# ANALYSIS AUF MANNIGFALTIGKEITEN, INDEXTHEORIE UND SPIN-GEOMETRIE

BERND AMMANN, WS 2002/03

## WS 2002/03

Bemerkung: Ein Metrik auf einem komplexen Vektorbündeln ist in diesem Skript immer ein hermitesches (pos. definites) Skalarprodukt auf jeder Faser, das glatt vom Basispunkt abhängt.

Literaturempfehlungen: Besonders empfehle ich [Roe88] und [LM89].

In diesem Skript gilt $0 \in \mathbb{N}$, und 0 ist weder positiv noch negativ.

## 1. Clifford-Moduln und verallgemeinerte Dirac-Operatoren

**Definition 1.1.** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Ein *(komplexer) Clifford-Modul für* $(V, b)$ ist ein komplexer Vektorraum $W$ mit einer linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{cl} : V \otimes_{\mathbb{R}} W &\to W \\ v \otimes w &\mapsto v \cdot w, \end{aligned}$$

so dass

$$v_1 \cdot (v_2 \cdot w) + v_2 \cdot (v_1 \cdot w) + 2b(v_1, v_2)\, w = 0 \tag{1.2}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $w \in W$. Die Abbildung cl heißt Clifford-Multiplikation.

In manchen Anwendungen ist es auch sinnvoll, dass $W$ ein reeller Vektorraum ist. Aus jedem solchen reellen Clifford-Modul $W_{\mathbb{R}}$ erhält man durch Tensorieren mit $\mathbb{C}$, d.h. $\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, einen komplexen Clifford-Modul $W$. Die algebraische Struktur ist im reellen Fall aber komplizierter, deswegen wollen wir uns auf den komplexen Fall beschränken.

**Lemma 1.3.** *Die Gleichung (1.2) ist genau dann für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $w \in W$ erfüllt, wenn*

$$v \cdot (v \cdot w) = -b(v, v)\, w \qquad \forall v \in V, \quad w \in W. \tag{1.4}$$

*Beweis.* Für $v = v_1 = v_2$ folgt (1.4) direkt aus (1.2). Gilt nun andererseits (1.2) für $v = v_1$, $v = v_2$ und $v = v_1 + v_2$, so folgt durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (1.4). □

**Beispiele.**

(1) $b \equiv 0$, $W = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} (\Lambda^k V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =: \Lambda^*_{\mathbb{C}} V$, $\mathrm{cl}(v \otimes w) := v \wedge w$.
(2) Wir können das vorige Beispiel auf allgemeines $b$ verallgemeinern. Hierzu definieren wir

$$v \llcorner (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) := \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} b(v, v_1)\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_p \in \Lambda^{p-1} V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

wobei der Hut über $v_i$ bedeuten möge, dass wir das Glied $v_i$ auslassen. Wir definieren nun

$$\mathrm{cl}(v \otimes w) = v \cdot w := v \wedge w - v \llcorner w.$$

Um die Relation (1.4) zu verifizieren, wollen wir zunächst

$$v \wedge (v \llcorner w) + v \llcorner (v \wedge w) = b(v, v) w. \tag{1.5}$$

nachweisen. Man sieht leicht, dass diese Gleichung für $w = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ und $w = v \wedge v_2 \wedge \ldots v_k$ mit $b(v_i, v) = 0 \quad \forall i$ gilt. Da man jedes $w$ durch Linearkombination hieraus erhält, folgt (1.5).
Es gilt nun

$$v \cdot (v \cdot w) = \underbrace{v \wedge v \wedge w}_{0} - v \wedge (v \llcorner w) - v \llcorner (v \wedge w) + \underbrace{v \llcorner (v \llcorner w)}_{0} = -b(v, v) w.$$

**Bemerkung 1.6.** Sei $\mathcal{F}(V)$ die freie (assoziative) Algebra erzeugt von $V$, dh.

$$\mathcal{F}(V) = \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{i\text{-mal}}.$$

Sei $\mathcal{I}$ das Ideal, das von

$$\{v \otimes v + b(v, v) \mid v \in V\}$$

erzeugt wird. Dann heißt die Algebra $Cl(V, b) := \mathcal{F}(V)/\mathcal{I}$ die Clifford-Algebra von $(V, b)$. Ein Clifford-Modul ist eine Darstellung der Clifford-Algebra. Insbesondere folgt aus Beispiel 2, dass für $V \neq \{0\}$ die Clifford-Algebra nicht trivial ist, d.h. $Cl(V, b) \neq 1$, und dass die Abbildung $V \ni v \mapsto [v] \in Cl(V, b)$ injektiv ist.

**Definition 1.7.** Sei $(M, g)$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein komplexes Vektorbündel $W \to M$ mit einer Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, einem Zusammenhang $\nabla^W$ und einer Clifford-Multiplikation $\mathrm{cl} : T^*M \otimes W \to W$ heißt *Clifford-Bündel*, falls

(i) Für alle $p \in M$ ist $(W_p, \mathrm{cl}_p)$ ein Clifford-Modul für $(T^*_p M, g)$,
(ii) $\langle \alpha \cdot w_1, w_2 \rangle = -\langle w_1, \alpha \cdot w_2 \rangle \qquad \forall \alpha \in T^*_p M \quad \forall w_1, w_2 \in W_p$,
(iii) $\nabla^W$ is metrisch, d.h. $\partial_X \langle w_1, w_2 \rangle = \langle \nabla^W_X w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, \nabla^W_X w_2 \rangle$.
(iv) Für alle $X \in \Gamma(TM)$, alle $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ und alle $w \in \Gamma(W)$ gilt

$$\nabla^W_X (\alpha \cdot w) = (\nabla_X \alpha) \cdot w + \alpha \cdot \nabla^W_X w.$$

Alternativ könnten wir anstelle des **komplexen** Vektorbündels $W$ auch diesselben Eigenschaften für ein reelles oder quaternionisches Vektorbündel $W$ fordern. Dies erlaubt interessante Anwendungen, die wir leider in der Vorlesung nicht mehr behandeln können. Wir wollen uns deshalb auf komplexe Bündel $W$ beschränken.

**Beispiel.** Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $W = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad (=: \Lambda^*_{\mathbb{C}} T^*M)$, versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang und der Riemannschen Metrik und $b := g$ ist ein Clifford-Bündel. Die Eigenschaften (i) und (iii) sind trivial.

(ii) Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Orthonormal-Basis von $\Lambda^k T^*M$, $v = \alpha_s$. Man prüft dann

$$\langle \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_{k+1}}, \alpha_s \wedge \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k} \rangle = \langle \alpha_s \llcorner (\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_{k+1}}), \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k} \rangle$$

für alle möglichen Index-Kombinationen durch. Es folgt hieraus

$$\langle v \wedge w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, v \llcorner w_2 \rangle,$$

woraus die gewünschte Relation folgt.

(iv) Wir kennen bereits die Produktregel für $\alpha \wedge w$

$$\nabla_X(\alpha \wedge w) = (\nabla_X \alpha) \wedge w + \alpha \wedge \nabla_X w$$

Als Übungsaufgabe zeigen wir die Prodktregel für $\alpha \llcorner w$

$$\nabla_X(\alpha \llcorner w) = (\nabla_X \alpha) \llcorner w + \alpha \llcorner \nabla_X w.$$

(Tipp: Wenden Sie die Produktregel auf

$$\partial_X \langle \alpha \wedge w_1, w_2 \rangle = \partial_X \langle w_1, \alpha \llcorner w_2 \rangle$$

an.) Die Relation (iv) folgt daraus.

Für $w \in \Gamma(w)$ ist

$$(X \mapsto \nabla_X w) \in T^*M \otimes W \cong \mathrm{Hom}(TM, W).$$

**Definition 1.8.** Sei $(M,g)$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Clifford-Bündel $W$. Dann ist der *(verallgemeinerte) Dirac-Operator $D$ auf $W$* definiert als die Verkettung

$$\Gamma(W) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes W) \xrightarrow{\mathrm{cl}} \Gamma(W),$$

also $D = \mathrm{cl} \circ D$.

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $T_pM$, $e_1^b, \dots, e_n^b$ die duale Basis von $T_p^*M$, so rechnet man leicht nach

$$(Dw)|_p = \sum_{i=1}^n e_i^b \cdot (\nabla_{e_i} w)|_p.$$

**Beispiel.** Sei $W = \Lambda^*_{\mathbb{C}} T^*M$. Wir wollen $D\omega$ für $\omega \in \Gamma(W)$ berechnen. Wir nehmen einen auf einer offenen Teilmenge $U$ definierten orthonormalen Rahmen $(e_1, \dots, e_n)$, und schränken uns zunächst auf den Fall $\mathrm{supp}\,\omega \subset U$, $\mathrm{supp}\,\omega$ kompakt ein. Wir erhalten

$$D\omega = \sum e_j^b \cdot \nabla_{e_j} \omega = \sum e_j^b \wedge \nabla_{e_j} \omega - \sum e_j^b \llcorner \nabla_{e_j} \omega.$$

Der erste Term ist der total antisymmetrische Anteil von $\nabla\omega$ und dies ist bekanntlich $d\omega$. Wir definieren das Kodifferential $\delta\omega := -\sum e_j^b \llcorner \nabla_{e_j}\omega$.

$$D\omega = d\omega + \delta\omega \tag{1.9}$$

Da sowohl $D\omega$ als auch $d\omega$ nicht von der Wahl von $U$ und der Wahl der $e_i$ abhängt, tut dies auch nicht $\delta$. Da $\delta$ zudem lokal ist, kann man $\delta$ auch für beliebige $\omega \in \Gamma(W)$ definieren, also auch solche ohne kompakte Träger. Hierzu zerlegen wir zunächst $\omega = \sum \omega_i$, wobei $\operatorname{supp}\omega_i$ kompakt seien und in einer trivialisierenden offenen Menge $U_i$ liegen. Dann definieren wir $\delta\omega = \sum \delta\omega_i$. Später werden wir sehen, dass $\delta$ "formal adjungiert" zu $d$ bezüglich dem $L^2$-Skalarprodukt auf $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$ ist.

**Definition 1.10.** Den Operator $\Delta := (d+\delta)^2 : \Gamma(\Lambda^*_{\mathbb{C}} T^* M) \to \Gamma(\Lambda^*_{\mathbb{C}} T^* M)$ nennt man den Hodge-Laplace-Operator.

Wir wissen also, dass für $W = \Lambda^* T^* M$ gilt $D^2 = \Delta$. Später werden wir noch andere Clifford-Bündel kennenlernen.

## 2. Differentialoperatoren

Einige Vorbemerkungen zu Vektorbündeln: Wenn $V$ ein Vektorbündel ist, und $v_1, \ldots, v_k$ auf einer kleinen offenen Umgebung $U$ definierte glatte Schnitte von $V$ sind, so dass für jedes $p \in U$, die Vektoren $v_1(p), \ldots, v_k(p)$ eine Basis von $V_p$ bilden, so nennen wir das Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ einen lokalen Basisschnitt. Jeder lokale Basisschnitt liefert eine lokale Trivialisierung. Und umgekehrt liefert jede lokale Trivialisierung einen lokalen Basisschnitt.

Für ein gegebenes $p_0 \in M$ gibt es immer lokale Basisschnitte auf einer kleinen Umgebung, so dass $(\nabla_X v_i)|_{p_0} = 0$. Solche Basisschnitte heißen *synchron in* $p_0$.

Lokale Basisschnite von $TM$ heißen oft auch Rahmen. Ist die Basis zusätzlich in jedem Punkt orthonormal, so spricht man von orthonormalen lokalen Basisschnitten oder othonormalen Rahmen.

**Notation.** Eine *Multiindex* ist ein Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}$$

Seien $V, W \to M$ reelle oder komplexe Bündel über einer Mannigfaltigkeit. Eine lineare Abbildung $P : \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ heißt Differentialoperator der Ordnung $\leq d$, $d \in \mathbb{N}$, falls gilt

(1) Lokalität: Für jedes $s \in \Gamma(V)$ mit $s|_U \equiv 0$ auf einer offenen Menge $U \subset M$, ist auch $(Ps)|_U \equiv 0$.
(2) Sei $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte, und $v_1, \ldots, v_l$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ auf $U$ definierte glatte Schnitte von $V$ bzw. $W$, die in jedem Punkt eine Basis bilden,dann gibt es glatte Funktionen $A^\alpha_{jk} : U \to \mathbb{R}$,

$\alpha$ Multiindex, $|\alpha| \le d$, so dass für $s \in \Gamma(V)$ mit $s = \sum s^j v_j$ gilt

$$P\,(s)\,|_U = \sum_{|\alpha|\le d} \sum_{j,k} A^{\alpha}_{jk} \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \psi^{\alpha}} s^j \right) w_k. \tag{2.1}$$

**Beispiele.** $d$ und $\delta$ sind Differentialoperatoren 1. Ordnung, $\Delta = (d+\delta)^2$ ist ein Differentialoperator 2. Ordnung, und verallgemeinerte Dirac-Operatoren sind Differentialoperatoren 1. Ordnung. Die Differentialoperator 0. Ordnung sind genau die Schnitte von $\mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W$.

