

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 2

21. Oktober 2008

Aufgabe 1. Sei k ein Körper und \bar{k} ein algebraischer Abschluss von k . Zu jedem Punkt $x \in \bar{k}^n$ betrachte man den Einsetzhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_x : k[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow \bar{k}, \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ideale des Typs $\ker \phi_x$ gerade die maximalen Ideale von $k[X_1, \dots, X_n]$ sind, d.h. dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{k}^n &\rightarrow \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]), \\ x &\mapsto \ker \phi_x \end{aligned}$$

wohldefiniert und surjektiv ist.

Zusatz: Wann ist diese Abbildung auch injektiv?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei k ein Körper. Zeigen Sie mit Hilfe des Hilbert'schen Nullstellensatzes, dass für jeden Homomorphismus von endlich erzeugten k -Algebren A, B

$$\psi : A \rightarrow B$$

Urbilder maximaler Ideale $\mathfrak{m} \subseteq B$ maximale Ideale von A sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. a) Sei k ein Körper und $\mathfrak{m} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass es n Polynome f_i gibt, so dass für $i \leq n$ jedes f_i normiertes Polynom in X_i mit Koeffizienten in $k[X_1, \dots, X_{i-1}]$ ist und

$$\mathfrak{m} \cap k[X_1, \dots, X_i] = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$$

für $i \leq n$ gilt. Insbesondere ist $\mathfrak{m} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, wird also von n Elementen erzeugt.

b) Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subseteq R[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal, so dass $\mathfrak{m} \cap R \subseteq R$ ein von m Elementen erzeugtes maximales Ideal von R ist. Zeigen Sie, dass dann \mathfrak{m} von $m + n$ Elementen erzeugt wird.

Hinweis: Gehen Sie für Teil a) induktiv wie in Teil b) vor und nutzen Sie Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine algebraische Teilmenge. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ gibt, so dass $V = Z(f)$ ist. Gilt derselbe Schluss für $V \subseteq \mathbb{C}^n$ bzw. \mathbb{Q}^n ?

(4 Punkte)