Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 5

11. November 2008

In allen Aufgaben sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. Seien $f, g \in k[X, Y]$ teilerfremd (im Sinne der Teilertheorie in faktoriellen Ringen). Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $d \in k[X]$, $d \neq 0$, mit $d \in < f, g >$.
Hinweis: Schreibe $k[X, Y] = k[X][Y]$ und benutze die Sätze von Gauß aus der Algebra.

b) $Z(f, g)$ ist endlich.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei Z eine affine Varietät, deren unterliegender topologischer Raum endlich und irreduzibel ist, so besteht Z nur aus einem Punkt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ im Polynomring $k[X, Y]$ von einer der folgenden Formen ist:

a) das Nullideal (0),

b) ein Hauptideal (f) mit einem irreduziblen Polynom $f \in k[X, Y]$,

c) ein maximales Ideal $(X - a, Y - b)$ mit $a, b \in k$.

Hinweis: Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ enthält ein Primelement, d.h, ein irreduzibles Polynom.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) X ist irreduzibel.

b) Jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subseteq X$ ist dicht in X.

c) Jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subseteq X$ ist irreduzibel.

d) Jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subseteq X$ ist zusammenhängend.

(4 Punkte)

Abgabe: 18. November 2008