**Bemerkung 2.2.** Sei $(U_m, \psi_m)_{m\in I}$ eine Überdeckung von $M$ mit Karten, und seien $v_i^m$ und $w_i^m$ auf $U_i$ definierte lokale Basisschnitte. Wenn man (2) für alle $(U_m, \psi_m, v_i, w_i)$ nachweist, so folgt es bereits für alle Karten und lokalen Basisschnitte.

**Proposition 2.3.** *Sei $g$ eine riemannsche Metrik auf $M$. Die Bündel $V$ und $W$ mögen Metriken $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ tragen. Dann gibt es zu jedem Differentialoperator $P : \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ der Ordnung $d$, einen eindeutigen Differentialoperator $P^\# : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ der Ordnung $d$, so dass*

$$\int_M \langle P\varphi, \psi\rangle_W \,\mathrm{dvol}_g \quad = \quad \int_M \langle \varphi, P^\#\psi\rangle_V \,\mathrm{dvol}_g$$

*für alle $\varphi \in \Gamma(V)$, $\psi \in \Gamma(W)$, wobei* $\mathrm{supp}\,\psi$ *oder* $\mathrm{supp}\,\varphi$ *kompakt ist.*

Der Beweis soll hier nur skizziert werden. Die Eindeutigkeit sieht man leicht. Um die Existenz zu zeigen, definieren wir den Operator zunächst in einer kleinen Karte. Auf Grund der Eindeutigkeit, können wir die verschiedenen Karten-Definitionen zu einer globalen Definition zusammenkleben.

**Definition 2.4.** Der Operator $P^\#$ heißt der zu $P$ *formal adjungierte* Differentialoperator. Gilt $P = P^\#$, so heißt $P$ formal selbst-adjungiert.

Offensichtlich gilt $P^{\#\#} = P$.

**Theorem 2.5.** *Verallgemeinerte Dirac-Operatoren sind formal selbst-adjungiert.*

Das Theorem folgt aus der folgenden Proposition für $\Omega = M$.

**Proposition 2.6.** *Sei $W$ ein Clifford-Bündel. Seien $\varphi, \psi \in \Gamma(W)$, $\Omega$ ein Gebiet mit (stückweise) glattem Rand,* $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi \cap \overline{\Omega}$ *kompakt. Dann gilt*

$$\int_\Omega \langle D\varphi, \psi\rangle \,\mathrm{dvol}_g - \int_\Omega \langle \varphi, D\psi\rangle \,\mathrm{dvol}_g = \int_{\partial\Omega} \langle \nu^b \cdot \varphi, \psi\rangle \,\mathrm{dvol}_g.$$

In der Proposition bezeichnet $\nu^b$ die nach außen gerichtete Normalen-1-Form, d.h. $\nu^b = g(\nu, .)$ für den nach außen gerichteten Einheitsnormalen-Vektor $\nu$.

*Beweis.* Sei $\varphi, \psi \in \Gamma(W)$ wie oben. Definiere das komplexifizierte Vektorfeld $X$ ($X \in \Gamma(TM)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$) durch

$$\omega(X) = \langle \omega\cdot\varphi, \psi\rangle \qquad \forall \omega \in \Gamma(T^*M).$$

Wir wollen $\operatorname{div} X$ in $p \in M$ berechnen. Dazu nehmen wir einen orthonormalen Rahmen $e_1, \dots, e_n$ in einer kleinen Umgebung von $p$ mit $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$. Wir rechnen dann

$$\partial_{e_i}(\omega(X)) = (\nabla_{e_i}\omega)(X) + \omega(\nabla_{e_i} X).$$

Wir setzen $\omega = e_i^b$ und berechnen die Divergenz in $p$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum e_i^b(\nabla_{e_i} X) = \sum \left( \partial_{e_i}(e_i^b(X)) - (\underbrace{\nabla_{e_i} e_i^b}_{0})(X) \right) \\
&= \sum \partial_{e_i} \langle e_i^b \cdot \varphi, \psi \rangle \\
&= \sum \langle e_i^b \cdot \nabla_{e_i}\varphi, \psi \rangle + \sum \langle e_i^b \cdot \varphi, \nabla_{e_i}\psi \rangle \\
&= \sum \langle e_i^b \cdot \nabla_{e_i}\varphi, \psi \rangle - \sum \langle \varphi, e_i^b \cdot \nabla_{e_i}\psi \rangle \\
&= \langle D\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, D\psi \rangle.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Endterme dieser Gleichungeskette unabhängig von der Wahl des synchronen Rahmens sind. Insofern gilt $\operatorname{div} X = \langle D\varphi, \psi\rangle - \langle \varphi, D\psi\rangle$ in allen Punkten von $M$.

Wenden wir nun den Divergenzsatz

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \operatorname{dvol}_g = \int_{\partial\Omega} \nu^b(X) \operatorname{dvol}_g$$

an, so folgt die Behauptung. □

**FOLGERUNG 2.7.** *Das Kodifferential $\delta$ ist formal adjungiert zu $d$. Auf $k$-Formen einer $n$-dimensionalen Mannigfaligkeit gilt deswegen $\delta = (-1)^{nk+n+1} * d *$.*[1]

*Beweis.* Das Kodifferential $\delta$ bildet $k$-Formen auf $(k-1)$-Formen ab. Schreiben wir $d + \delta$ in Blockmatrix-Gestalt, wobei die Zeilen und Spalten den Formen-Graden entsprechen, so gilt

$$d + \delta = \begin{pmatrix} 0 & \delta & & & & \\ d & 0 & \delta & & & \\ & d & 0 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & \delta \\ & & & & d & 0 \end{pmatrix} \qquad (d+\delta)^\# = \begin{pmatrix} 0 & d^\# & & & & \\ \delta^\# & 0 & d^\# & & & \\ & \delta^\# & 0 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & d^\# \\ & & & & \delta^\# & 0 \end{pmatrix}.$$

Da verallgemeinerte Dirac-Operatoren formal selbstadjungiert sind, folgt $\delta = d^\# = (-1)^{nk+n+1} * d *$. □

[1] Vorzeichen!!

Um das Bild abzurunden erwähnen wir hier noch:

**Proposition 2.8.** *Für alle Vektorfelder $X$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gilt:*

$$\operatorname{div} X = -\delta X^b.$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit einem orthonormalen Rahmen $e_1, \ldots, e_n$.

$$\begin{aligned} -\delta X^b &= \sum e_i^b \llcorner \nabla_{e_i} X^b = \sum (\nabla_{e_i} X^b)(e_i) \\ &= \sum_i \left(\partial_{e_i}(X^b(e_i)) - X^b(\nabla_{e_i} e_i)\right) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \operatorname{div} X. \end{aligned}$$

□

## 3. Der Bochner-Trick

Ziel: Vergleiche $\nabla^\# \nabla$ mit $D^2$.

**Lemma 3.1.** *Sei $W$ ein (reelles oder komplexes) Vektorbündel mit einem metrischen Zusammenhang. Sei $\nabla^\# : \Gamma(T^*M \otimes W) \to \Gamma(W)$ der formal adjungierte Operator zu $\nabla : \Gamma(W) \to \Gamma(T^*M \otimes W)$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ einen lokaler orthonormaler Rahmen, der synchron in $p$ ist. Wenn wir einen Schnitt $\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes W)$ lokal als $\varphi|_U = \sum_j e_j^b \otimes \varphi_j$ schreiben so ergibt sich* **in** *$p$*

$$(\nabla^\# \varphi)_p := -\sum \left(\nabla_{e_j} \varphi_j\right)_p.$$

*Beweis.* Sei $\psi \in \Gamma(W)$, $\varphi = \sum_j e_j^b \otimes \varphi_j \in \Gamma((T^*M \otimes W)|U)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi$ kompakt. Sei $X$ das komplexifizierte Vektorfeld, so dass

$$\omega(X) = \langle \omega \otimes \psi, \varphi \rangle$$

für alle 1-Formen $\omega$. Wir rechnen

$$\partial_{e_i}(\omega(X)) = (\nabla_{e_i} \omega)(X) - \omega(\nabla_{e_i} X)$$

und

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} X)_p &= \sum e_i^b (\nabla_{e_i} X)_p \\ &= \sum \partial_{e_i}(e_i^b(X))_p = \sum \partial_{e_i} \langle e_i^b \otimes \psi, \varphi \rangle \\ &= \sum \partial_{e_i} \langle \psi, \varphi_i \rangle \\ &= \sum \langle \nabla_{e_i} \psi, \varphi_i \rangle + \langle \psi, \nabla_{e_i} \varphi_i \rangle \\ &= \langle \nabla \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \sum \nabla_{e_i} \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

Mit $\int_M \operatorname{div} X \operatorname{dvol}_g = 0$ folgt die Behauptung. □

**PROPOSITION 3.2** (Bochner-Formel). *Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $W$ ein Clifford-Bündel über $M$. Sei $D$ der verallgemeinerte Dirac-Operator, und $R^W$ die Krümmung des Bündels $W$. Dann gilt für alle $\varphi \in \Gamma(W)$*

$$D^2\varphi = \nabla^\# \nabla \varphi + \mathcal{K}(\varphi),$$

*wobei der Krümmungsendomorphismus $\mathcal{K}$ lokal definiert gegeben ist durch*

$$\mathcal{K}(\varphi) = \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot R^W(e_i,e_j)\varphi.$$

*Der Krümmungsendomorphismus $\mathcal{K}$ ist ein symmetrischer [2] Endomorphismus.*

*Beweis.* In $p \in M$ nehmen wir einen in $p$ synchronen Rahmen und rechnen:

$$\begin{aligned} D^2\varphi &= \sum_{i,j} e_i^b \cdot \nabla_{e_i}(e_j^b \cdot \nabla_{e_j}\varphi)_p \\ &= \sum_i \underbrace{e_i^b \cdot e_i^b}_{-1} \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi + \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot \left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\right)\varphi \\ &= \nabla^\#\nabla\varphi + \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot R^W(e_i,e_j)\varphi \end{aligned}$$

Da sowohl $D^2$ als auch $\nabla^\#\nabla$ formal selbstadjungiert sind, ist auch $\mathcal{K}$ symmetrisch. □

**KOROLLAR 3.3** (Bochner-Trick). *Sei $M$ eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Clifford-Bündel $W$.*

(1) *Gilt für alle $p \in M$ und $w \in W_p$, dass $\langle \mathcal{K}w, w\rangle \geq 0$, so ist jedes $\varphi \in \ker D$ parallel.*
(2) *Gibt es zusätzlich ein $p \in M$ mit*

$$\langle \mathcal{K}w, w\rangle > 0 \qquad \forall w \in W_p, w \neq 0,$$

*so ist* $\ker D = \{0\}$.

[2] Wir verwenden den Begriff "symmetrisch" im Sinne der Funktionalanalysis, d.h. im Sinne von $\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle = \overline{\langle Ay,x\rangle}$ für alle $x,y$ im Definitionsbereich von $A$. Dies entpricht dem Begriff "hermitesch" der Linearen Algebra. [HS71]

*Beweis.* Zu (1): Sei $D\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle D\varphi, D\varphi\rangle \,\mathrm{dvol}_g \\ &= \int_M \langle D^2\varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{dvol}_g \\ &= \int_M \langle \nabla^\# \nabla\varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{dvol}_g + \int_M \langle \mathcal{K}\varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{dvol}_g \\ &= \int_M \underbrace{\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle}_{\geq 0} \,\mathrm{dvol}_g + \int_M \underbrace{\langle \mathcal{K}\varphi, \varphi\rangle}_{\geq 0} \,\mathrm{dvol}_g \end{aligned}$$

Wir schließen daraus, dass $\nabla\varphi = 0$ und $\langle \mathcal{K}\varphi, \varphi\rangle = 0$. Im Fall (2) folgt aus letzterem $\varphi(p) = 0$. Da $\varphi$ parallel, ist seine Länge konstant. Im Fall (2) also $\varphi \equiv 0$. □

Im Falle des Dirac-Operators $d+\delta$ auf den Formen können wir diese Aussage noch verstärken. Man beachte hierzu, dass der Hodge-Laplace-Operator $\Delta := D^2 = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ den Formen-Grad bewahrt. Wir erhalten somit

**Korollar 3.4** (Bochner-Trick für $k$-Formen). *Sei $M$ eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{K}^k$ der Krümmungsendomorphismus von $\Lambda^* T^* M$, eingeschränkt auf die $k$-Formen.*

(1) *Gilt* $\langle \mathcal{K}^k w, w\rangle \geq 0 \qquad \forall p \in M, w \in W_p$ *so ist jedes* $\varphi \in \ker(d+\delta) \cap \Gamma(\Lambda^k T^* M)$ *parallel.*
(2) *Gibt es zusätzlich ein* $p \in M$ *mit*

$$\langle \mathcal{K}^k w, w\rangle > 0 \qquad \forall w \in W_p, w \neq 0,$$

*so ist* $\ker(d+\delta) \cap \Gamma(\Lambda^k T^* M) = \{0\}$.

