§3 Affine Abbildungen

Im Folgenden seien X und Y affine Räume.

Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **affin**, wenn es eine lineare Abbildung $l : T(X) \to T(Y)$ gibt, so dass gilt $l(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ für alle $p, q \in X$. Hält man ein $p \in X$ fest, so gilt dann für alle $v \in T(X)$
$p + v \in X$ und $l(v) = l(\overrightarrow{p(p+v)}) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} = f(p+v) - f(p)$.

Fazit: l ist durch die affine Abbildung f eindeutig festgelegt.

Schreibe daher $T(f)$ für l (**Richtungsabbildung** von f).

Wichtigstes Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m, f : X \to Y$.

Behauptung: Genau dann ist f affin, wenn es eine lineare Abbildung
$l : X \to Y$ und ein $w \in Y$ gibt, so dass $f(x) = w + l(x)$ für alle $x \in X$.
Es ist dann $l = T(f)$.

Insbesondere:

(a) ($w = 0$): Jede lineare Abbildung $l : X \to Y$ ist affin.

(b) ($X = Y$ und $l = \mathrm{id}_Y$). Jede Translation $t_w : Y \to Y, y \mapsto w + y$ ist affin mit $T(t_w) = \mathrm{id}_Y$.

(c) Jede affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Zusammensetzung einer linearen Abbildung mit einer Translation.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei $f : X \to Y$ affin und $l = T(f)$. Wegen $0 \in Y$ ist $l(x) = T(f)(\overrightarrow{0x}) = \overrightarrow{f(0)f(x)} = f(x) - f(0)$. Setze $w := f(0)$.

„$\Leftarrow$“ Sei $l : X \to Y$ linear, $w \in Y$ und $f : X \to Y, x \mapsto w + l(x)$
Seien $p, q \in X$. Dann ist
$\overrightarrow{f(p)f(q)} = f(q) - f(p) = (w + l(q)) - (w + l(p)) = l(q) - l(p) = l(\overrightarrow{pq})$.
Also ist f affin und $T(f) = l$.

(3.1) Bemerkung: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gibt es ein $p_0 \in X$, so dass die Abbildung

$$\varphi : T(X) \to T(Y), \overrightarrow{p_0x} \mapsto \overrightarrow{f(p_0)f(x)}$$

linear ist, so ist f affin und $T(f) = \varphi$.
(Wegen $X = p_0 + T(X)$ ist $T(X) = \{\overrightarrow{p_0x} \mid x \in X\}$).

Beweis: Seien $p, q \in X$ beliebig. $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p}$.
Aus der Linearität von φ folgt
$\varphi(\overrightarrow{pq}) = \varphi(\overrightarrow{p_0q}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{f(p_0)f(q)} - \overrightarrow{f(p_0)f(p)} = \overrightarrow{f(p)f(q)}$
Also ist f affin und $T(f) = \varphi$.

(3.2) Bemerkung: Seien $p_0 \in X, q_0 \in Y$ und eine lineare Abbildung $l : T(X) \to T(Y)$ vorgegeben. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(p_0) = q_0$ und $l = T(f)$.

Beweis Eindeutigkeit: Sei $f : X \to Y$ affin mit $f(p_0) = q_0$ und $T(f) = l$.
Dann gilt für jedes $x \in X$
$\overrightarrow{f(p_0)f(x)} = l(\overrightarrow{p_0x})$, d.h. $f(x) = f(p_0) + l(\overrightarrow{p_0x}) = q_0 + l(\overrightarrow{p_0x})$
Also ist f durch die Vorgaben eindeutig festgelegt.

Existenz: Setze $f(x) := q_0 + l(\overrightarrow{p_0x})$. Aus der Linearität von l folgt $f(p_0) = q_0 + l(\overrightarrow{p_0p_0}) = q_0$ und $\overrightarrow{f(p_0)f(x)} = \overrightarrow{q_0f(x)} = f(x) - q_0 = l(\overrightarrow{p_0x})$ für alle $x \in X$
Nach 3.1 ist daher f affin und $T(f) = l$.

