Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 6 8. Mai 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

1 Sei $p(z)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + r\, e^{it}$.
Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \overline{p(z)}\, dz = 2\pi i\, r^2\, \overline{p'(a)}.$$

2 Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{dz}{z^3 + z^2 + z + 1}$$

längs dem Kreis $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$.

3 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Jede sternförmige Menge $M \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(b) Ist A einfach zusammenhängend und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch $f(A)$ einfach zusammenhängend.

(c) Ist $f : A \to \mathbb{C}$ stetig und $f(A)$ einfach zusammenhängend, so ist auch A einfach zusammenhängend.

(d) Sind A und B offen, ist $f : A \to B$ bijektiv und sind f und f^{-1}stetig differenzierbar, so ist A genau dann einfach zusammenhägend, wenn $f(A)$ einfach zusammenhängend.

4 Sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Sei $\gamma : [0,1] \to G$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

(a) Eine *Zerlegung* von $[0,1]$ ist eine endliche Teilmenge $\{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[0,1]$, so dass $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|,$$

wobei sich das Supremum über alle Zerlegungen mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ erstreckt.

(b) Sei $\tau : [0,1] \to [0,1]$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, d.h. eine bijektive Abbildung, so dass τ und τ^{-1} stückweise stetig differenzierbar und $\tau(0) = 0$ und $\tau(1) = 1$. Dann gilt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \tau)$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma \circ \tau} f(z)\, dz.$$

Abgabe: Dienstag, 15. Mai 2001 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`