*Beweis.* Wie oben. □

Wir werden diese Technik später verfeinern, und die Lücke im Spektrum um die 0 genauer zu bestimmen.

Übung: Berechnen Sie $\mathcal{K}^1$.

## 4. Analysis von Dirac-Operatoren und elliptische Theorie

In diesem kapitel werden uns einige Begriffe und Sätze aus der Funktionalanalysis begegnen. Das meiste, was wir benötigen werden, kann zum Beispiel in [HS71] gefunden werden.

In diesem Kapitel ist $(M, g)$ immer eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei zunächst $W$ ein reelles oder komplexes Vektorbündel über $M$ mit Metrik und metrischem Zusammenhang.

**Definition 4.1.** Sei $\Gamma_{C^k}(M,W)$ der Vektorraum der $k$-mal stetig differenzierbaren Schnitte von $W$. Wir schreiben auch oft $C^k(M,W)$ oder $C^k(W)$, falls aus dem Kontext heraus klar ist, dass Schnitte von $W \to M$ gemeint sind. Für $\varphi \in C^k(M,W)$ definieren wir

$$\|\varphi\|_{C^k} := \max_{j=0,\ldots,k} \max_{p\in M} \Big| \overbrace{\nabla \ldots \nabla}^{j-\text{mal}} \varphi(p) \Big|.$$

**Bemerkung 4.2.** Ist $P$ ein Differentialoperator der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, dann ist

$$C^k(M,W) \to C^{k-m}(M,W)$$

beschränkt.

$(C^k(M,W), \|\cdot\|_{C^k})$ ist ein Banach-Raum. Es wird aber hilfreich sein, mit Hilberträumen zu arbeiten. Wir führen deswegen die Sobolevräume $W_s$ ein. Wir werden hierfür zunächst auf dem $n$-dimensionalen Standard-Torus arbeiten, Sobolevräume $H_s$ definieren, und wichtige Sätze zeigen, und diese Definitionen und Sätze dann auf beliebige kompakte riemannsche Mannigfaltigkeiten hinüber transportieren. Wir betrachten nun den Standard-Torus $T^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\,\mathbb{Z})^n$. Die von den Standard-Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ induzierten Koordinaten nennen wir $x_1,\ldots,x_n$.

**Definition 4.3.** Eine formale Fourier-Reihe ist eine Familie $\{u_\xi \,|\, \xi \in \mathbb{Z}^n\}$, $u_\xi \in \mathbb{C}$, die wir in der Form

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} u_\xi e^{i\langle x,\xi\rangle}$$

schreiben und interpretieren wollen.

Wir definieren das *Sobolev-s-Skalarprodukt* für $s \in \mathbb{R}$

$$(u,v)_s := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s u_\xi \overline{v}_\xi,$$

das für alle formalen Fourier-Reihen $u$, $v$ definiert ist, für die die Reihe konvergiert.

Die *Sobolev-s-Norm* ist dann definiert als

$$\|u\|_s := \sqrt{(u,u)_s} \in \mathbb{R}^{\geq} \cup \{\infty\}.$$

Der Sobolev-Raum $H_s$ auf $T^n$ ist die Menge aller formalen Fourier-Reihen $u$ auf $T^n$, für die $\|u\|_s < \infty$.

**Lemma 4.4.** *$(H_s, \|\cdot\|_s)$ ist vollständig.*

*Beweis.* Sei $(u_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $H_s$. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also ein $N > 0$, so dass

$$\|u_k - u_l\|_s < \epsilon \qquad \forall k,l \geq N.$$

Für festes $\xi \in \mathbb{Z}^n$ gilt somit:

$$|u_{k,\xi} - u_{j,\xi}| \leq \frac{\|u_k - u_l\|_s}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} < \frac{\epsilon}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}$$

und somit ist $(u_{k,\xi})_k$ eine Cauchy-Folge. Wir setzen $v_\xi := \lim_{k\to\infty} u_{k,\xi}$. Zu zeigen ist nun $\|u_k - v\|_s \to 0$. Zunächst gilt

$$|u_{k,\xi} - v_\xi|^2 \le (|u_{k,\xi} - u_{l,\xi}| + |u_{l,\xi} - v_\xi|)^2 \le 2\left(|u_{k,\xi} - u_{l,\xi}|^2 + |u_{l,\xi} - v_\xi|^2\right).$$

Für $R > 0$ gilt somit

$$\begin{aligned} & \sum_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^s |u_{k,\xi} - v_\xi|^2 \\ \le\ & 2\sum_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^s |u_{k,\xi} - u_{l,\xi}|^2 + 2 \underbrace{\sum_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^s |u_{l,\xi} - v_\xi|^2}_{\le \epsilon^2 \text{ für genügend großes } l = l(R,\epsilon)} \\ \le\ & 2\|u_k - u_l\|_s^2 + 2\epsilon^2 \le 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

für $k \ge N(\epsilon)$. In den letzten beiden Ungleichungen müssen wir $l$ von $R$ abhängig wählen, die Gesamt-Ungleichung gilt aber für alle $k \ge N(\epsilon)$ gleichmäßig in $R > 0$. Also somit

$$\|u_k - v\|_s \le 2\epsilon.$$

□

**Lemma 4.5.**

$$\begin{aligned} C^k(T^n) &\to H_k \\ f &\mapsto \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} f_\xi e^{i\langle x,\xi\rangle} \end{aligned}$$

*mit*

$$f_\xi = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{dvol}_g(x)$$

*ist injektiv und beschränkt.*

*Beweis.* Die Funktionen $\varphi_\xi : x \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle}$ bilden eine Hilbert-Raum-Basis des Hilbert-Raums $L^2(T^n)$ der komplex-wertigen $L^2$-Funktionen, versehen mit dem (reskalierten) $L^2$-Skalarprodukt

$$(f_1, f_2)' := (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f_1 \overline{f_2}.$$

In Folge dessen gilt die Parsevalsche Gleichung für alle $f \in L^2(T^n)$:

$$(2\pi)^{-n} \int f\overline{f} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} f_\xi \overline{f_\xi},$$

$$f_\xi := (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}.$$

Daraus folgt nun die Aussage wie folgt im Fall $k = 0$:

$$\|f\|_0^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |f_\xi|^2 = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} |f|^2 \le \|f\|_{C^0}^2.$$

Wenn $f$ im Kern liegt, so folgt daraus $\int |f|^2 = 0$, und da $f$ stetig ist, bedeutet dies $f \equiv 0$. Die Injektivität folgt somit für $k = 0$ und deswegen auch für alle $k$.

Für den Fall $k > 0$ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_\xi &= \int_{T^n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \\
&= -(2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x)(-i\xi_j) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \\
&= i\xi_j f_\xi
\end{aligned}$$

Durch Induktion zeigen wir daraus:

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f\right)_\xi = \xi^\alpha i^{|\alpha|} f_\xi,$$

wobei $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$.

$$\sum_{|\alpha| \le k} |\xi^{2\alpha}| \le (1 + |\xi|^2)^k \le C_k \sum_{|\alpha| \le k} |\xi^{2\alpha}|.$$

Somit

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \le k} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \right\|_0^2 &\le (2\pi)^{-n} \|f\|_k^2 \\
&\le C_k \sum_{|\alpha| \le k} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \right\|_0^2 \\
&\le C'_k \sum_{|\alpha| \le k} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \right\|_{C^0}^2 \\
&\le C''_k \|f\|_{C^k}^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

□

Aus dem Beweis können wir sogar noch einige Folgerungen ziehen:

**Folgerungen 4.7.** 1.) *$C^\infty(T^n)$ liegt dicht in $H_s$*

2.) *$H_0 = L^2(T^n)$*

3.) *Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\|\cdot\|_k$ äquivalent zu $\sum_{|\alpha| \le k} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \right\|_{L^2}$.*

4.) *Ist $P : C^\infty(T^n) \to C^\infty(T^n)$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$, dann setzt sich $P$ zu einer beschränkten linearen Abbildung $H_s \to H_{s-k}$ fort (für alle $s \in \mathbb{R}$).*

*Beweis.* 1.) Die (endlichen) Teilsummen der Fourier-Reihen liegen dicht in $H_s$. Da die endlichen Summen aber Bilder glatter Funktionen sind, ist das Bild von $C^\infty(T^n)$ dicht.

2.) Die Abbildung des Lemmas bewahrt die $L^2$-Norm bis auf eine Konstante. Wir sehen also, dass $H_0$ die $L^2$-Vervollständigung der glatten Funktionen ist.

3.) folgt aus (4.6)

4.) jetzt klar □

**SATZ 4.8** (Sobolevscher Einbettungssatz für $T^n$)**.** *Sei $s > n/2$. Dann konvergiert jede formale Fourier-Reihe $u \in H_{k+s}$ in der $C^k$-Norm und die Abbildung*

$$H_{k+s} \to C^k(T^n)$$

*ist injektiv und beschränkt.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei $k = 0$.

Sei $u \in \sum_\xi u_\xi e^{i\langle x,\xi\rangle} \in H_s$. Setze $S_R := \sum_{|\xi|\le R} u_\xi e^{i\langle\,\cdot\,,\xi\rangle} \in C^\infty(T^n)$. Für $R \le R'$ gilt

$$\begin{aligned} |S_R(x) - S_{R'}(x)| &\le \sum_{|\xi|\ge R} |u_\xi| \\ &= \sum_{|\xi|\ge R} \frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} |u_\xi|}{\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}} \\ &\le \underbrace{\left\{ \sum_{|\xi|\ge R} \left(1+|\xi|^2\right)^{s} |u_\xi|^2 \right\}^{1/2}}_{\le \|u\|_s} \left\{ \sum_{|\xi|\ge R} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Integralreihen-Kriteriums sieht man nun, dass

$$C := \sum_{|\xi|\in\mathbb{Z}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} < \infty, \tag{4.9}$$

da $s > n/2$. Es folgt daraus, dass $(S_{R_j} | R_j \to \infty)$ eine Cauchy-Folge in $C^0(T^n)$ ist. Außerdem sehen wir ($R = 0$, $R' \to \infty$), dass dann die Abbildung beschränkt ist.

Die Injektivität ist klar. □

**SATZ 4.10** (Rellichscher Einbettungssatz)**.** *Für $s_1 < s_2$ ist die Einbettung $H_{s_2} \hookrightarrow H_{s_1}$ kompakt.*

*Beweis.* Sei $(u_k)_k$ eine beschränkte Folge in $H_{s_2}$, d.h. es existiert ein $C$ mit

$$\|u_k\|_{s_2} \le C \qquad \forall k.$$

Für festes $\xi \in \mathbb{Z}^n$ bildet $(u_{k,\xi})_k$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$.

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wählen wir $R$ so groß, dass

$$\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s_2-s_1}} < \epsilon$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}
&\|u_k - u_l\|^2_{s_1} \\
= \quad & \sum_{|\xi|\leq R} \underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^{s_1} |u_{k,\xi} - u_{l,\xi}|^2}_{\leq\epsilon \text{ für } k,l\geq N(\epsilon,R)} + \sum_{|\xi|>R} \underbrace{\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s_2-s_1}}}_{<\epsilon} \left(1+|\xi|^2\right)^{s_2} |u_{k,\xi} - u_{l,\xi}|^2 \\
\leq \quad & \epsilon + \epsilon\|u_k - u_l\|^2_{s_2} \leq (1+4C^2)\,\epsilon
\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun die Definitionen, Normen und Ungleichungen auf eine beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigekeit mit einem Vektorbündel $E \to M$ übertragen. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen hierzu eine offene Überdeckung $U_1, \ldots, U_r$ von $M$ und Diffeomorphismen

$$\varphi_j : U_j \to V_j \subset T^n.$$

Auf jedem $U_j$ wählen wir eine Trivialisierung von $E$, d.h. eine Abbildung $\psi_j : E|_{U_j} \to \mathbb{C}^m$, $\psi_j = (\psi_j^1, \ldots, \psi_j^m)$. Wir wählen eine zu $U_1, \ldots, U_r$ passende Partition $\chi_j$ der Eins.

