezeichnen.

Beweis Wir benutzen die Kriterien aus Satz 10.7. Bedingung 10.7 (a) ist klar, da $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$ nach Konstruktion eine Zariski-Garbe auf U ist. Für 10.7 (b) sei $U' = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ affin und treuflach. Dann entspricht $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$ einem A -Modul M , $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$ dem B -Modul $B \otimes_A M$, und wir haben die Exaktheit von

$$M \rightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

zu zeigen. Diese wurde in Koh. Sch., Satz 8.12 bewiesen (nach Lemma 10.4 ist $A \rightarrow B$ treuflach).

Bemerkung 10.18 Der Fall $\mathbb{G}_{a,X} = \mathcal{O}_{X,\text{ét}}$ ist ein Spezialfall.

11 Čech-Kohomologie

Das Folgende verallgemeinert die nullte Čech-Kohomologie (siehe Definition 3.7) und die topologische Čech-Kohomologie (siehe Koh. Sch. § 9).

Lemma/Definition 11.1 Sei $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Situs.

(a) Für eine Prägarbe P auf \mathcal{X} und eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in \mathcal{T} und $n \geq 0$ heißt

$$C^n(\mathfrak{U}, P) := \prod_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}} P(U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n})$$

die Gruppe der n -Koketten zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in P . Definiere das Differential

$$d^n : C^n(\mathfrak{U}, P) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, P)$$

durch

$$(d^n s)_{i_0, \dots, i_{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu s_{i_0, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_{n+1}} |_{U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}}}$$

wobei die Restriktion bezüglich des Morphismus

$$U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}} \rightarrow U_{i_0} \times_U \dots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}}$$

genommen wird und \hat{a} das Weglassen von a bedeutet. Dann ist $d^{n+1}d^n = 0$ für alle n , so dass wir einen Komplex $C^\cdot(\mathfrak{U}, P)$, genannt der Čech-Komplex zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in P .

(b) Die n -te Kohomologie

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, P) := H^n(C^\cdot(\mathfrak{U}, P))$$

heißt die n -te Čech-Kohomologie von P zur Überdeckung \mathfrak{U} .

Beweis dass $d^{n+1}d^n = 0$: selbst! (Standard).

Bemerkung 11.2 Für $n = 0$ erhalten wir offenbar die nullte Čech-Kohomologie aus Definition 3.7 (a).

Lemma 11.3 Seien $(V_j \rightarrow U)$ und $(U_i \rightarrow U)$ Überdeckungen und

$$f = (\varepsilon, f_j) : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

eine Verfeinerungsabbildung. Diese induziert Abbildungen für alle n

$$\check{H}^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^n((V_j \rightarrow U), P).$$

Beweis Wir haben eine Abbildung $\varepsilon : J \rightarrow I$ und Morphismen $f_j : V_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)}$. Damit definieren wir

$$f^n : C^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^n((V_j \rightarrow U), P)$$

wie folgt: Ist $s = (s_{i_0, \dots, i_n}) \in C^n((U_i \rightarrow U), P)$, so setze

$$(f^n s)_{j_0, \dots, j_n} = \text{res}_{f_{j_0} \times \dots \times f_{j_n}} (s_{\varepsilon(j_0), \dots, \varepsilon(j_n)}),$$

mit der Restriktion bezüglich

$$f_{j_0} \times \dots \times f_{j_n} : V_{j_0} \times_U \dots \times_U V_{j_n} \rightarrow U_{\varepsilon(j_0)} \times_U \dots \times_U U_{\varepsilon(j_n)}.$$

Diese Abbildungen kommutieren mit den Differentialen d^n , liefern also einen Morphismus von Komplexen

$$f^* : C^*((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^*((V_j \rightarrow U), P),$$

der die gewünschte Abbildung in der Kohomologie induziert.

Bemerkung 11.4 Auf $\check{H}^0(-, P)$ stimmt diese Abbildung mit der früher betrachteten überein!

