

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 9

(Abgabe am 11.01.2005 vor der Vorlesung)

Auf diesem Blatt sei X immer ein topologischer Raum.

33) Sei \mathcal{F} eine Garbe auf X , und seien $s, t \in \mathcal{F}(X)$. Zeigen Sie, dass $\{x \in X \mid s_x = t_x\}$ offen in X ist.

34) Für eine abelsche Gruppe A sei \underline{A} die zugehörige konstante Garbe, also die assoziierte Garbe zur Prägarbe A^P mit $A^P(U) = A$ für $U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, dass,

$$\underline{A}(U) = \{\text{lokal konstante Abbildungen } f : U \rightarrow A\},$$

mit den offensichtlichen Restriktionen. Zeigen Sie, dass $\underline{A}(U) = A$ genau dann, wenn U zusammenhängend ist.

35) Für eine Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen auf X heißt $\text{Supp } \mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ der Träger von \mathcal{F} . Sei $j : U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge, und sei $i : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion des abgeschlossenen Komplements.

(a) Bestimmen Sie den Träger der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{Z}}$.

(b) Bestimmen Sie den Träger von $i_* i^{-1} \underline{\mathbb{Z}}$.

(c) Für eine Garbe \mathcal{G} auf U sei $j_! \mathcal{G}$ die Garbe auf X , die assoziiert ist zur Prägarbe \mathcal{G}' mit $\mathcal{G}'(V) = \mathcal{G}(V)$ für $V \subseteq U$ und $\mathcal{G}'(V) = 0$ für $V \not\subseteq U$. Bestimmen Sie den Träger von $j_! \mathcal{G}$ und $j_! j^{-1} \underline{\mathbb{Z}}$.

36) Sei \mathcal{B} eine Basis der Topologie von X und sei \mathcal{F}_0 eine \mathcal{B} -Garbe. Für $x \in X$ sei $\mathcal{B}(x) = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$ und

$$\mathcal{F}_{0,x} = \varinjlim_{V \in \mathcal{B}(x)} \mathcal{F}_0(V)$$

der induktive Limes bezüglich der Restriktionsabbildungen. Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_{0,x} \mid \text{für alle } x \in U \text{ existiert ein } U_x \in \mathcal{B}(x) \text{ und ein } s^{(x)} \in \mathcal{F}_0(U_x) \text{ mit } (s^{(x)})_y = f(y) \text{ für alle } y \in U_x\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Mit den Einschränkungabbildungen $f \mapsto f|_V$ für $V \subseteq U$ offen erhält man eine Prägarbe \mathcal{F} auf X .
- (b) \mathcal{F} ist eine Garbe.
- (c) Für $V \in \mathcal{B}$ hat man eine kanonische Bijektion $\varphi_V : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, $s \mapsto f$ mit $f(x) = s_x$. (Tipp: Man überlege sich, dass für $V \in \mathcal{B}$ die Abbildung $\mathcal{F}_0(V) \rightarrow \prod_{x \in V} \mathcal{F}_{0,x}$, $s \mapsto (s_x)$, injektiv ist).