**Definition 4.11.** Wir setzen nun für alle $w \in C^\infty(E)$ die *Sobolev-k-Norm auf M*

$$\|w\|_k^2 := \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} \|\psi_j^l \circ (\chi_j w) \circ \varphi_j^{-1}\|_k^2.$$

Durch Interpolation erhalten wir auch das *Sobolev-k-Skalarprodukt*. Der *Sobolev-Raum* $W^k(E)$ ist die Vervollständigung von $C^\infty(E)$ bzgl. $\|\cdot\|_k$.

Die Norm ist bis auf Äquivalenz nicht von der Wahl der $U_j$, $\varphi_j$, $\psi_j$ und $\chi_j$ abhängt. Dies folgt aus Übung 1 Blatt 3 und einigen darauf aufbauenden Rechnungen, die für $k \in \mathbb{N}$ gut funktionieren.

Insbesondere folgt dann auch $H_k = W^k(T^n)$.

**Bemerkungen 4.12.** 1.) Ist $P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ ein Differentialoperator der Ordnung $m$, dann setzt sich $P$ zu einer beschränkten Abbildung

$$P : W^{k+m}(E) \to W^k(F)$$

fort. Insbesondere ist dann auch die Formel in Propososition 2.3 für alle $\varphi \in W^d(E)$ und $\psi \in W^d(F)$ gültig.

2.) Die Identität setzt sich zu einer beschränkten injektiven Abbildung

$$C^k(E) \to W^k(E)$$

fort.

3.) (Sobolev) Für $s > n/2$, $s \in \mathbb{N}$ setzt sich die Identität auf $C^\infty(E)$ zu einer beschränkten injektiven Abbildung

$$W^{k+s}(E) \to C^k(E)$$

fort.

4.) (Rellich) Für $s_1 < s_2$ setzt sich $\mathrm{Id}_{C^\infty(E)}$ zu einer kompakten injektiven Abbildung

$$W^{s_2}(E) \to W^{s_1}(E)$$

fort.

5.) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^k(E) = C^\infty(E)$.

6.) Wähle einen Zusammenhang $\nabla$ auf $E$ und eine Metrik. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Normen

$$\|w\|'_k := \sum_{j=0}^{k} \|\underbrace{\nabla \ldots \nabla}_{j-\text{mal}} w\|_{L^2}$$

zu $\|\cdot\|_k$ äquivalente Normen.

**Einschub: Getwistete Clifford-Bündel.** Sei $W$ ein Clifford-Bündel über der riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,g)$. Sei $E$ ein weiteres reelles oder komplexes Vektorbündel über $M$ mit einer Metrik und einem metrischen Zusammenhang (wir fordern nicht, dass es eine Cliffordmultiplikation auf $E$ gibt). Dann ist auch $W \otimes E$ ein Clifford-Bündel, wobei $W \otimes E$ die Tensor-Metrik und den Tensor-Zusammenhang trägt, und die Clifford-Multiplikation ist gegeben durch

$$\alpha \cdot (w \otimes e) = (\alpha \cdot w) \otimes e.$$

Wir nennen $W \otimes E$ das *mit $E$ getwistete Clifford-Bündel.*

Der zugehörige Dirac Operator erfüllt:

$$\begin{aligned} D^{W\otimes E}(w\otimes e) &= \sum e_j^b \cdot \nabla_{e_j}(w \otimes e) \\ &= \sum e_j^b \cdot (\nabla_{e_j} w \otimes e + w \otimes \nabla_{e_j} e) \\ &= (D^W w) \otimes e + \sum e_j^b \cdot w \otimes \ \nabla_{e_j} e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{W\otimes E}(w\otimes e) &= \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot R^{W\otimes E}(e_i,e_j)(w\otimes e) \\ &= \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot \big(R^W(e_i,e_j) w \otimes e + w \otimes R^E(e_i,e_j)e\big) \\ &= (\mathcal{K}^W w)\otimes e + \sum_{i<j} e_i^b \cdot e_j^b \cdot w \otimes R^E(e_i,e_j)e \end{aligned}$$

Diese Twist-Operation ist in vielen Anwendungen sehr wichtig: im Standard-Modell der Physik (oder auch in der Elektrodynamik) wird der Dirac-Operator mit einem Bündel getwistet, wobei die Krümmung des Bündels den Eichfeldern entpricht. Auch in dieser Vorlesung werden sie noch wichtig werden.

**Lemma 4.13** (Twist mit dem Tangentialbündel). *Sei $W \to M$ ein Clifford-Bündel und $D$ der Dirac-Operator. Sei $D^{W\otimes T^*M}$ der Dirac-Operator des mit $T^*M$ getwisteten Clifford-Bündels. Dann gilt*

$$D^{W\otimes T^*M} \circ \nabla\varphi - \nabla \circ D\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} e_i^b \cdot R^W(e_i, e_j)\varphi \otimes e_j^b$$

*für einen lokalen orthonormalen Rahmen $e_1, \ldots, e_n$.*

Die rechte Seite der Gleichung ist zunächst nur lokal definiert. Man sieht aber leicht durch Nachrechnen, dass der Ausdruck der rechten Seite nicht von der Wahl des orthonormalen Rahmens abhängt, also global definiert ist. Etwas eleganter sieht man dies, indem man $R^W$ als Element von $T^*M \otimes T^*M \otimes W \to W$ interpretiert. Dann ist

$$T^*M \otimes W \ni (\mathrm{id} \otimes \mathrm{cl}) \circ R^W = \sum_{i,j=1}^{n} e_i^b \otimes (e_j^b \cdot R^W(e_i, e_j))$$

bis auf ein Vorzeichen und Vertauschung der Reihenfolge gleich der rechten Seite. Offensichtlich ist $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{cl}) \circ R^W$ unabhängig von der Wahl der $e_i$.

*Beweis des Lemmas.* Nach dem soeben gesagten können wir annehmen, dass $e_1, \ldots, e_n$ ein orthonormaler Rahmen ist, der in $p \in M$ synchron ist. Wir rechnen für $\varphi \in C^\infty(W)$

$$\begin{aligned}
D^{W\otimes T^*M} \circ \nabla\varphi - \nabla \circ D\varphi &= \sum_i D^{W\otimes T^*M}(\nabla_{e_i}\varphi \otimes e_i^b) - \sum_j \nabla(e_j^b \cdot \nabla_{e_j}\varphi) \\
&= \sum_{i,j} \left((e_j^b \cdot \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\varphi) \otimes e_i^b - e_j^b \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi \otimes e_i^b\right) \\
&= \sum_{i,j} e_j^b \cdot R^W(e_j, e_i)\varphi \otimes e_i^b
\end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Gleichungskette nur *im Punkt $p$* gilt. □

**Ende des Einschubes**

Sei nun $W \to M$ ein Clifford-Bündel über der kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit $M$. Den dazugehörigen (verallgemeinerten) Dirac-Operator bezeichnen wir mit $D$.

**Proposition 4.14** (Gårding-Ungleichung). *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|\varphi\|_1 \leq C \left(\|\varphi\|_0 + \|D\varphi\|_0\right) \qquad \forall \varphi \in C^\infty(W).$$

*Beweis.* Aus der Bochner-Formel

$$D^2\varphi = \nabla^\# \nabla\varphi + \mathcal{K}\varphi$$

folgt
$$\|\nabla\varphi\|_0^2 = (\nabla^{\#}\nabla\varphi,\varphi)_0 = (D^2\varphi,\varphi)_0 - (\mathcal{K}\varphi,\varphi)_0 \le \|D\varphi\|_0^2 + C'\|\varphi\|_0^2.$$
□

**Proposition 4.15** (Elliptische Abschätzungen). *Es existieren Konstanten $C_k, C'_k > 0$, so dass*
$$\|\varphi\|_k \le C_k\left(\|\varphi\|_0 + \|D\varphi\|_0 + \cdots + \|D^k\varphi\|_0\right) \le C'_k\|\varphi\|_k.$$

*Beweis.* Die rechte Ungleichung ist bereits klar. Zu zeigen ist also die Existenz von $C_k$. Für $k=1$ ist dies gerade die Gårding-Ungleichung. Für alle $k>1$ zeigen wir die Behauptung durch Induktion über $k$. Nach Induktionsvoraussetzung gelte die Aussage für $k-1$ für alle Clifford-Bündel.
$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_k &\le C_1\,\{\|\varphi\|_0 + \|\nabla\varphi\|_{k-1}\}\\
&\le C_2\left\{\|\varphi\|_0 + \|\nabla\varphi\|_0 + \|D\nabla\varphi\|_0 + \cdots + \|D^{k-1}\nabla\varphi\|_0\right\}\\
&\le C_3\left\{\|\varphi\|_{k-1} + \|\nabla\varphi\|_0 + \|\nabla D\varphi\|_0 + \cdots + \|\nabla D^{k-1}\varphi\|_0\right\}\\
&\le C_4\left(\|\varphi\|_0 + \|D\varphi\|_0 + \cdots + \|D^k\varphi\|_0\right)
\end{aligned}$$
Die zweite und letzte Ungleichung beruhen auf der Induktionsvoraussetzung. In der dritten Ungleichung haben wir $D^r$ und $\nabla$ vertauscht, und nach Lemma (4.13) wissen wir
$$\|D^{s+1}\nabla D^r\varphi - D^s\nabla D^{r+1}\varphi\|_0 = \|D^s(D\nabla - \nabla D)D^r\varphi\|_0 \le C'\|\varphi\|_{r+s}.$$
□

**Definition 4.16.** Seien $H_1, H_2$ Hilbert-Räume, $\mathcal{D} \subset H_1$ ein dichter Unterraum. Ein linearer Operator $A : \mathcal{D} \to H_2$ heißt unbeschränkter Operator. Der Graph von $A$ ist
$$\Gamma_A = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}\} \subset H_1 \oplus H_2.$$
Der Operator $A$ heißt *abgeschlossen*, falls der Graph $\Gamma_A$ abgeschlossen ist.

Überall definierte Operatoren ($\mathcal{D} = H_1$) sind genau dann stetig, wenn sie abgeschlossen sind. Unser wichtigstes Beispiel ist $H_1 = H_2 = L^2$, $\mathcal{D} = C^\infty(W)$ und $A$ eine Differentialoperator, insbesondere $A = D$.

**Lemma 4.17.** *Sei $M$ kompakt und $P$ ein Differentialoperator auf $M$. Der Abschluss des Graphen $\Gamma_P$ in $L^2 \oplus L^2$ ist wieder ein Graph.*

Die lineare Abbildung die durch $\overline{\Gamma_P}$ beschrieben wird, heißt der *Abschluss von $P$*.

*Beweis.* Sei $(0,y)$ im Abschluss von $\Gamma_P$. Dann gibt es eine Folge $(x_j)$ in $C^\infty$ mit $(x_j, Px_j) \to (0,y)$ in $L^2 \oplus L^2$, also $x_j \to 0$ und $Px_j \to y$ in $L^2$. Es folgt für alle glatten $\varphi$:
$$\begin{array}{ccc}
(x_j, P^{\#}\varphi)_{L^2} & \to & 0\\
\| & & \\
(Px_j, \varphi)_{L^2} & \to & (y,\varphi)_{L^2}.
\end{array}$$
Da die glatten Schnitte dicht liegen, folgt $y = 0$. □

**Bemerkung 4.18.** Sei $P$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$. Dann ist der Sobolevraum $W^k$ im Definitionsbereich des Abschlusses von $P$ enthalten.