Lemma 11.5 Sind

$$f, g : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

zwei Verfeinerungsabbildungen, so ist

$$f^* = g^* : \check{H}^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^n((V_j \rightarrow U), P)$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis (vergleiche Lemma 3.11) Sei $f = (\varepsilon, f_j)$ und $g = (\eta, g_j)$. Definiere

$$k^n : C^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^{n-1}(V_j \rightarrow U), P)$$

durch

$$(k^n s)_{j_0, \dots, j_{n-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^r \text{res}_{f_{j_0} \times \dots \times (f_{j_r}, g_{j_r}) \times \dots \times g_{j_{n-1}}} S_{\varepsilon(j_0), \dots, \varepsilon(j_r), \eta(j_r), \dots, \eta(j_{n-1})}$$

für $(f_{j_r}, g_{j_r}) : V_{j_r} \rightarrow U_{\varepsilon(j_r)} \times U_{\eta(j_r)}$. Dann gilt

$$d^{n-1}k^n + k^{n+1}d^n = g^n - f^n,$$

d.h., (k^n) liefert eine Kettenhomotopie zwischen (f^n) und (g^n) , woraus die Behauptung folgt.

Definition 11.6 Die n -te Čech-Kohomologie von U mit Werten in P wird definiert als

$$\check{H}^n(U, P) := \check{H}^n(U, \mathcal{T}; P) = \varinjlim \check{H}^n(\mathfrak{U}, P)$$

wobei der Limes über alle Überdeckungen von U (in \mathcal{T}) läuft.

Bemerkung 11.7 Wegen 11.5 ist dies ein Limes über die induktiv geordnete Menge $\mathcal{T}(U)_0$ aller Überdeckungen \mathfrak{U} von U , wobei $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$, wenn es eine Verfeinerungsabbildung $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$ gibt (siehe den Beweis von 3.11).

Lemma 11.8 Sei

$$(11.8.1) \quad 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Prägarben auf \mathcal{X} .

(a) Für jede Überdeckung \mathfrak{U} in \mathcal{T} gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_2) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_3) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell bezüglich Verfeinerungsabbildungen und bezüglich Morphismen von exakten Sequenzen (11.8.1).

(b) Für jedes U in \mathcal{X} gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^0(U, P_1) \rightarrow \check{H}^0(U, P_2) \rightarrow \check{H}^0(U, P_3) \xrightarrow{\delta} H^1(U, P_1) \rightarrow \check{H}^1(U, P_2) \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell für Restriktionsabbildungen und für Morphismen von exakten Sequenzen (11.8.1).

Beweis (a): Wir haben eine exakte Sequenz von Komplexen

$$(11.8.2) \quad 0 \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_2) \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_3) \rightarrow 0,$$

da für $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ und jedes $(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$ die Sequenz

$$(11.8.2) \quad 0 \rightarrow P(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow P_2(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow P_3(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow 0$$

exakt ist, wobei $U_{i_0, \dots, i_n} := U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n}$. Die Sequenz in (a) ist die lange exakte Kohomologiesequenz zu (11.8.2). Die Funktorialitäten folgen, da (11.8.2) funktoriell in \mathfrak{U} und in (11.8.1) ist.

(b) folgt aus (a) durch Übergang zum induktiven Limes über alle Überdeckungen von U (siehe Bemerkung 11.7), da die Bildung eines induktiven Limes ein exakter Funktor ist.

Bemerkung 11.9 Für eine exakte Sequenz von \mathcal{T} -Garben

$$(11.9.1) \quad 0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$$

erhält man im Allgemeinen keine lange exakte Sequenz von Čech-Kohomologiegruppen, da (11.9.1) im Allgemeinen nicht exakt als Sequenz von Prägarben ist.

Beispiel 11.10 Sei $A \rightarrow B$ ein treuffacher Ringhomomorphismus, der lokal von endlichem Typ (bzw. lokal von endlicher Präsentation) ist. Dann ist $(V = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = U)$ eine Überdeckung in der flachen Topologie. Der zugehörige Čech-Komplex zur Prägarbe $\mathbb{G}_{a,X}$ ist

$$0 \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow \dots,$$

der Komplex, der in Koh. Sch., Satz 8.12 betrachtet wurde. Also ist

$$\check{H}^n((V \rightarrow U), \mathbb{G}_a) = \begin{cases} A & , \quad n = 0, \\ 0 & , \quad n > 0. \end{cases}$$