(3.3) Bemerkung: Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ affin.

a) $g \circ f : X \to Z$ ist affin und $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$

b) Genau dann ist f bijektiv (injektiv, surjektiv), wenn dies für $T(f)$ gilt.

c) Ist f bijektiv, so ist auch f^{-1} affin und $T(f^{-1}) = T(f)^{-1}$.

Beweis:

a) $T(g) \circ T(f)(\overrightarrow{pq}) = T(g)(T(f)(\overrightarrow{pq})) = T(g)(\overrightarrow{f(p)f(q)})$
$= \overrightarrow{g(f(p))g(f(q))} = \overrightarrow{(g \circ f)(p)(g \circ f)(q)}$.

b) und c) : Übungsaufgabe.

(3.4) Satz: Sei $f : X \to Y$ affin. Dann gilt:
Bilder und Urbilder affiner Unterräume unter f sind affin:

a) Ist $Z \subseteq X$ affin, so ist $f(Z) \subseteq Y$ affin, und $T(f(Z)) = T(f)(T(Z))$ falls $Z \neq \phi$.

b) Ist $Z \subseteq Y$ affin, so ist $f^{-1}(Z) \subseteq X$ affin.
Ist $f^{-1}(Z) \neq \phi$, so ist $T(f^{-1}(Z)) = T(f)^{-1}(T(Z))$.

Beweis:

a) OE sei $Z \neq \phi$. Wähle $p \in Z$ fest. Dann ist $\overrightarrow{f(p)f(z)} = T(f)(\overrightarrow{pz})$, d.h. $f(z) = f(p) + T(f)(\overrightarrow{pz})$ für alle $z \in Z$.
Wegen $T(Z) = \{\overrightarrow{pz} \mid z \in Z\}$ folgt
$f(Z) = f(p) + T(f)(T(Z))$, d.h. $f(Z)$ ist affin, $T(f(Z)) = T(f)(T(Z))$

b) OE sei $f^{-1}(Z) \neq \phi$. Wähle $p \in f^{-1}(Z)$ fest: $Z = f(p) + T(Z)$
$x \in f^{-1}(Z)$ genau dann, wenn $f(x) \in Z$, d.h.:
Es gibt ein $w \in T(Z)$ mit $f(x) = f(p) + w$, d.h.
$\overrightarrow{f(p)f(x)} \in T(Z)$, d.h. $T(f)(\overrightarrow{px}) \in T(Z)$, d.h.
$\overrightarrow{px} \in T(f)^{-1}(T(Z))$, d.h. $x = p + \overrightarrow{px} \in p + T(f)^{-1}(T(Z))$. Somit ist $f^{-1}(Z) = p + T(f)^{-1}(T(Z))$, was zu beweisen war.

(3.5) Bemerkung:

a) Jede Translation $t_w : X \to X (w \in T(X))$ ist affin und $T(t_w) = \mathrm{id}_{T(X)}$

b) Ist (umgekehrt) $f : X \to X$ affin und ist $T(f) = \mathrm{id}_{T(X)}$, so ist f eine Translation.

Beweis:

a) $\overrightarrow{t_w(p)t_w(q)} = \overrightarrow{(p+w)(q+w)} = q + w - p + w = \overrightarrow{pq}$.

b) Sei $p \in X$ fest und $x \in X$ variabel. Dann ist $\overrightarrow{f(p)f(x)} = T(f)(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{px}$, d.h.
$f(x) = (f(p) - p) + x = w + x$ für alle $x \in X$.

Definition: Eine bijektive affine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Affinität**.

Nach 3.3 gilt: Zusammensetzungen von Affinitiäten sind Affinitäten und mit f ist auch f^{-1} eine Affinität. Also bilden die Affinitäten $f : X \to X$ eine Gruppe. Ferner ist f genau dann eine Affinität, wenn $T(f)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Speziell sind Translationen Affinitäten. Nach 3.3 und 3.4 bilden Affinitäten Geraden auf Geraden, Ebenen auf Ebenen, usw., ab.

Allgemein gilt: Ist $f : X \to Y$ eine Affinität und $Z \subseteq X$ affin, so ist $f(Z) \subseteq Y$ affin (3.4) und $\dim f(Z) = \dim Z$ (3.3).