Ein Unterraum eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann abgeschlossen, wenn er vollständig in der induzierten Metrik ist. Sei $A : \mathcal{D} \subset H_1 \to H_2$ ein unbeschränkter Operator. Wir folgern, dass $A$ genau dann abgeschlossen ist, wenn der Graph in der induzierten Topologie vollständig ist. Vermöge des Isomorphismus $\mathcal{D} \to \Gamma_A$ definiert die induzierte Norm eine Norm auf $\mathcal{D}$, die *Graphen-Norm* auf $\mathcal{D}$

$$\|\varphi\|_A^2 := \|\varphi\|_{H_1}^2 + \|A\varphi\|_{H_2}^2.$$

**Beispiel.** Die Gårding-Ungleichung für Dirac-Operatoren besagt, dass die Graphen-Norm äquivalent zur $W^1$-Norm ist. Insofern ist die stetige Fortsetzung von $D$ zu einer Abbildung $W^1(W) \to L^2(W)$ ein abgeschlossener Operator, und stimmt deswegen mit dem Abschluss von $D$ überein, also $\mathcal{D}_{\overline{D}} = W^1(W) \subset L^2(W)$.

**Definition 4.19.** Sei $M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit. Sei $P$ ein Differentialoperator der Ordnung $m$, der Schnitte von $E \to M$ auf Schnitte von $F \to M$ abbildet. Sei $f \in L^2(F)$. Man sagt, die Differentialgleichung $Pu = f$ ist

(a) im *klassischen Sinn* erfüllt, falls $u \in C^m(E)$, $f \in C^0(F)$, und $Pu = f$,
(b) im *starken Sinn* erfüllt, falls es $u_j \in C^m(E)$ gibt mit $u_j \to u$ und $Pu_j \to f$ in $L^2$,
(c) im *schwachen Sinn* erfüllt, falls $(u, P^{\#}\varphi)_0 = (f, \varphi)_0$ für alle $\varphi \in C^\infty(F)$.

Offensichtlich ist (b) äquivalent zu $(u, f) \in \overline{\Gamma_P}$, oder anders ausgedrückt: (b) besagt, dass $u$ im Definitionsbereich des Abschlusses von $P$ liegt, und der Abschluss von $P$ die Funktion $u$ auf $f$ abbildet. Es ist deswegen klar, dass aus der Gültigkeit im klassischen Sinn, die Gültigkeit im starken Sinn folgt. Ist andererseit $u$ eine starke Lösung, so folgt

$$(u, P^{\#}\varphi)_0 \leftarrow (u_j, P^{\#}\varphi)_0 = (Pu_j, \varphi)_0 \to (f, \varphi)_0.$$

Also ist auch $u$ eine schwache Lösung.

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, dass im Falle des Dirac-Operators jede schwache Lösung $u$ von $Du = f$ bereits eine starke Lösung ist.

**PROPOSITION 4.20.** *Ist für $u, f$ die Gleichung $Du = f$ im schwachen Sinn erfüllt, so ist sie auch im starken Sinn erfüllt.*

**Definition 4.21.** Sei $M$ kompakt. $E, F$ Bündel über $M$. Sei $\pi_{1/2} : M \times M \to M$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente. Eine lineare Abbldung

$$A : L^2(E) \to L^2(F)$$

heißt *Glättungs-Operator*, falls es einen glatten Schnitt $k$ von $\pi_1^* F \otimes \pi_2^* E^*$ gibt mit

$$(A\varphi)(x) = \int_M k(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{dvol}(y).$$

Solch ein $k$ heißt *Glättungskern*.

**Bemerkung 4.22.** Für Glättungsoperatoren $A$ gilt $A(L^2(E)) \subset C^\infty(F)$, und $A : L^2(E) \to C^k(F)$ ist für alle $k$ beschränkt.

**Definition 4.23.** Sei nun $E = F$. Eine Familie $\{\mathcal{F}_\epsilon \,|\, \epsilon \in (0, \epsilon_0]\}$ von selbstadjungierten Glättungsoperatoren heißt *Friedrichs-Glätter*, falls gilt

(1) $\mathcal{F}_\epsilon : L^2 \to L^2$ ist gleichmäßig in $\epsilon$ beschränkt,
(2) $[B, \mathcal{F}_\epsilon] : L^2 \to L^2$ ist gleichmäßig in $\epsilon$ beschränkt für alle Differentialoperatoren $B$ der Ordnung 1,
(3) $\mathcal{F}_\epsilon$ konvergiert in der schwachen Operator-Topologie gegen id, d.h. für alle $u, v \in L^2$ gilt

$$(\mathcal{F}_\epsilon u, v)_0 \to (u, v)_0 \qquad \text{für } \epsilon \to 0.$$

**Lemma 4.24.** *Auf kompakten Mannigfaltigkeiten existieren Friedrichs-Glätter.*

*Beweis (Skizze).* Sei $\epsilon_0$ der Injektivitätsradius von $M$. Wähle eine glatte Funktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\chi \geq 0$ $\chi(t) \equiv 0$ falls $t \geq 1$, die konstant ist in einer Umgebung von 0 und

$$\int_0^1 \chi(t) t^{n-1}\, dt = 1/\operatorname{vol}(S^{n-1}).$$

Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(|x|)\, dx = 1$. Wir definieren für $d(x, y) < \epsilon_0$

$$k_\epsilon(x, y) = \epsilon^{-n}\, \chi(d(x, y)/\epsilon) P_{x,y},$$

wobei $P_{x,y}$ der Paralleltransport längs der Kürzesten von $y$ nach $x$ ist. Für alle anderen $x, y$ kann man $k_\epsilon$ durch 0 glatt fortsetzen.

Eine Rechnung liefert dann, dass die zugehörigen Operatoren Friedrichs-Glätter sind. □

*Beweis von Proposition 4.20.* Sei also $u, f \in L^2$, $Du = f$ schwach. Zu zeigen ist dann $u \in W^1$. Daraus folgt dann nämlich für alle glatten $\varphi$, dass

$$(\overline{D}u, \varphi)_0 = (u, D\varphi)_0 = (f, \varphi)_0,$$

und somit $\overline{D}u = f$ stark.

Wir definieren

$$u_\epsilon := \mathcal{F}_\epsilon u \in C^\infty.$$

Für alle glatten $\varphi$ gilt somit

$$\begin{aligned}(Du_\epsilon, \varphi)_0 &= (u_\epsilon, D\varphi)_0 = (u, \mathcal{F}_\epsilon D\varphi)_0 \\ &= (u, D\mathcal{F}_\epsilon\varphi)_0 + (u, [\mathcal{F}_\epsilon, D]\varphi)_0 \\ &= (f, \mathcal{F}_\epsilon\varphi)_0 + (u, [\mathcal{F}_\epsilon, D]\varphi)_0\end{aligned}$$

Daraus folgt dann (alle $C_i$ sind unabhängig von $\epsilon$)

$$|(Du_\epsilon, \varphi)_0| \leq \|f\|_0 C_1 \|\varphi\|_0 + \|u\|_0 C_2 \|\varphi\|_0 \leq C_3 \|\varphi\|_0,$$

also $\|Du_\epsilon\|_0 \leq C_3$ und $\|u_\epsilon\|_0 \leq \|\mathcal{F}_\epsilon u\|_0 \leq C_1 \|u\|_0 \leq C_4$. Folglich $\|u_\epsilon\|_1 \leq C_5$.

Nach [HS71, Satz 14.9] sind abgeschlossene Bälle in einem Hilbert-Raum schwach folgenkompakt. Da $W^1$ ein Hilbert-Raum ist, und $u_\epsilon$ beschränkt in $W^1$ ist, gibt es also eine Folge $\epsilon_j \to 0$, so dass $u_{\epsilon_j}$ *schwach* [3] gegen ein $\tilde{u} \in W^1$ konvergiert. Für jedes glatte $\varphi$ ist $(\,\cdot\,, \varphi)_0$ stetig auf $L^2$ und $W^1$. Es gibt also ein $w \in W^1$ mit $(\,\cdot\,, \varphi)_0 = (\,\cdot\,, w)_1$, und somit gilt für alle glatten $\varphi$

$$(u_{\epsilon_j} - \tilde{u}, \varphi)_0 \to 0.$$

Da $u_{\epsilon_j} \to u$, folgt hieraus $(u - \tilde{u}, \varphi)_0 = 0$ für alle $\varphi$ und somit $u = \tilde{u}$. □

Wir können hieraus den folgenden stärkeren Satz herleiten

**Satz 4.25** (Regularität der Lösungen)**.** *Sei $W$ ein Clifford-Bündel über einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit $M$. Sind $u \in L^2(W)$ und $f \in W^k(W)$ und gilt $Du = f$ schwach, dann gilt $u \in W^{k+1}$.*

**Bemerkung 4.26.** Man kann sogar auch zeigen, dass es eine Konstante $C = C(M)$ gibt mit

$$\|u\|_{k+1} \leq C \|f\|_k.$$

*Beweis.* Für $k = 0$ haben wir es gezeigt. Wir wollen die Aussage durch Induktion über $k$ zeigen. Wir nehmen also nach Induktionsvoraussetzung an, dass der Satz für $k - 1$ gelte, $k \geq 1$. Sei $X \in \Gamma(TM)$. Man rechnet leicht nach, dass der Kommutator $[\nabla_X, D]$ wieder ein Differentialoperator erster Ordnung ist (entweder in lokalen Koordinaten oder indem man zeigt, dass die Hauptsymbole von $\nabla_X$ und $D$ kommutieren, denn das Hauptsymbol von $\nabla_X$ ist gegeben durch $T^*M \ni \alpha \mapsto \alpha(X)\,\mathrm{Id} \in \mathrm{End}(W)$). Folglich sind $[\nabla_X, D]$ und $[\nabla_X, D]^\# = -[\nabla_X^\#, D]$ Differentialoperatoren erster Ordnung. Wir wissen bereits, dass $u \in W^k(W)$ und somit $\nabla_X u \in W^{k-1}(W)$. Für die schwache Lösung $Du = f$ gilt:

$$(u, D\nabla_X \varphi)_0 = (f, \nabla_X \varphi)_0 \qquad \varphi \in C^\infty(W).$$

Wir rechnen dann nach

$$\begin{aligned} (\nabla_X u, D\varphi)_0 &= (u, D\nabla_X^\# \varphi)_0 + (u, [\nabla_X^\#, D]\varphi)_0 \\ &= (\nabla_X f, \varphi)_0 - (\underbrace{[\nabla_X, D]u}_{\in W^{k-1}(W)}, \varphi) \end{aligned}$$

Also ist $\nabla_X u$ eine schwache Lösung von

$$D(\nabla_X u) = \nabla_X f - [\nabla_X, D]u \in W^{k-1}(W),$$

und somit nach Induktionsvoraussetzung $\nabla_X u \in W^k(W)$. Da dies für alle Vektorfelder $X$ gilt, folgt $u \in W^{k+1}(W)$. □

[3] Die schwache Konvergenz ist definiert als: Für alle $w \in W^1$ gilt $(u_{\epsilon_j} - \tilde{u}, w)_0 \to 0$ für $j \to 0$.

**Lemma 4.27.** *Setze* $J : L^2(W) \oplus L^2(W) \to L^2(W) \oplus L^2(W)$, $J(u,v) = (v, -u)$. *Dann gilt*

$$L^2(W) \oplus L^2(W) = \overline{\Gamma_D} \oplus J(\overline{\Gamma_D}).$$

*Beweis.* Man rechnet direkt nach, dass für jeden Differentialoperator $P$ gilt

$$J(\overline{\Gamma_P}) \perp \overline{\Gamma_{P\#}}.$$

Sei nun $(u,v) \perp \overline{\Gamma_D}$, so gilt für alle glatten $\varphi$, dass $((u,v),(\varphi, D\varphi)) = 0$, also $(u,\varphi)_0 = -(v, D\varphi)_0$. Insofern ist $Dv = -u$ schwach erfüllt, also auch stark, also $v \in W^1$ und $Dv = -u$, also $(v,-u) \in \overline{\Gamma_D}$ und schließlich $(u,v) \in J(\overline{\Gamma_D})$. □

Sei $Q$ nun die Verkettung

$$L^2(W) \to L^2(W) \oplus L^2(W) = \overline{\Gamma_D} \oplus J(\overline{\Gamma_D}) \to \overline{\Gamma_D} \to L^2(W)$$

wobei der erste Pfeil die Inklusion in die erste Komponente, der zweite Pfeil Orthogonalprojektion und der dritte Pfeil Projektion auf die erste Komponente bedeutet. Also gilt somit

$$u \mapsto (u,0) \mapsto (Qu, \overline{D}Qu) \mapsto Qu$$

und $Qu \in W^1(W)$. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es ein $v \in W^1(W)$ mit

$$(u,0) = (Qu, \overline{D}Qu) + (\overline{D}v, -v).$$

Wir erhalten $u = Qu + \overline{D}v$ und $v = \overline{D}Qu$, insgesamt somit

$$u = (\mathrm{Id} + \overline{D}^2)Qu.$$

Offensichtlich ist $(\overline{D}v, -v)$ die Projektion von $(u,0)$ auf $J(\overline{\Gamma_D})$, also sind die Abbildungen $u \mapsto Qu$, $u \mapsto \overline{D}Qu$ und $u \to \overline{D}v = \overline{D}^2 Qu$, im Sinne von $L^2 \to L^2$-Funktionen beschränkt, also

$$\|Qu\|_2 \leq C_1 \left( \|Qu\|_0 + \|\overline{D}Qu\|_0 + \|\overline{D}^2 Qu\|_0 \right) \leq C_2 \|u\|_0,$$

also $Q : L^2(W) \to W^2(W)$ stetig.