Die Čechkohomologie kann man auch als derivierten Funktor erhalten:

Satz 11.11 (a) Für eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ ist $\check{H}^n(\mathfrak{U}, -)$ die n -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, -) : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow \underline{Ab} \\ P \mapsto \check{H}^0(\mathfrak{U}, P).$$

(b) Für $U \in ob(\mathcal{X})$ ist $\check{H}^n(U, -)$ die n -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$\check{H}^0(U, -) : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow \underline{Ab} \\ P \mapsto \check{H}^0(U, P).$$

Beweis Es folgt aus 11.8, dass die Funktoren $(\check{H}^n(\mathfrak{U}, -))_{n \geq 0}$ bzw. $(\check{H}^n(U, -))_{n \geq 0}$ exakte δ -Funktoren auf $Pr(\mathcal{X})$ bilden (Koh. Sch., Definition 6.26). Es genügt daher zu zeigen, dass $\check{H}^n(\mathfrak{U}, -)$ bzw. $\check{H}^n(U, -)$ auslöschbar für $n > 0$ ist (siehe Koh. Sch., Lemma 6.27; die Rechtsableitung ist ein universeller δ -Funktoren und zwei universelle δ -Funktoren sind offenbar isomorph). Da $Pr(\mathcal{X})$ genügend viele Injektive besitzt, genügt es zu zeigen:

Lemma 11.12 Es ist $\check{H}^0(\mathfrak{U}, I) = 0 = \check{H}^0(U, I)$ für $n > 0$, falls I eine injektive Prägarbe ist.

Beweis (vergleiche Koh. Sch., Beweis von Lemma 8.4). Die zweite Aussage folgt aus der ersten. Wir haben also zu zeigen, dass für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in \mathcal{T} die Sequenz

$$\prod_i I(U_i) \rightarrow \prod_{i_0, i_1} I(U_{i_0 i_1}) \rightarrow \prod_{i_0, i_1, i_2} I(U_{i_0 i_1 i_2}) \rightarrow \dots$$

exakt ist, wobei $U_{i_0, \dots, i_n} := U_{i_0 \times_U \dots \times_U U_{i_n}}$. Diese Sequenz identifiziert sich mit einer Sequenz

$$(11.12.1) \quad \prod_i \text{Hom}(\mathbb{Z}_{U_i}^P, I) \rightarrow \prod_{i_0, i_1} \text{Hom}(\mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P, I) \rightarrow \dots,$$

die von einem offensichtlichen Komplex von Prägarben

$$(11.12.2) \quad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i}^P \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1, i_2} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1 i_2}}^P \leftarrow \dots$$

durch Anwenden von $\text{Hom}(-, I)$ kommt. Da I injektiv ist, ist der letzte Funktor exakt, also genügt es, die Exaktheit von (11.12.2) zu zeigen, also die Exaktheit von

$$(11.12.3) \quad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i}^P(V) \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P(V) \leftarrow \dots$$

für jedes V in \mathcal{X} .

Nun ist $\mathbb{Z}_W^P(V) = \bigoplus_{\text{Hom}(V, W)} \mathbb{Z}$ für W in \mathcal{X} , und für jedes $W = U_{i_0 i_1 \dots i_n} = U_{i_0 \times_U U_{i_1} \times_U \dots \times_U U_{i_n}}$

haben wir einen kanonischen Morphismus $U_{i_0 \dots i_n} \rightarrow U$. Damit ist

$$\text{Hom}(V, W) = \prod_{\phi \in \text{Hom}(V, U)} \text{Hom}_\phi(V, W),$$

wobei $\text{Hom}_\phi(V, W)$ die Menge der Morphismen $\varphi : V \rightarrow W$ ist, für die

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & \searrow \phi & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

kommutativ ist. Weiter gilt nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts

$$\text{Hom}_\phi(V, U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n}) = \text{Hom}_\phi(V, U_{i_0}) \times \dots \times \text{Hom}_\phi(V, U_{i_n}).$$

