Universität Regensburg
NWF I – Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

WS 2007/08
25.01.08

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Blatt 13

(Abgabe am 01.02.08 vor der Vorlesung)

49. Sei p eine ungerade Primzahl, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ und $K = \mathbb{Q}(\zeta) \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

    (i) Sei $K_+ = K \cap \mathbb{R}$. Dann ist die Sequenz

    $$1 \longrightarrow \mathcal{O}_{K_+}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \xrightarrow{\varphi} \mu_p \longrightarrow 1$$

    exakt, wobei $\varphi(u) = \overline{u}/u$ (Tipp: Zeigen Sie $\varphi(\mu_p) = \mu_p$).

    (ii) $\mathcal{O}_K^\times = \mu_p \times \mathcal{O}_{K_+}^\times$.

    (Bonusaufgabe: +2 Punkte) Bestimmen Sie $\mathcal{O}_K^\times$ für $p = 5$.

50. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Zahlkörpers K. Zeigen Sie:

    Die Abbildung $v_\mathfrak{p} : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit

    $$v_\mathfrak{p}(\alpha) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha = 0 \\ n_\mathfrak{p} & \text{falls } \alpha \neq 0 \quad \text{und} \quad (\alpha) = \prod_\mathfrak{q} \mathfrak{q}^{n_\mathfrak{q}} \end{cases}$$

    ist eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring $(\mathcal{O}_K)_\mathfrak{p}$.

51. Zeigen Sie, dass die Folge in $\mathbb{Q}$

    $$3, 34, 334, 3334, \ldots$$

    bezüglich der 5-adischen Bewertung konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

52. (i) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Zeigen Sie dass die Bewertungen $x \mapsto |x|_\sigma = |\sigma x|$ für die verschiedenen Einbettungen $\sigma : K \to \mathbb{R}$ nicht äquivalent sind.

    (ii) Sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie dass die $\mathfrak{p}$-adischen Bewertungen verschiedener Primideale $\mathfrak{p}$ nicht äquivalent sind.

    (iii)(Bonusaufgabe: +2 Punkte) Zeigen Sie für einen beliebigen Zahlkörper K, dass für Einbettungen $\sigma, \tau : K \to \mathbb{C}$ die Bewertungen $|\ |_\sigma$ und $|\ |_\tau$ genau dann äquivalent sind, wenn $\tau = \sigma$ oder $\tau = \overline{\sigma}$.