Zusammen mit Rellich (Satz 4.10) folgt, dass $Q$ ein kompakter Operator ist, der wegen $(1+\overline{D}^2)Q = 1$ auch selbstadjungiert ist.

Wir zitieren nun den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren (siehe zum Beispiel [HS71, Satz 26.3]

**Satz 4.28** (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren)**.** *Sei $H$ ein komplexer Hilbert-Raum und $Q : H \to H$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt*

$$H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in spec(Q)} H_\lambda},$$

*wobei $H_\lambda$ der Eigenraum zu $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, und für $\lambda \neq 0$ gilt* $\dim H_\lambda < \infty$. *Insbesondere ist $spec(Q)$ abzählbar und der einzige mögliche Häufungspunkt ist* $0$.

Unser $Q$ von oben ist injektiv, also ist $H_0 = \{0\}$. Wir erhalten somit eine Zerlegung on $L^2$ in endlich-dimensionale Räume $H_\lambda$ auf denen $\overline{D}^2$ den Eigenwert $\lambda^{-1} - 1$ hat. Offensichtlich bewahrt $\overline{D}$ diese Zerlegung, und jedes $H_\lambda$ zerfällt in die beiden Eigenräume von $\overline{D}$ zu den Eigenwerten $\pm\sqrt{\lambda^{-1} - 1}$. Die Eigenwert von $\overline{D}$ sind reell, da $\overline{D}$ selbstadjungiert ist. Mit dem Regularitäts-Satz (Satz 4.25) folgt, dass alle Eigenvektoren in

$$\bigcap_{k \in N} W^k(W) = C^\infty(W)$$

liegen.

**THEOREM 4.29** (Spektralsatz für verallgemeinerte Dirac-Operatoren)**.** *Sei $W \to M$ ein Clifford-Bündel über der kompakten Mannigfaltigkeit $(M, g)$. Dann gibt es endlich-dimensionale Räume $E_\lambda \subset C^\infty(W)$, so dass*

$$L^2(W) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in spec(D)} E_\lambda}$$

*mit $D\varphi = \lambda\varphi$ für alle $\varphi \in E_\lambda$. Und $spec(D)$ ist eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$, und die einzigen potentiellen Häufungspunkte sind $\pm\infty$.*

**PROPOSITION 4.30.** *Sowohl $+\infty$ als auch $-\infty$ sind Häufungspunkte des Spektrums von $D$.*

*Beweis.* Die Aussage gilt trivialerweise für $n = 1$ (Nachrechnen) und für orientierte 2-dimensionale-Mannigfaltigkeiten (folgende Proposition). Wir zeigen es hier für $n \geq 3$. Der verbleibende Fall $n = 2$, nicht orientiert, wird hier nicht gezeigt, und kann zum Beispiel aus [Bär00] gefolgert werden.

Sei also $n \geq 3$.

Da $L^2(W)$ unendlich dimensional ist, ist zumindest $\infty$ oder $-\infty$ ein Häufungspunkt. Wir wollen annehmen, dass $-\infty$ kein Häufungspunkt des Spektrums ist und daraus einen Widerspruch herleiten. Für $+\infty$ ist die Argumentation völlig analog.

Sei $-\infty$ kein Häufungspunkt. Dann ist das Spektrum von $D$ nach unten, aber nicht nach oben beschränkt, sagen wir

$$(D\varphi, \varphi)_0 \geq \lambda_{\min}(\varphi, \varphi)_0 \quad \forall \varphi \in W^1(W).$$

Wir nehmen eine offene Überdeckung von $M$ mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_k$, die alle zu einem Ball diffeomorph sind. Wir finden auf jedem $U_j$ einen orthonormalen Rahmen $e_1^j, \ldots, e_n^j$. [4] Sei $\chi_j$ eine Partition der Eins, passend zur Überdeckung $U_j$. Wir setzen

$$Y_i^j := \begin{cases} \sqrt{\chi_j}\, e_i^j & \text{auf } U_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[4] Der Beweis der Vorlesung enthielt einen kleinen Fehler, der hier korrigiert wird.

Sei nun $D\varphi = \lambda\varphi$. Wir rechnen nun zunächst

$$\sum_{i,j}(Y_i^j \cdot \varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 = n(\varphi,\varphi)_0.$$

Es gilt dann zum einen

$$\sum_{i,j}(DY_i^j \cdot \varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 \geq n\lambda_{\min}(\varphi,\varphi)_0.$$

und zum andern

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}(DY_i^j \cdot \varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 & \\
&= \sum_{i,j,k}(e_k^j \cdot \nabla_{e_k^j}(Y_i^j \cdot \varphi), Y_i^j \cdot \varphi)_0 \\
&\leq \sum_{i,j,k}(e_k^j \cdot Y_i^j \cdot \nabla_{e_k^j}\varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 + C\|\varphi\|_0^2 \\
&= -\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq k}}(Y_i^j \cdot e_k^j \cdot \nabla_{e_k^j}\varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 + \sum_{j,i}(Y_i^j \cdot e_i^j \cdot \nabla_{e_i^j}\varphi, Y_i^j \cdot \varphi)_0 + C\|\varphi\|_0^2 \\
&= -(n-2)(D\varphi,\varphi)_0 + C\|\varphi\|_0^2
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$(n-2)\lambda \leq C - n\lambda_{\min}.$$

Da wir $C$ unabhängig von $\lambda$ wählen konnten, erhalten wir für genügend großes $\lambda$ einen Widerspruch.

□

**Proposition 4.31.** *Ist die Dimension von $M$ gerade und ist $M$ orientiert, so ist das Spektrum von $D$ symmetrisch, d.h. ist $\lambda$ ein Eigenwert, so ist auch $-\lambda$ ein Eigenwert und die Dimensionen der Eigenräume stimmen überein.*

Zunächst überlegen wir, wie wir eine Clifford-Multiplikation für Formen erklären. Sei $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T_p^* M)$ und $\varphi \in W_p$. Wir schreiben lokal

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1}^b \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^b$$

für einen lokalen orthonormalen Rahmen $e_1, \ldots, e_n$ von $T_pM$. Dann definieren wir

$$\alpha \cdot \varphi := \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1}^b \cdot \ldots \cdot e_{i_k}^b \cdot \varphi.$$

Diese Definition ist uabhängig von der Wahl der Umgebung und ist deswegen global definiert. Wir erhalten somit eine glatte bilineare Funktion

$$\Lambda^* T_p^* M \times W_p \to W_p.$$

Sei $M$ orientiert. Die Volumenform ist dann lokal $\omega = e_1^b \wedge \ldots \wedge e_n^b$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist. Man rechnet nach, dass

$$\omega \cdot \omega \cdot \varphi = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \varphi.$$

Wir definieren das *komplexe Volumenelement* als

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \omega.$$

In den Übungen zeigen wir das Lemma:

**Lemma 4.32.**

$$D(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \varphi) = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot (D\varphi).$$

*Beweis von Proposition 4.31.* Es gelte $D\varphi = \lambda\varphi$. somit folgt also

$$D(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \varphi) = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot (D\varphi) = -\lambda \omega_{\mathbb{C}} \cdot \varphi.$$

□

Zum Abschluss noch eine Proposition, die im nächsten Kapitel wichtig werden wird:

**Proposition 4.33.** *Es gilt* im $D|_{C^\infty} \oplus \ker D = C^\infty(W)$ *und die Summe ist orthogonal.*

*Beweis.* Offensichtlich bestehen beide Summanden aus glatten Schnitten, und die Summe ist direkt. Zu zeigen ist also, dass sich jeder Schnitt in $C^\infty(W)$ zerlegen lässt. Hierzu schreiben wir

$$\varphi = \sum_{\lambda \in spec(D)} \varphi_\lambda, \qquad D\varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda.$$

Wir setzen $\psi := \sum \lambda \neq 0 \frac{1}{\lambda} \varphi_\lambda$. Diese Reihe konvergiert, und $D$ kann gliedweise reingezogen werden, also

$$D\psi + \varphi_0 = \varphi.$$

□

## 5. Hodge-Theorie

Im folgenden sei immer $(M^n, g)$ eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Das punktweise Skalarprodukt bezeichnen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und das $L^2$- bzw. Sobolev-0-Skalarprodukt mit $(\cdot, \cdot)$.

**Definition 5.1.** Seien $S_0, \ldots, S_N$ komplexe Vektorbündel über $M$ zusammen mit Differentialoperatoren $d_j : C^\infty(S_j) \to C^\infty(S_{j+1})$ mit $d_{j+1} \circ d_j = 0$ heißt *Dirac-Komplex*, falls $S = \bigoplus_{j=0}^N S_j$ eine Clifford-Bündel-Struktur trägt, so dass für den zugehörigen Dirac-Operator gilt

$$D = d + d^*.$$

**Beispiele.** 1.) $S_j = \Lambda^j T^* M$, $d_j$ sei die äußere Ableitung.

2.) $S_0 = \Lambda^{gerade}T^*M$ und $S_1 = \Lambda^{ungerade}T^*M$,

$$d_0 = d|_{\Lambda^{gerade}T^*M} + (d|_{\Lambda^{ungerade}T^*M})^* .$$

Der zugehörige Dirac-Operator heißt *Euler-Operator*.

3.) Signatur-Operator, Dolbeault-Operator, klassischer Dirac-Operator (= Atiyah-Singer-Operator), $spin^c$-Dirac-Operator (kommt später).

Die *$j$-te Kohomologie des Komplexes* definieren wir als

$$H^j(S_*, d_*) := \frac{\ker d_j}{\operatorname{im} d_{j-1}}.$$

*Harmonische Schnitte* sind definiert als die Elemente von

$$\mathcal{H}^j := \{\varphi \in C^\infty(S_j) \,|\, D\varphi = 0\} = \{\varphi \in C^\infty(S_j) \,|\, D^2\varphi = 0\}.$$

**Theorem 5.2** (Hodge-Theorem)**.** *Sei $M$ kompakt mit Dirac-Komplex. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\Phi : \mathcal{H}^j \to H^j(S_*, d_*)$$

*eine Isomorphismus.*

*Beweis.* Nach 4.33 wissen wir bereits dass

$$C^\infty(S) = \ker(D) \oplus \operatorname{im}(D|_{C^\infty(S)}),$$

und die Zerlegung ist orthogonal. Der erste Summand ist gerade $\ker(D) = \bigoplus \mathcal{H}_j$. Ebenso splittet $\operatorname{im}(D|_{C^\infty(S)})$ bezüglich der Graduierung von $S = \bigoplus S_j$. Für $\varphi \in \Gamma(S_{j-1})$ und $\alpha \in \Gamma(S_{j+1})$ gilt

$$(d\varphi, d^*\alpha) = (d^2\varphi, \alpha) = 0,$$

d.h. als orthogonale Summe haben wir

$$\operatorname{im}(D|_{C^\infty}) \cap \Gamma(S_j) = \operatorname{im} d_{j-1} \oplus \operatorname{im} d_j^*.$$

Wir sehen $\ker d_j = \operatorname{im} d_{j-1} \oplus \mathcal{H}_j$ orthogonal, also folgt die Aussage. □

**Folgerung 5.3.**

$$\dim H^j < \infty.$$

**Beispiele.** (1) $S_j := \Lambda^j T^*M$. Dann heißt $H^j_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) = H^j$ *deRham-Kohomologie* von $M$. Außerdem heißt $b_j(M) :=: \dim H^j_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ die *$j$-te Betti-Zahl*.

(2) Gilt $M$ kompakt und $\operatorname{ric} > 0$, so folgt daraus $\mathcal{K}^1(X, X) > 0$ für alle $X \neq 0$, d.h. $\ker D|_{\Lambda^1 T^*M} = \{0\}$, also $b_1(M) = 0$.