Setzen wir also

$$S(\phi) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_\phi(V, U_i),$$

so können wir den Komplex (11.12.3) wie folgt schreiben:

$$\bigoplus_{\phi \in \text{Hom}(V, U)} \left(\bigoplus_{S(\phi)} \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{S(\phi) \times S(\phi)} \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{S(\phi)^3} \mathbb{Z} \leftarrow \dots \right)$$

mit den offensichtlichen Differentialen in der Klammer

$$1_{j_0, \dots, j_p} \mapsto \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu 1_{j_0, \dots, \hat{j}_\nu, \dots, j_p}.$$

Der Komplex in der Klammer ist aber exakt: Eine kontrahierende Homotopie ist $(h^p)_{p \geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} h^p : \quad \bigoplus_{S(\phi)^{p+1}} \mathbb{Z} &\rightarrow \bigoplus_{S(\phi)^{p+2}} \mathbb{Z} \\ 1_{i_0, \dots, i_p} &\mapsto 1_{e, i_0, \dots, i_p}, \end{aligned}$$

wobei $e \in S(\phi)$ ein festes Element ist (Nachrechnen!).

Satz 11.13 Sei $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$ und $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ eine Überdeckung in \mathcal{T} und sei F eine Garbe (bezüglich \mathcal{T}). Es gibt eine Spektralsequenz

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathfrak{U}, \underline{H}^q(F)) &\Rightarrow H^{p+q}(U, F) \\ E_2^{p,q} = \check{H}^p(U, \underline{H}^q(F)) &\Rightarrow H^{p+q}(U, F). \end{aligned}$$

Hier werden Kohomologie und Čech-Kohomologie bezüglich \mathcal{T} genommen, und $\underline{H}^q(F)$ ist die Prägarbe

$$V \mapsto H^q(V, F).$$

Beweis Erste Spektralsequenz: Wir wenden Grothendiecks Satz an (Satz 6.8). Es ist offenbar

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(F)) = H^0(U, F),$$

da F eine Garbe ist, also $H^0(U, -)$ die Komposition von $\underline{H}^0(-)$ und $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$. Weiter ist für eine injektive Garbe I die Prägarbe $\underline{H}^0(I)$ azyklisch für $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$, d.h.,

$$R^n \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(I)) \stackrel{11.11}{=} \check{H}^n(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(I)) = \check{H}^n(\mathfrak{U}, I) = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

Denn die Einbettung $i : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Pr(\mathcal{X})$ erhält Injektive, da i das exakte Linksadjungierte a besitzt (siehe Koh. Sch., Lemma 11.2). Daher ist I auch injektiv als Prägarbe, und die letzte Gleichung folgt aus Lemma 11.12.

Die zweite Spektralsequenz folgt analog, oder durch Übergang zum Limes über alle Überdeckungen von U .

Corollar 11.14 Es gibt eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\underline{H}^q(F)) \rightarrow \underline{H}^{p+q}(F).$$

Beweis Betrachte die zweite Spektralsequenz in 11.13 für alle U in \mathcal{X} und beachte, dass sie funktoriell (kontravariant) in U ist.

Proposition 11.15 Es gilt

$$\check{H}^0(U, \underline{H}^q(F)) = 0 \quad \text{für } q > 0,$$

also auch $\check{H}^0(\underline{H}^q(F)) = 0$ für $q > 0$.

Beweis Sei $F \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung in $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Dann ist $\underline{H}^q(F)$ die q -te Kohomologie-Prägarbe des Komplexes $i(I)$. Da a exakt ist, kommutiert a mit dem Nehmen von Kohomologie, also ist $a\underline{H}^q(F) = \mathcal{H}^q(aiI) = \mathcal{H}^q(I) = 0$ für $q > 0$ (Hier bezeichnet \mathcal{H}^q die q -te Kohomologie-Garbe). Aber $\check{H}^0(\underline{H}^q(F))$ ist eine Unter-Prägarbe von $a\underline{H}^q(F) = \check{H}^0 \check{H}^0(\underline{H}^q(F))$ (da $\check{H}^0(P)$ für jede Prägarbe P separiert ist, siehe Lemma 3.10 (c) und beachte, dass nach Definition $\tilde{P} = \check{H}^0(P)$). Also ist $\check{H}^0(\underline{H}^q(F)) = 0$ für alle $q > 0$, also $\check{H}^0(U, \underline{H}^q(F)) = 0$ für alle U .

