

## Übungen zur Algebraischen Geometrie I

### Blatt 13

(Abgabe am 08.02.2005 vor der Vorlesung)

- 49) Sei  $A$  ein Ring und  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathbb{A}_A^n$  der  $n$ -dimensionale affine Raum über  $A$ , und sei  $X = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$ . Zeigen Sie: Für jedes  $A$ -Schema  $T$  gibt es kanonische Bijektionen (links sind jeweils Morphismen von  $A$ -Schemata gemeint):
- (a)  $\mathbb{A}_A^n(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_T(T)^n$ ,
  - (b)  $X(T) \xrightarrow{\sim} \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}_T(T)^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m\}$
- 50) Sei  $A$  ein Ring und  $X = \mathbb{P}_A^n$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}_X(X) = A$  (Tipp: Benutzen Sie die kanonische offene Überdeckung  $(U_i)_{i=0, \dots, n}$ ,  $U_i = D_+(T_i)$ , und die Garbeneigenschaft von  $\mathcal{O}_X$ ). Folgern Sie, dass  $\mathbb{P}_A^n$  nur für  $n = 0$  affin ist.
- 51) Sei  $B$  ein noetherscher graduerter Ring. Zeigen Sie:
- (a) Für jedes homogene  $f \in B$  ist  $B_{(f)}$  noethersch.
  - (b)  $\text{Proj } B$  ist noethersch.
- 52) Untersuchen Sie für folgende Körper  $k$  und projektive  $k$ -Schemata  $X$ , ob  $X(k)$  endlich ist. Falls ja, bestimmen Sie  $X(k)$ .
- a)  $k = \mathbb{R}$ ,  $X = \text{Proj } k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2)$ .
  - b)  $k = \mathbb{Q}$ ,  $X = \text{Proj } k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2)$ .
  - c)  $k = \mathbb{C}$ ,  $X = \text{Proj } k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2, X^3 + Y^3 - Z^3)$ .