**Satz 5.4** (Poincaré-Dualität)**.** *Sei $M^n$ kompakt orientiert. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} S : H^k_{dR}(M, \mathbb{R}) \times H^{n-k}_{dR}(M, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

*ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. Insbesondere gilt*

$$b_k(M) = b_{n-k}(M).$$

*S heißt* Schnittform.

*Beweis.* $S$ ist wohldefiniert (Übung).... □

## 6. Etwas Darstellungstheorie

6.1. **Darstellungstheorie der Clifford-Algebren.** Sei $(V, g)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n$. Wir wollen nun die Struktur der Clifford-Moduln klassifizieren. Sei

$$\mathbb{Cl}(V, g) := \mathrm{Cl}(V, g) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

die komplexifizierte Clifford-Algebra. Die Multiplikation in $\mathbb{Cl}(V, g)$ bzw. $\mathrm{Cl}(V, g)$ bezeichnen wir mit $\cdot$.

Nach den Bemerkungen aus dem ersten Abschnitt wissen wir, dass jeder Clifford-Modul $W$ einen Algebra-Homomorphismus $Cl(V, g) \to \mathrm{End}(W)$ induziert, und umgekehrt definiert jeder solche Algebra-Homomorphismus eine Multiplikation $V \otimes W \to W$, die die Clifford-Relationen (1.2) erfüllt.

Es gilt deswegen die Algebren-Homomorphismen $Cl(V, g) \to \mathrm{End}(W)$, also die *Darstellungstheorie der Clifford-Algebren* zu studieren.

Für viele Überlegung kann man o.B.d.A. $V = \mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Metrik, annehmen.

Wir konstruieren zunächst induktiv (wie in den Übungen) (komplexe) Clifford-Moduln für $\mathbb{R}^n$. Für $n = 1$ definieren wir

$$\Sigma_1 := \mathbb{C}$$

und die Clifford-Multiplikation ist

$$e_1 \cdot \varphi := -i\varphi.$$

Dies ist offensichtlich ein Clifford-Modul der komplexen Dimension 1 für $\mathbb{R}^1$. Ein anderer Clifford-Modul ist gegeben durch

$$\widehat{\Sigma}_1 := \mathbb{C}, \qquad e_1 \hat{\cdot} \varphi := i\varphi.$$

Es gilt $\omega_{\mathbb{C}}|_{\Sigma_1} = \mathrm{Id}$ und $\omega_{\mathbb{C}}|_{\widehat{\Sigma}_1} = -\mathrm{Id}$, insbesondere sind die beiden Clifford Moduln $\Sigma_1$ und $\widehat{\Sigma}_1$ nicht isomorph. $\Sigma_1$ bzw. $\widehat{\Sigma}_1$ heißt die *positive* bzw. *negative Spinor-Darstellung der Clifford-Algebra.*

Wir definieren nun induktiv auch für alle höheren $n$ die Spinor-Darstellungen, und zwar für gerade $n$ einen Clifford-Modul $\Sigma_n$, und für ungerade $n$ zwei Clifford-Moduln $\Sigma_n$ und $\widehat{\Sigma}_n$.

**Schritt von $n$ auf $n+1$ für ungerade $n$:** Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \Sigma_n \oplus \widehat{\Sigma}_n$, und die Clifford-Multiplikation ist hierauf definiert als

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^{n+1} \otimes (\Sigma_n \oplus \widehat{\Sigma}_n) & \to & \Sigma_n \oplus \widehat{\Sigma}_n & \\ e_k \cdot (\sigma_1, \sigma_2) & := & (e_k \cdot \sigma_1, e_k \hat{\cdot} \sigma_2) & k = 1, \ldots, n \\ e_{n+1} \cdot (\sigma_1, \sigma_2) & := & (-\sigma_2, \sigma_1) & \end{array}$$

**Schritt von $n$ auf $n+1$ für gerade $n$:** Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \widehat{\Sigma}_{n+1} := \Sigma_n$ und

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^{n+1} \otimes \Sigma_n & \to & \Sigma_n & \\ e_k \cdot_{n+1} \sigma & := & e_k \cdot_n \sigma & k = 1, \ldots, n \\ e_{n+1} \cdot \sigma & := & i\omega_{\mathbb{C},n} \sigma & \\ e_k \hat{\cdot}_{n+1} \sigma & := & -e_k \cdot_n \sigma & k = 1, \ldots, n \\ e_{n+1} \hat{\cdot} \sigma & := & -i\omega_{\mathbb{C},n} \sigma & \end{array}$$

Offensichtlich gilt $\dim \Sigma_n = 2^{[n/2]}$. Und für $n$ ungerade gilt $\omega_{\mathbb{C}}|_{\Sigma_n} = \mathrm{Id}$ und $\omega_{\mathbb{C}}|_{\widehat{\Sigma}_n} = -\mathrm{Id}$.

**Satz 6.1** (Klassifikation der Clifford-Moduln für $n = 2m$)**.** *Sei $n$ gerade. Dann gibt es zu jedem Clifford-Modul $W$ einen komplexen Vektorraum $Z$, so dass*

$$\varphi : W \cong \Sigma_n \otimes Z, \tag{6.2}$$

*im* Sinne von Clifford-Moduln*, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \otimes W & \stackrel{\mathrm{cl}^W}{\longrightarrow} & W \\ \downarrow \mathrm{id} \otimes \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^n \otimes \Sigma_n \otimes Z & \stackrel{\mathrm{cl}^{\Sigma_n} \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} & \Sigma_n \otimes Z \end{array} \tag{6.3}$$

*Beweis.* Wird noch eingefügt.... □

Dies heißt also, dass jeder Clifford-Modul ein getwisteter Modul von $\Sigma_n$ ist. Anschaulich gesprochen ist dieser Modul deswegen der fundamentale Baustein um einen beliebigen Clifford-Modul zu konstruieren. Wir nennen $\Sigma_n$ die *Spinor-Darstellung der Clifford-Algebra.*

Falls $n$ gerade, kommutiert das komplexe Volumenelement $\omega_{\mathbb{C}}$ mit $X\cdot$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$. Deswegen hat $\omega_{\mathbb{C}}$ die Eigenwerte $\pm 1$, und die Dimension der Eigenräume $\Sigma_n^+$ und $\Sigma_n^-$ ist $2^{(n-2)/2}$.

Sei nun $n$ ungerade. Wir konstruieren aus $\Sigma_n$ einen anderen Clifford-Modul $\widehat{\Sigma}_n$, der als Vektorraum $\Sigma_n$ ist, aber $\widehat{\mathrm{cl}}(v \otimes \psi) = -\mathrm{cl}(v \otimes \psi)$.

Wir betrachten $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n$ ungerade. Dann ist $\Sigma_{n+1}$ auch ein Clifford-Modul für $\mathbb{R}^n$ und das $n$-dimensionale komplexe Volumenelement $\omega_{\mathbb{C},n}$ kommutiert mit $X\cdot$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$ und antikommutiert mit $e_{n+1}\cdot$. Es gilt im Sinne von Cilfford-Moduln

$$\Sigma_{n+1} \cong \Sigma_n \oplus \widehat{\Sigma}_n$$

wobei die Summanden die Eigenräume von $\omega_{\mathbb{C},n}$ zu den Eigenwerten 1 und $-1$ sind.

Allgemein erhält man für ungerade $n$ den analogen Klassifikaitonssatz.

**Satz 6.4** (Klassifikation der Clifford-Moduln für $n = 2m+1$)**.** *Sei $n$ ungerade. Dann gibt es zu jedem Clifford-Modul $W$ komplexe Vektorräume $Z_1$ und $Z_2$, so dass*

$$\varphi : W \cong \Sigma_n \otimes Z_1 \oplus \widehat{\Sigma}_n \otimes Z_2, \tag{6.5}$$

*im* Sinne von Clifford-Moduln *wobei die Summanden die Eigenräume von $\omega_{\mathbb{C},n}$ zu den Eigenwerten 1 und $-1$ sind.*

*Beweis.* .... □

**Proposition 6.6.** *Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $V$. Wir definieren*

$$e_\emptyset := 1 \in Cl(V)$$

$$e_J := e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \in Cl(V),$$

*falls $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ natürliche Zahlen. Dann ist $\mathcal{B} := (e_J)_{J\subset\{1,\ldots,n\}}$ eine Basis von $\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g)$ als komplexer Vektorraum. Insbesondere ist die Dimension von $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ gleich $2^{\dim V}$.*

*Beweis.* Erzeugendensystem: Nutze die Relationen zum Vertauschen und Vernichten...

Linear unabhängig: $\Lambda^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist ein Clifford Modul. Schränke

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \otimes \Lambda^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \Lambda^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$a \otimes \alpha \mapsto a \cdot \alpha$$

auf Elemente der Form $a \otimes 1$, $1 \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^0 V = \mathbb{C}$ ein. Wir erhalten eine Abbildung

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V,g) \to \Lambda^*V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$a \mapsto a \cdot 1$$

die $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$ auf $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ abbildet. Hieraus folgt die lineare Unabhängigkeit. □

**Proposition 6.7.** (a) *Ist $n$ gerade, dann ist die Spinor-Darstellung*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$$

*ein Algebren-***Isomorphismus***.*

(b) *Ist $n$ ungerade, dann ist die summe der beiden Spinor-Darstellungen*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}(\widehat{\Sigma}_n)$$

*ein Algebren-***Isomorphismus***.*

*Beweis.* Sei $\rho_n : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$, falls $n$ gerade und $\rho_n : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}(\widehat{\Sigma}_n)$, falls $n$ ungerade. Aus der induktiven Konstruktion der $\Sigma_n$ sieht man induktiv über $n$, dass $\rho_n$ surjektiv ist. Die Injektivität folgt dann aus Dimensionsgründen. □

Jede Isometrie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ setzt sich zu einem Algebren-Homomorphsmus $A : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ fort. Insbesondere gilt dies für die Punktspiegelung am Ursprung $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto -X$. Wir schreiben

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathbb{C}\mathrm{l}_j(\mathbb{R}^n)$ der Eigenraum von $\mathcal{P}$ zum Eigenwert $(-1)^j$ ist. Der Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) & \to & \Lambda^*\mathbb{R}^n \\ A & \mapsto & A \cdot 1 \end{array}$$

bildet $\mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n)$ auf $\Lambda^{even}\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n)$ auf $\Lambda^{odd}\mathbb{R}^n$ ab.

**Proposition 6.8.** *Sei $n$ ungerade. Wir betrachten nur noch eine der beiden Spinor-Darstellungen und schränken Sie auf $\mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n)$ ein. Dann sind*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n) \qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$$

*und*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\widehat{\Sigma}_n) \qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\widehat{\Sigma}_n)$$

*Vektorraumisomorphismen.*

*Beweis.* Die Surjektivität kann man wiederum durch Induktion zeigen, und die Injektivität folgt dann aus Dimensionsgründen. □

**Proposition 6.9.** *Jeder Clifford-Modul $W$ über einem euklidischen Vetorraum $V$ trägt ein hermitesches Skalarprodukt, so dass*

$$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, X \cdot \psi \rangle$$

*für alle $X \in V$ und alle $\varphi, \psi \in W$.*

*Beweis.* Wir wählen zunächst irgendein Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_0$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ wieder eine ONB von $V$ und $e_I$ wie oben. Wir setzen dann

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \langle e_I \cdot X, e_I \cdot Y \rangle_0.$$

Dann gilt $\langle e_j \cdot X, e_j \cdot Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ Daraus folgt für $Y := e_j \cdot Z$

$$\langle e_j \cdot X, Z \rangle = -\langle X, e_j \cdot Z \rangle$$

und daraus wiederum die Behauptung. □

6.2. **Lie-Gruppen und Ihre Darstellungen.** Wir wollen ein paar Definitionen und Sachverhalte über Lie-Gruppen zusammentragen, die wir im folgenden brauchen werden. Man beachte auch die Ergänzungen in Abschnitt 14.4.

**Definition 6.10.** Eine *Lie-Gruppe* ist ein Gruppe $G$ zusammen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur auf $G$, so dass die Multiplikation $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ glatte Abbildungen sind.

**Beispiele.** $GL(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$, $SU(m)$, $GL(m, \mathbb{C})$. Man kann zeigen [War83, Theorem 3.42], dass jede abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit ist und deswegen ist es eine Lie-Gruppe. Es gibt aber auch Lie-Gruppen, die man nicht als abgeschlossene Untergruppe eines $GL(n, \mathbb{R})$ erhält.