Corollar 11.16 Für jede Garbe F auf $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ und jedes U in \mathcal{X} gibt es kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \check{H}^0(U, F) &\cong H^0(U, F) \\ \check{H}^1(U, F) &\cong H^1(U, F) \end{aligned}$$

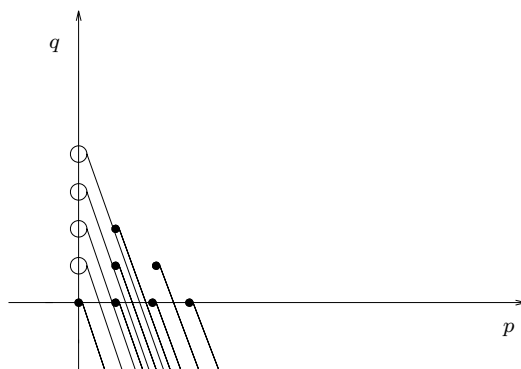
und eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^2(U, F) \rightarrow H^2(U, F) \rightarrow \check{H}^1(U, \underline{H}^1(F)) \rightarrow \check{H}^3(U, F) \rightarrow H^3(U, F)$$

Beweis Die Spektralsequenz

$$\check{H}^p(U, \underline{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(U, F)$$

hat die folgende Gestalt (auf der q -Achse sind Anfangsterme null, außer im Ursprung)



Die erste Aussage in 11.16 ist klar, da F eine Garbe ist, und aus dem Bild folgt

$$\begin{aligned} H^1(U, F) &\cong E_2^{1,0} = \check{H}^1(U, \underline{H}^0(F)) \\ &= \check{H}^1(U, F), \end{aligned}$$

da $E_2^{0,1} = 0$ und alle Differentiale von und nach $E_2^{1,0}$ null sind. Die Herleitung der letzten Sequenz ist analog zum Beweis der üblichen Sequenz der niedrigen Terme (Lemma 6.7).

Corollar 11.17 (vergleiche Koh. Sch., Corollar 8.15, für endliches I) Sei X ein Schema und \mathcal{F} ein quasi-kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so dass

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$$

für alle n und alle $i_0, \dots, i_n \in I$ affin ist. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F})$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis Wir benutzen die Spektralsequenz

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Für $q > 0$ ist $H^q(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}, \mathcal{F}) = 0$ nach Serres Verschwindungssatz (Koh. Sch., Satz 8.6). Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Definition 11.18 Eine Garbe F auf einem Situs $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ heißt **welk**, wenn $H^n(U, F) = 0$ für alle $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$ und alle $n > 0$.

Beispiel 11.19 Jede injektive Garbe ist welk.

Proposition 11.20 Für eine Garbe F sind äquivalent:

- (a) F ist welk.
- (b) Für jedes U in \mathcal{X} und jede Überdeckung \mathfrak{U} von U (in einer kofinalen Familie) ist $\check{H}^n(\mathfrak{U}, F) = 0$ für $n > 0$.
- (c) $\check{H}^n(U, F) = 0$ für alle U in \mathcal{X} und alle $n > 0$.

Beweis (a) \Rightarrow (b): Ist F welk, so ist $\underline{H}^q(F) = 0$ für $q > 0$. Die erste Spektralsequenz aus 11.13 liefert also

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, F) = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

(b) \Rightarrow (c): Folgt durch induktiven Limes über alle Überdeckungen von U .

(c) \Rightarrow (a): Nach Voraussetzung gilt $\check{H}^n(F) = 0$ für $n > 0$. Nach Corollar 11.16 ist also $\underline{H}^1(F) = 0$. Wir führen nun Induktion über n , mit der Spektralsequenz aus 11.14

$$\check{H}^p(H^q(F)) \Rightarrow \underline{H}^{p+q}(F).$$

Nach Voraussetzung ist $\check{H}^2(\underline{H}^0(F)) = \check{H}^2(F) = 0$, weiter ist $\check{H}^1(\underline{H}^1(F)) = 0$ und $\check{H}^0(\underline{H}^2(F)) = 0$ nach 11.15. Aus der Spektralsequenz folgt nun $\underline{H}^2(F) = 0$. Dasselbe Argument zeigt nun induktiv

$$\check{H}^i(\underline{H}^j(F)) = 0 \quad \text{für } i + j \leq n$$

und damit $\underline{H}^n(F) = 0$.