Definition: Affine Unterräume Y und Z von X heißen **parallel** („$Y \| Z$“), wenn

$$T(Y) \subseteq T(Z) \text{ oder } T(Z) \subseteq T(Y)$$

(3.6) Bemerkung:

a) Ist $Y \| Z$ und $Y \cap Z \neq \phi$, so gilt

$$Y \subseteq Z \text{ oder } Z \subseteq Y$$

Speziell: Ist $Y \| Z, \dim Y = \dim Z$ und $Y \cap Z \neq \phi$, so ist $Y = Z$.

b) Bei einer affinen Abbildung werden parallele Unterräume auf parallele Unterräume abgebildet.

Beweis:

a) Sei $p \in Y \cap Z$ und O.E. $T(Y) \subseteq T(Z)$. Dann ist $Y = p + T(Y) \subseteq p + T(Z) = Z$.

b) Sei O.E. $T(Z_1) \subseteq T(Z_2), Z_1$ und Z_2 parallel in X, und $f : X \to Y$ affin. Nach 3.3 ist dann

$$T(f(Z_1)) = T(f)(T(Z_1)) \subseteq T(f)(T(Z_2)) = T(f(Z_2)).$$

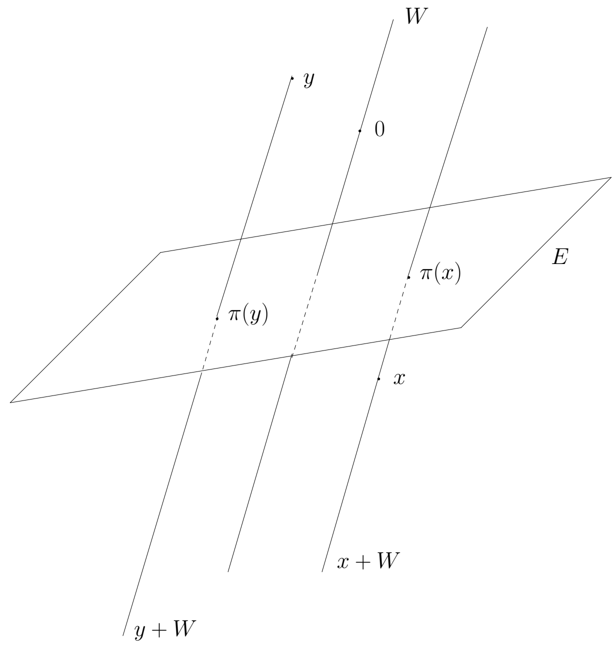
Parallelprojektionen:

Beispiel: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene, $w \in \mathbb{R}^3$ **kein** Richtungsvektor von E (d.h. $w \notin T(E)$). Sei $W = \mathbb{R} \cdot w$ die von w aufgespannte Gerade durch 0.

Die Parallelprojektion π von $\mathbb{R}^3$ **längs** W **auf die Ebene** E ist wie folgt erklärt: Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ ist $\pi(x)$ der Schnittpunkt der zu W parallelen Geraden durch x mit der Ebene E, d.h.

$$\{\pi(x)\} = (x + W) \cap E$$

($x + W \| W$, da $W = T(x + W) = T(W)$ und $x = x + 0 \in x + W$)



Wir werden sehen: $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ ist eine affine Abbildung. In der obigen Situation ist $\mathbb{R}^3 = W \oplus T(E)$.

Algebraische Vorbereitungen: Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $V = W \oplus W_1$ (wie oben) eine Zerlegung von V in eine direkte Summe von $\mathbb{R}$–Vektorräumen. Dann gilt:
Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$v = w + w_1 \text{ mit } w \in W \text{ und } w_1 \in W_1.$$

Man hat daher eine wohlbestimmte Abbildung

$$p_r : V \to W_1, v \mapsto w_1$$

p_r heißt **Projektion** längs W auf W_1.

