Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 10 — 12. Juni 2001

---

1 Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

(b)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\, dx$$

2 Berechnen Sie die Integrale

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{1-2a\cos t + a^2} \quad \text{für } a \in \mathbb{R},$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(2t)\, dt}{1-2a\cos t + a^2} \quad \text{für } |a| < 1.$$

3 f und g seien auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ nullstellenfreie, analytische Funktionen. Weiter existiere eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in D$, $a_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante c gibt mit $f(z) = cg(z)$ für alle $z \in D$.

4 Es sei $f(z) := \frac{1}{e^z - 1}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von f auf einer punkierten Kreisscheibe um den Nullpunkt.

(a) Zeigen Sie: $a_{-k} = 0$ für $k \geq 2$.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{-1} und a_0.

(c) Zeigen Sie: $a_{2k} = 0$ für $k \geq 1$.

(d) Zeigen Sie: Für die Koeffizienten mit ungeradem positivem Index gilt die folgende Rekursionsformel:

$$\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{2 \cdot (2k)!} + \sum_{r=1}^{k} \frac{a_{2r-1}}{(2k-2r+1)!} = 0$$

Abgabe: Dienstag, 19. Juni 2001 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`