Corollar 11.21 Sei $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Siten. Ist F' eine welke Garbe auf $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$, so ist f_*F' ebenfalls welk.

Beweis Sei $f^0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ der unterliegende Funktor. Ist $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ eine Überdeckung in \mathcal{T} , so ist $\mathfrak{U}' = (f^0U_i \rightarrow f^0U)$ eine Überdeckung in \mathcal{T}' und es ist

$$(f_*F')(V) = F(f^0V)$$

für alle V in \mathcal{X} . Daher ist

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, f_*F') = \check{H}^n(\mathfrak{U}', F') = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

Corollar 11.22 (Leray Spektralsequenz) (a) Ist $f : (\mathcal{X}'', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Siten, so hat man für jede Garbe F' auf $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ und jedes $U \in \mathcal{X}$ eine Spektralsequenz

$$H^p(U, R^q f_* F') \Rightarrow H^{p+q}(f^0 U, F').$$

(b) Sind $(\mathcal{X}'', \mathcal{T}'') \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ Morphismen von Siten, so gibt es für jede Garbe F'' auf $(\mathcal{X}'', \mathcal{T}'')$ eine Spektralsequenz

$$R^p f_* R^q g_* F'' \Rightarrow R(gf)_* F''.$$

Beweis Dies folgt aus Satz 6.8 (Grothendieck-Spektralsequenz), da f_* welche Garben in welche Garben überführt, also azyklische für $H^0(U, -)$, und ebenso g_* welche Garben in welche Garben, also azyklische für f_* . Denn $R^n f_* F'$ ist die zur Prägarbe $U \mapsto H^n(f^0 U, F')$ assoziierte Garbe, und die Prägarbe ist bereits 0, falls F' wek ist.

12 Vergleich von Siten

Proposition 12.1 (Wechsel der Kategorie) Sei $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ ein Situs, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ eine volle Unterkategorie und \mathcal{T} die Einschränkung von \mathcal{T}' auf \mathcal{X} .

Es gelte:

(12.1.1) Für jedes Objekt U in \mathcal{X} und jede Überdeckung $(U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T}' seien alle U_i bereits in \mathcal{X} .

Für den Morphismus von Siten

$$\alpha : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T}),$$

der durch die Einbettung $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}'$ gegeben ist gilt:

(a) Der Funktor $\alpha_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ist exakt, und die Adjunktion $F \rightarrow \alpha_* \alpha^* F$ ist für alle $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ein Isomorphismus.

(b) Der Funktor $\alpha^* : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ ist volltreu.

(c) Die kanonischen Homomorphismen

$$\begin{aligned} H^n(U, \mathcal{T}; \alpha_* F') &\rightarrow H^n(U, \mathcal{T}'; F') \\ H^n(U, \mathcal{T}; F) &\rightarrow H^n(U, \mathcal{T}'; \alpha^* F) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen für alle $U \in \mathcal{X}$, alle $F' \in Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$, alle $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ und alle $n \geq 0$.

Beweis (a) α_* ist einfach die Einschränkung; wegen (12.1.1) ist daher die Exaktheit klar. Weiter ist für jedes $U \in \mathcal{X}$ und $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$

$$(\alpha^P F)(U) = F(U),$$

da die Kategorie I_U , über die der Limes für $(\alpha^P F)(U)$ gebildet wird, das initiale Objekt (U, id_U) besitzt. Da F eingeschränkt auf $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ eine Garbe ist, ist $(\alpha^* F)(U) = (\alpha \alpha^P F)(U) = F(U)$. Es folgt

$$(\alpha_* \alpha^* F)(U) = (\alpha^* F)(U) = F(U),$$

also die zweite Behauptung.

(b) Dies folgt aus dem eben Bewiesenen.