Eigenschaften von p_r:

a) p_r ist linear;

b) Kern $p_r = W$

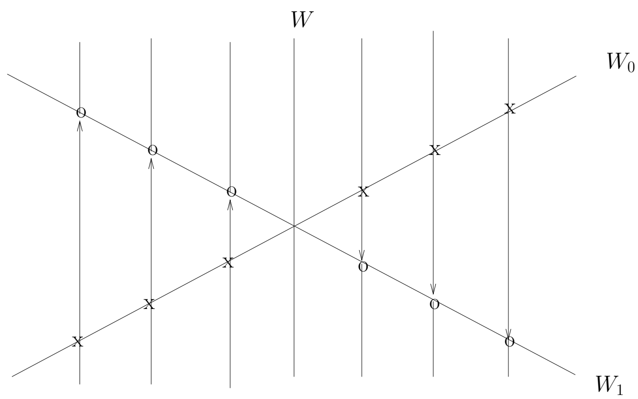
c) $p_r(w_1) = w_1$ für alle $w_1 \in W_1$. (Nachrechnen.)

Sei nun $\dim V = n < \infty$.

(3.7) Lemma: Sei $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1, p_r : V \to W_1$ wie oben und $p_r' : W_0 \to W_1 \quad w_0 \mapsto p_r(w_0)$ die Einschränkung von p_r auf W_0. Dann ist p_r' ein Isomorphismus.

Beweis: Wegen $\dim W_0 = \dim W_1 = n - \dim W$ genügt es zu zeigen, dass p_r' surjektiv ist.

Sei $w_1 \in W_1$. Wegen $V = W \oplus W_0$ schreibt sich w_1 in der Form $w_1 = w + w_0$ mit $w \in W$ und $w_0 \in W_0$. Es folgt $w_0 = (-w) + w_1$ mit $-w \in W$ und $w_1 \in W_1$. Definitionsgemäß ist daher $p_r'(w_0) = p_r(w_0) = w_1$. Also ist p_r' surjektiv.



Seien nun $Y_1 \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$ affine Unterräume.

Konstruktion von Parallelprojektionen von X auf Y_1:

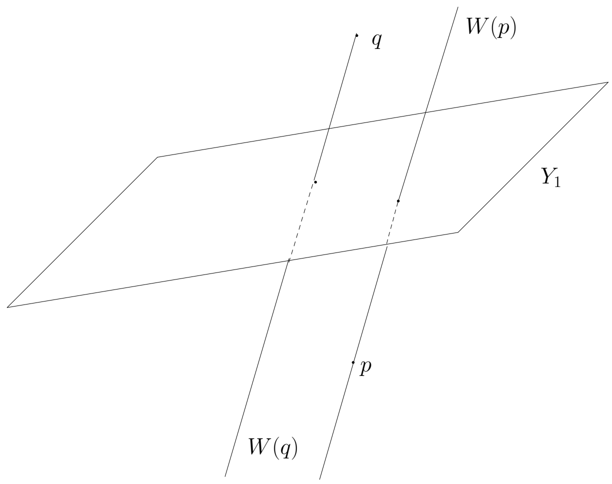
Wähle einen Untervektorraum $W \subseteq T(X)$, so dass

$$T(x) = W \oplus T(Y_1); \text{ schreibe } W_1 = T(Y_1)$$

Für $p \in X$ setze $W(p) := p + W = \{p + w | w \in W\}$. Dann ist $W(p) \subseteq X$ affin, $T(W(p)) = W$ und $p \in W(p)$, also

(i) $W(p) \| W(q)$ für alle $p, q \in X$.

(ii) $W(p) \cap W(q) = \phi$ oder $W(p) = W(q)$ nach (3.6).



(iii) $W(p) \cap Y_1$ besteht aus genau einem Punkt.

Beweis von (iii): Sei $m = \dim X$. Angenommen $W(p) \cap Y_1 = \phi$. Wegen $T(X) = W \oplus T(Y_1)$ folgt nach (2.5):

$$\begin{aligned} m &\geq \dim(W(p) \vee Y_1) = \dim W(p) + \dim Y_1 - \dim(W \cap T(Y_1)) + 1 \\ &= \dim W + \dim T(Y_1) + 1 = m + 1, \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also ist $W(p) \cap Y_1 \neq \phi$ und nach (2.1) gilt
$T(W(p) \cap Y_1) = T(W(p)) \cap T(Y_1) = W \cap T(Y_1) = \{0\}$ wegen $T(X) = W \oplus T(Y_1)$. Also besteht $W(p) \cap Y_1$ aus einem Punkt. Schreibe $W(p) \cdot Y_1$ für diesen Punkt.
Man erhält somit eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_W : X \to Y_1, p \mapsto W(p) \cdot Y_1,$$

die sog. **Parallelprojektion von X längs W auf Y_1.**

Behauptung: π_W ist affin und $T(\pi_W)$ ist die Projektion p_r von $T(X)$ längs W auf $W_1 = T(Y_1)$.

