Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 3 — 17. April 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

1

(a) Für welche $\alpha \in K[[X]]$ ist die Gleichung $\alpha \cdot \beta = 1$ nach β lösbar?

(i) $\alpha = 1 + 4X + 4X^2$

(ii) $\alpha = 1 + 5X^2 + 6X^9$

(iii) $\alpha = (X + X^3)(1 + X + X^2 + X^3 + \dots)$

(b) Berechnen Sie β in (a)(i).

(c) Für welche α aus (a) ist die Gleichung $\alpha \circ \beta = X$ nach β lösbar.

2

Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z} f$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f$ für folgende Funktionen

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^k \cdot \overline{z}^m$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $f = \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

Welche f sind holomorph?

3

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\alpha_1 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{X^\nu}{\nu!} \qquad \alpha_2 = \sum_{v=0}^{\infty} \nu!\, X^\nu \qquad \alpha_3 = \sum_{v=0}^{\infty} X^\nu \qquad \alpha_4 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\nu} X^\nu \qquad \alpha_5 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} X^\nu$$

(b) Bestimmen Sie für $i = 1, \dots, 5$ unter welchen Bedingungen $\alpha_i(z)$ konvergiert, falls z auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt, d.h. untersuchen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho(\alpha_i)$, ob die Reihe $\alpha_i(z)$ konvergiert.

4 *Lokaler Umkehrsatz für komplex differenzierbare Funktionen.*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $f' : D \to \mathbb{C}$ stetig. Gegeben sei ein $z \in D$ mit $f'(z) \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $f|_{U_\epsilon(z)}$ ein Diffeomorphismus von $U_\epsilon(z)$ auf $f(U_\epsilon(z))$ ist. *Tipp: Benutzen Sie den lokalen Umkehrsatz für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Verwenden Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, um zu zeigen, dass die Funktionaldeterminante von f (im reellen Sinne) genau dann verschwindet, wenn $f'(z) = 0$.*

(b) Die Umkehrabbildung $g := \left(f|_{U_\epsilon(z)}\right)^{-1}$ ist holomorph.

Abgabe: Dienstag, 24. April 2001 zu Beginn der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`