(c) Da α_* exakt ist, liefert die Leray-Spektralsequenz 11.22

$$H^p(U, R^q \alpha_* F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F)$$

einen Kantenhomomorphismus

$$H^n(U, \alpha_* F) \rightarrow H^n(U, F)$$

(der auch explizit beschrieben werden kann), der ein Isomorphismus ist (da $R^q \alpha_* F = 0$ für $q > 0$ wegen der Exaktheit von α_*).

Die zweite Aussage folgt daraus, dass die Komposition

$$H^n(U, F) \rightarrow H^n(U, \alpha^* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, \alpha_* \alpha^* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, F)$$

die Identität ist (betrachte injektive Auflösungen).

Beispiel 12.2 Man kann dies auf den Morphismus von Siten

$$\alpha : (Sch/X)_E \rightarrow X_E$$

anwenden, wobei X ein Schema ist, E eine zulässige Klasse von Morphismen, $(Sch/X)_E$ die Kategorie aller X -Schemata mit den E -Überdeckungen als Topologie (der große E -Situs) und X_E die Kategorie aller X -Schemata U , für die der Strukturmorphismus $U \rightarrow X$ in E ist, mit den E -Überdeckungen als Topologie (der kleine E -Situs). Insbesondere liefern der große étale Situs $(Sch/X)_{\acute{e}t}$ und der kleine étale Situs $X_{\acute{e}t}$ "dieselbe Kohomologie" (vermöge α_* bzw. α^*).

Proposition 12.3 (Wechsel der Topologie) Sei \mathcal{X} eine Kategorie und seien $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ Topologien auf \mathcal{X} (jede Überdeckung für \mathcal{T} ist auch eine Überdeckung für \mathcal{T}'). Sei

$$\beta : (\mathcal{X}, \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

der Morphismus von Siten, der durch $id_{\mathcal{X}}$ gegeben ist. Für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T}' gebe es eine Überdeckung $(V_j \rightarrow U)$ in \mathcal{T} , die \mathfrak{U} verfeinert. Dann ist $\beta_* : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ exakt und daher

$$H^n(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \beta_* F') \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\mathcal{T}'}, F')$$

für jede Garbe $F' \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}')$.

Beweis: Der Funktor β_* ist die Identität. Wir haben nur zu zeigen, dass jeder Epimorphismus $F \rightarrow F''$ für \mathcal{T}' auch ein Epimorphismus für \mathcal{T} ist. Ist $U \in ob(\mathcal{X})$ und $s \in F''(U)$, so gibt es eine Überdeckung $(U_i \rightarrow U)$ in \mathcal{T}' , so dass $s|_{U_i}$ im Bild von $F(U_i) \rightarrow F''(U_i)$ ist, für alle i . Ist nun $(V_j \rightarrow U) \in \mathcal{T}$ eine Verfeinerung von $(U_i \rightarrow U)$, und faktorisiert $V_j \rightarrow U$ als $V_j \rightarrow U_i \rightarrow U$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(V_j) & \longrightarrow & F''(V_j) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F(U_i) & \longrightarrow & F''(U_i), \end{array}$$

das zeigt, dass $s|_{V_j}$ im Bild der oberen Abbildung liegt. Also ist β_* exakt. Die zweite Behauptung folgt aus der Leray-Spektralsequenz, da $R^p \beta_* F' = 0$ für $p > 0$ wegen der Exaktheit von β_* .

Corollar 12.4 Sei X ein Schema, und seien $E \subset E'$ zwei zulässige Klassen von Morphismen, so dass für die zugehörigen Topologien $(E) \subset (E')$ die Verfeinerungsbedingung aus 12.3 gilt. Dann ist für den Morphismus kleiner Siten

$$\gamma : X_{E'} \rightarrow X_E$$

der Funktor $\gamma_* : Sh(X_{E'}) \rightarrow Sh(X_E)$ exakt, also

$$H^n(U, E; \gamma_* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, E', F).$$

Beweis Sei $E-Sch/X$ die Kategorie der X -Schemata U , deren Strukturmorphismus $U \rightarrow X$ in E liegt. Dann faktorisiert γ als

$$\gamma : X_{E'} \xrightarrow{\beta} (E' - Sch/X)_E \xrightarrow{\alpha} (E - Sch/X)_E = X_E$$

und die Behauptung folgt aus 12.1 (Exaktheit von α_*) und 12.3 (Exaktheit von β_*).