Beweis: Für $p, q \in X$ sei $p' = \pi_W(p)$ und $q' = \pi_W(q)$.
Wegen $p, p' \in W(p)$ ist $\overrightarrow{pp'} \in W = T(W(p))$.
" $q, q' \in W(q)$ ist $\overrightarrow{qq'} \in W = T(W(q))$.
" $p', q' \in Y_1$ ist $\overrightarrow{p'q'} \in W_1 = T(Y_1)$.

$\overrightarrow{pq} = (\overrightarrow{pp'} - \overrightarrow{qq'}) + \overrightarrow{p'q'} = w + w_1$ mit $w \in W, w_1 \in W_1$, also $p_r(\overrightarrow{pq}) = w_1 = \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}$. Nach 3.1 ist daher π_W affin und $T(\pi_W) = p_r$.

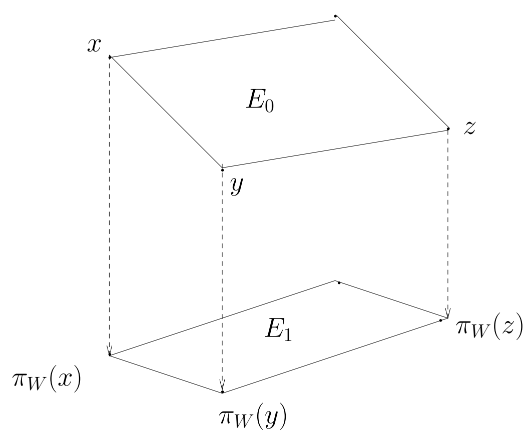
Sei nun $Y_0 \subseteq X$ ein weiterer affiner Unterraum, so dass $T(X) = W \oplus T(Y_0)$; schreibe $W_0 := T(Y_0)$.
$\pi'_W : Y_0 \to Y_1$ sei die Einschränkung von π_W auf Y_0.
Es ist dann $T(\pi'_W) = p_r\big|_{T(Y_0)}$.
Nach 3.7 ist $T(\pi'_W)$ ein Vektorraumisomorphismus, also ist nach 3.3
$\pi'_W : Y_0 \to Y_1$ eine Affinität. Insgesamt haben wir gesehen:

(3.8) Satz: Seien $Y_0, Y_1 \subseteq X$ affine Unterräume. Es gebe einen Untervektorraum $W \subseteq T(X)$, so dass

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1)$$

Dann ist $\pi_W : X \to Y_1$ eine affine Abbildung und $\pi_{W\big|_{Y_0}} : Y_0 \to Y_1$ ist eine Affinität.

Spezialfall: Sei $X = \mathbb{R}^3$ und seien $E_0 = p + U_0$ und $E_1 = q + U_1$ Ebenen. Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $w \notin U_0 \cup U_1$ und $W := \mathbb{R}w$. Dann liefert die Projektion $\pi_W : \mathbb{R}^3 \to E_1$ längs W eine Affinität $\pi'_W : E_0 \to E_1$.



Kollineationen: Eine Selbstabbildung $f : X \to X$ eines affinen Raums X heißt Kollineation, wenn sie bijektiv ist und Geraden in Geraden überführt.

Beispiel: Nach 3.3 und 3.4 ist jede Affinität $f : X \to X$ eine Kollineation. Es gilt auch umgekehrt der **Hauptsatz der affinen Geometrie** (ohne Beweis): Sei X affin, $\dim X \geq 2$. Genau dann ist $f : X \to X$ eine Affinität, wenn f eine Kollineation ist.