Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 12 26. Juni 2001

1 Wieviele Nullstellen hat das Polynom $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ auf der Einheitskreisscheibe?
Tipp: Satz von Rouché.

2 Bestimmen Sie die Menge aller Möbius-Transformationen, die die obere Halbebene

$$\{z = x + iy \mid y > 0\}$$

biholomorph auf die Einheitskreisscheibe

$$E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

abbilden.

3 Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, $0 \in \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in 0. Zeigen Sie, dass es Umgebungen U, V von 0 gibt, so dass $f(U) = V$ und für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ hat die Menge $\left(f|_U\right)^{-1}(v)$ genau k Elemente.

4 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion. Wir nehmen an, dass f doppelt periodisch ist, d.h. es gibt zwei (reell) linear unabhängige Zahlen ω_1 und ω_2, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = f(z + \omega_1),$$
$$f(z) = f(z + \omega_2).$$

Zeigen Sie:

(1) f ist surjektiv,

(2) die Anzahl der Nullstellen von f (mit Multiplizität) auf dem Parallelogramm $P = \{t\omega_1 + s\omega_2 \mid 0 \leq t, s < 1\}$ ist gleich der Anzahl der Pole von f (mit Multiplizität) auf P.

Abgabe: Dienstag, 3. Juli 2001 vor der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`