Beispiel 12.5 Beispiele für Corollar 12.4 sind

- (a) (étale Morphismen von endlichem Typ) \subset (ét)
- (b) (ét) \subset (fl), falls X quasi-kompakt ist (Milne, *Étale Cohomology*, I 3.26).
- (c) (fpqc) \subset (fl), wobei (fpqf) die Klasse der flachen quasi-endlichen Morphismen ist. (Milne, I 2.25).

Satz 12.6 (quasi-kohärenter \mathcal{O}_X -Moduln) Sei X ein Schema und \mathcal{M} ein quasi-kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Seien $\mathcal{M}_{\text{ét}}$ und \mathcal{M}_{fl} die zugehörigen Garben in der étalen bzw. flachen Topologie (siehe 10.17). Dann ist

$$H^n(X_{\text{Zar}}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{ét}}, \mathcal{M}_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{fl}}, \mathcal{M}_{\text{fl}})$$

für alle n .

Beweis Wir führen den Beweis für die flache Topologie, der Fall der étalen Topologie ist analog. Sei

$$f : X_{\text{fl}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$$

der Morphismus von Siten (siehe 12.4). Offenbar ist $f_*\mathcal{M}_{\text{fl}} = \mathcal{M}$, also genügt es zu zeigen, dass $R^n f_*\mathcal{M}_{\text{fl}} = 0$ für $n > 0$ (dann folgt die Behauptung aus der Leray-Spektralsequenz). Da $R^n f_*\mathcal{M}_{\text{fl}}$ die zur Prägarbe $U \mapsto H^n(U_{\text{fl}}, \mathcal{M}_{\text{fl}})$ assoziierte Zariski-Garbe ist, genügt es zu zeigen, dass $H^n(U_{\text{fl}})\mathcal{M}_{\text{fl}} = 0$, falls $U = \text{Spec}(A) \subseteq X$ affin offen ist. Weiter können wir noch Corollar 12.4 den kleinen Situs U_E betrachten, wo E die Klasse der flachen affinen Morphismen von endlichem Typ ist. Wir wollen zeigen, dass \mathcal{M}_{fl} weik ist, und nach 11.20 genügt es zu zeigen, dass $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_{\text{fl}}) = 0$ für alle $n > 0$ und alle Überdeckungen $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ in E ist. Wegen 10.6 und der Quasi-Kompaktheit von U können wir annehmen, dass I endlich ist (kofinales System von E -Überdeckungen!). Dann ist $V = \coprod_i U_i = \text{Spec}(B)$ affin und $A \rightarrow B$ treuflach, und der Čech-Komplex wird der offensichtliche Komplex

$$B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow \dots,$$

der exakt in den Graden ≥ 1 ist (Koh. Sch., Satz 8.12).

Bemerkung 12.7 (Vergleichsisomorphismus über \mathbb{C}). Sei X ein glatte Varietät über \mathbb{C} . Dann folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass die Menge $X(\mathbb{C})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist: Es reicht, dies lokal zu zeigen. Lokal ist aber

$$X = \text{Spec}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_n \rangle),$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P) \right) \neq 0$$

für alle abgeschlossenen Punkte P von X . Dann ist

$$X(\mathbb{C}) \cong \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_j(a) = 0 \quad \forall j\},$$

die f_i definieren stetige Abbildungen

$$f_i : X(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C},$$

und die obige Matrix ist die übliche Jacobi-Matrix bei P . Der Satz über implizite Funktionen liefert lokale Homöomorphismen

$$X(\mathbb{C}) \supseteq V \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{C}^n,$$

und so erhält man die Karten für $X(\mathbb{C})$ als Mannigfaltigkeit.

Nach Artin und Grothendieck gibt es für jede glatte Varietät X/\mathbb{C} Isomorphismen für alle m und n

$$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Hierbei steht links die (topologische) Garbenkohomologie der konstanten Garbe, und rechts die étale Kohomologie.