Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Franziska Schneider

SS 2011
Blatt 0

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Abgabe: keine Abgabe, Besprechung in den Übungen

Aufgabe 1. Es seien A, B Mengen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(i) $B \subset A$,

(ii) $B \cup A = A$,

(iii) $B \cap A = B$,

(iv) $B \setminus A = \emptyset$.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie sowohl durch Umformung, als auch mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Ausdrücke Tautologien sind:

(i) $(A \vee B) \Longrightarrow \big((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A)\big)$,

(ii) $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Longleftrightarrow \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$.

Aufgabe 3. Drücken Sie folgende Aussagen durch Quantoren aus. Wie lautet deren Verneinung?

(i) Zu je zwei natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$.

(ii) Es gibt eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$, so dass es zu jedem $a \in A$ unendlich viele $b \in A$ mit $b > a$ gibt.

(iii) Entscheiden Sie, ob obige Aussagen wahr oder falsch sind.

Aufgabe 4. Was bedeuten folgende Aussagen umgangssprachlich?

(i)
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, l \in \mathbb{N} : \big[\big(\neg(m = kl) \vee k = 1 \vee l = 1\big) \wedge m > n\big].$$

Halten Sie die Aussage für wahr?

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, m \in M : \big[m \leq x \wedge \big(\forall\, n \in M : n \leq x \Rightarrow n \leq m\big)\big].$$

Stimmt die Aussage für $M = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$ bzw. $M = \mathbb{R}$?