Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 6

18. November 2008

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge und A eine nicht-triviale abelsche Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass für offene Teilmengen $U \subseteq X$ durch

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A, & U \cap Y \neq \emptyset, \\ 0, & U \cap Y = \emptyset. \end{cases}$$

mit den natürlichen Abbildungen (d.h Identität bzw. Nullabbildung) eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ genau dann eine Garbe ist, wenn $Y \subseteq X$ irreduzibel ist.

c) Wann ist die *modifizierte konstante Prägarbe*, definiert durch

$$A^p(U) = \begin{cases} A, & U \neq \emptyset, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und die natürlichen Übergangsabbildungen (Identität bzw. Nullabbildung), eine Garbe?

(4 Punkte)

In den folgenden Aufgaben sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 2. Man betrachte den affinen Raum $\mathbb{A}^4(k)$ mit den Koordinaten X, Y, Z, W, die affine Varietät $V = Z(X \cdot W - Y \cdot Z) \subseteq \mathbb{A}^4(k)$ und die quasi-affine Varietät $U = (D(Y) \cup D(W)) \cap V$. Weiterhin sei $h : U \to \mathbb{A}^1(k)$ gegeben durch

$$h(w, x, y, z) = \begin{cases} x/y, & \text{für } y \neq 0, \\ z/w, & \text{für } w \neq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h eine wohldefinierte reguläre Funktion auf U ist, aber sich nicht global als Quotient von regulären Funktionen von V schreiben lässt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Man betrachte eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und eine festgewählte Standardkarte $\mathbb{A}^n(k) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Zeigen Sie, dass der topologische Abschluss $\bar{V} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von V gleich $Z_+(I^*)$ ist, wobei I das Verschwindungsideal von V ist und I^* das Ideal, das von allen Homogenisierungen f^* der Elemente $f \in I$ erzeugt wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Seien $p, q > 0$ fest gewählte ganze Zahlen, und sei $V = \{(t^p, t^q) \,|\, t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$. Zeigen Sie, dass V eine affine Varietät ist und bestimmen Sie das Verschwindungsideal $I(V) \subseteq k[X, Y]$.

(4 Punkte)

Zusatz: Wann ist V irreduzibel? *Hinweis*: (Irreduzibilitätskriterium) Sei K ein Körper, $a \in K^\times$. Dann ist das Polynom $X^n - a$ genau dann irreduzibel in $K[X]$, wenn folgende Bedingungen gelten:

- $a \notin (K^\times)^p$ für alle Primzahlen $p | n$,
- $a \notin -4(K^\times)^4$, falls $4 | n$.

Abgabe: 25. November 2008