**Satz 6.11.** *Ist $G$ eine Lie-Gruppe, so trägt die universelle Überlagerung $\tilde{G}$ eine eindeutige Gruppenstruktur, so dass $\tilde{G} \to G$ ein glatter Gruppenhomomorphismus ist.*

Beweisskizze siehe Vorlesung.

**Definition 6.12.** Eine *reelle (oder komplexe) Darstellung* einer Lie-Gruppe $G$ besteht aus einem reellen (oder komplexen) Vektorraum $V$ zusammen mit einem glatten Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.

Wir wollen uns hier auf endlich-dimensionale Darstellung beschränken. [5]

**Beispiele.** (1) Die *triviale* Darstellung: $V = \mathbb{R}$, $\rho(g) = \mathrm{Id}$ für alle $g \in G$.
(2) Sei $G$ eine Untergruppe von $GL(V)$. Dann ist $(V, \rho)$ mit $\rho(g) = g$ die *kanonische Darstellung* von $G$.
(3) Die Adjungierte Darstellung aus Abschnitt 14.4

Als Literatur zu Lie-Gruppen ist [War83] zu empfehlen. Wer noch mehr über Darstellungstheorie wissen will, kann auch in [Hum80] und [BtD95] viel Interessantes finden.

6.3. **Die Spin-Gruppe.** Die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist für $n \geq 2$ nicht einfach zusmmenhängend. die Dimension $n = 2$ ist hierbei ein Spezialfall: $\mathrm{SO}(2) \cong U(1) \cong S^1$, also $\pi_1(\mathrm{SO}(2)) \cong \mathbb{Z}$. Die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(2)$ ist $\mathbb{R}$.

Für $n \geq 3$ gilt hingegen $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.

Wir konstruieren nun für alle $n \geq 2$ die Spin-Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$, und zeigen anschließend, dass es eine zweifache zusammenhängende Überlagerung ist. Hieraus folgt dann direkt, dass $\mathrm{Spin}(n)$ für alle $n \geq 3$ die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ ist.

[5] In der Quantenmechanik sind auch unendlich-dimensionale Darstellungen sehr wichtig.

**Definition 6.13.** Sei $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ wieder die komplexifizierte Clifford-Algebra. Die Elemente von $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$, die ein Inverses besitzen, bilden eine Gruppe, die Einheiten-Gruppe $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)^*$ von $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$. Die *Spin-Gruppe* $\mathrm{Spin}(n)$ ist definiert als die Untergruppe die von den Elementen

$$\left\{ \underbrace{X \cdot Y \cdot}_{\in \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)} \mid X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad |X| = |Y| = 1 \right\}$$

erzeugt wird.

Wir bezeichnen mit $s_X$ die Spiegelung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an $X^\perp$.

**Satz 6.14.** *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Theta : \mathrm{Spin}(n) & \to & \mathrm{SO}(n) \\ (X \cdot Y \cdot) & \mapsto & s_X \circ s_Y \end{array}$$

*ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus und eine glatte 2-fache Überlagerung. Es gilt* $\ker \Theta = \{\pm 1\}$.

*Beweis.* Wie bisher betten wir $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ ein. Die Punktspiegelung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto -X$ setzt sich zu einem Algebren-Isomorphismus $\mathcal{P} : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ fort. Für alle $B \in \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)^*$ definieren wir

$$\begin{array}{rcl} S_B : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \\ A & \mapsto & \mathcal{P}(B) \cdot A \cdot B^{-1} \end{array}$$

Es gilt $S_{B_1 \cdot B_2} = S_{B_1} \circ S_{B_2}$. Für alle $X \in \mathbb{R}^n$, $|X| = 1$ ist $S_X$ eine Forsetzung von $s_X$ zu einem Endomorphismus $S_X$ von $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$. (Übung!) Hieraus folgt, dass $\Theta$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Offensichtlich ist $\Theta$ surjektiv. Als Übung, zeigen wir, dass der Kern von $\Theta$ nur aus $\pm 1 \in \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ besteht, d.h.

$$B \in \mathrm{Spin}(n), \Theta(B) = 1 \Rightarrow B = \pm 1.$$

Wir werden nun zeigen, dass es eine Umgebung $U$ der Eins 1 in $\mathrm{SO}(n)$ und eine injektive glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)^*$ gibt mit $f(U) \subset \mathrm{Spin}(n)$ und $\Theta \circ f = \mathrm{Id}|_U$. Durch Komposition mit den Links-Translation $l_A$, $A \in \mathrm{Spin}(n)$ und $l_{\Theta(A)}$ erhalten wir dann eine Familie

$$\left( l_A \circ f \circ l_{\Theta(A)^{-1}} \mid A \in \mathrm{Spin}(n) \right)$$

von lokalen Diffeomorphismen, die den Gruppenhomorphismus $\Theta : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ in einer Umgebung der Eins umkehren und auf $l_{\Theta(A)}(U)$ definiert sind. Hieraus folgen dann alle Aussagen.

Der Tangentialraum $T_1\mathrm{SO}(n)$ besteht aus den schiefsymmetrischen Matrizen und diese wiederum identifizieren wir mit $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ mittels

$$e_i \wedge e_j \mapsto (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})_{lk} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}).$$

Sei nun $J : \Lambda^2\mathbb{R}^n \to \mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)$, $J(e_i \wedge e_j) = (1/2)e_i \cdot e_j$. Wir wählen zunächst eine Umgebung $U_1$ von $0 \in T_1\mathrm{SO}(n)$ so klein, dass die Exponential-Abbildung von Matrizen

$$T_1\mathrm{SO}(n) \ni A \mapsto \exp^{\mathrm{SO}(n)}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \mathrm{SO}(n)$$

ein Diffeomorphismus von $U_1$ auf das Bild ist. Sei außerdem

$$\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n) \supset \widetilde{U} \ni B \mapsto \exp^{\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*}(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \in \mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*$$

**LEMMA 6.15.** *Es gilt*

$$\exp^{\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*} \circ J(A) \in \mathrm{Spin}(n)$$

*und*

$$\Theta \circ \exp^{\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*} \circ J(A) = \exp^{\mathrm{SO}(n)} A.$$

*Beweis des Lemmas.* Nach einer euklidischen Koordinatentransformation hat $A$ die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{[n/2]} a_j e_{2j-1} \wedge e_{2j},$$

also $J(A) = B = (1/2)\sum_j a_j e_{2j-1} \cdot e_{2j}$. Daraus folgt dann

$$\exp^{\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*}(B) = \prod e_{2j-1}\left(\cos\frac{a_j}{2} e_{2j-1} + \sin\frac{a_j}{2} e_{2j}\right).$$

Die ist offensichtlich ein Element von $\mathrm{Spin}(n)$ und das Lemma folgt dann durch eine kurze Überlegung. □

Also ist

$$f := \exp^{\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)^*} \circ J \circ \left(\exp^{\mathrm{SO}(n)}\right)^{-1}$$

eine Abbildung, die das Gewünschte liefert. □

Aus dem Beweis folgt auch direkt:

**FOLGERUNG 6.16.** $\mathrm{Spin}(n)$ *ist eine Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n)$ *und somit eine Lie-Gruppe. Es gilt*

$$T_1\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{span}\,\{e_j \cdot e_k \mid 1 \le j < k \le n\}.$$

Man sieht leicht, dass $\mathrm{Spin}(n)$ für alle $n \ge 2$ zusammenhängend ist.

**Beispiele.**

(1) $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1 \cong U(1)$, $\vartheta : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$,

(2) $\mathrm{Spin}(3) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^3) = \mathrm{End}\Sigma_3 = \mathrm{End}\mathbb{C}^2$ und man rechnet nach, dass $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$. Identifizieren wir $\mathbb{C}^2$ mit den Quaternionen, so besteht $SU(2)$ aus den Einheits-Quaternionen. Also ist $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$ diffeomorph zu $S^3$. Insbesondere ist $\mathrm{Spin}(3)$ einfach zusammenhängend und somit $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.
(3) $\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$. (ohne Beweis)
(4) Alle $\mathrm{Spin}(n)$ für $n \geq 3$ sind einfach zusammenhängend. Beweis siehe Anhang 14.5.

**Korollar 6.17.** *Für $n \geq 3$ ist $\mathrm{Spin}(n)$ die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$.*

## 7. Hauptfaserbündel und assoziierte Vektorbündel

Das Ziel dieses Abschnitt ist es, lokale Basisschnitte etwas konzeptioneller zu verstehen als bisher. Wir wollen ein Bündel konstruieren, dessen lokale Schnitte gerade lokale Basisschnitte sind. Da es im allgemeinen keine globalen Basisschnitte gibt, erwarten wir auch, dass dieses Bündel im allgemeinen keine global definierten Schnitte hat. Da aber jedes Vektorbündel mindestens einen globalen Schnitt besitzt, den Nullschnitt, kann dieses Bündel kein Vektorbündel sein. Wir werden nun Bündel konstruieren, dessen Fasern nicht mehr Vektorräume sind, sondern Lie-Gruppen. Solche Faserbündel heißen Hauptfaserbündel. Wir benötigen Hauptfaserbündel zur Konstruktion des klassischen Dirac-Operators. Hauptfaserbündel sind außerdem zentral im Standard-Modell der Elementarteilchen-Physik.

**Definition 7.1.** Sei $G$ eine Lie-Gruppe und $M$ eine Mannigfaltigkeit. Ein $G$-Hauptfaserbündel über $M$ ist eine Mannigfaltigkeit $P$, zusammen mit einer glatten Abbildung $\pi : P \to M$ und einer glatten Abbildung $P \times G \to P$, $(p,g) \mapsto pg$ so dass gilt

(1) $(pg_1)g_2 = p(g_1 g_2)$ für alle $p \in P$, $g_1, g_2 \in G$, ($G$ operiert von rechts auf $P$)
(2) Für jedes $m \in M$ gibt es eine Umgebung $U$ von $m$ in $M$, und einen Diffeomorphismus $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, so dass $\pi \circ \varphi^{-1}(u,g) = u$ für alle $(u,g) \in U \times G$ und $(\varphi^{-1}(u,g))g' = \varphi^{-1}(u,gg')$.

Wir nennen $P$ den *Totalraum des Bündels*, $\varphi$ heißt lokale Trivialisierung, $G$ heißt *Strukturgruppe*, und Mengen der Form $\pi^{-1}(m)$, $m \in M$ heißen *Fasern*.

Dies impliziert insbesondere, dass die Operation von $G$ frei ist ($pg \neq p$, falls $g \neq e$), und auf den Fasern transitiv operiert (gilt $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, so gibt es ein $g \in G$ mit $p_1 = p_2 g$).

**Beispiele.** (1) Sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$P_{GL}(M) := \{(m, E_m) \mid m \in M, \quad E_m \text{ Basis von } T_m M\}$$

ein $GL(n)$-Hauptfaser-Bündel.
(2) Sei $(M,g)$ eine $n$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$P_O(M,g) := \{(m, E_m) \mid m \in M, \quad E_m \text{ Orthonormalbasis von } T_m M\}$$

ein $O(n)$-Hauptfaser-Bündel,

(3) Sei $(M, g)$ eine $n$-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Orientierung $\omega$. Dann ist

$$P_{SO}(M, g, \omega) := \{(m, E_m) \,|\, m \in M, \quad E_m \text{ positiv orientierte Orthonormalbasis von } T_mM\}$$

ein $SO(n)$-Hauptfaser-Bündel,

(4) Sei $V$ ein $k$-dimensionales reelles Vektorbündel über $M$ mit einer Metrik. Dann ist

$$P_{SO}(V) := \{(m, E_m) \,|\, m \in M, \quad E_m \text{komplexe Orthonormalbasis von } V\}$$

ein SO$(k)$-Hauptfaserbündel.

(5) Sei $V$ ein $k$-dimensionales komplexes Vektorbündel über $M$ mit einer hermiteschen Metrik. Dann ist

$$P_U(V) := \{(m, E_m) \,|\, m \in M, \quad E_m \text{komplexe Orthonormalbasis von } V\}$$

ein $U(k)$-Hauptfaserbündel. Wenn wir $V$ zugleich als $2k$-dimensionales reelles Vektorbündel ansehen, so gilt

$$P_U(V) \subset P_O(V),$$

wobei die Inklusion $(e_1, \ldots, e_k)$ auf $(e_1, ie_1, \ldots, e_k, ie_k)$ abbildet.

**Definition 7.2.** Sei $P \to M$ ein $G$-Hauptfaserbündel. Eine *$G$-äquivariante Distribution von Horizontalräumen* ist ein Familie von Vektorräumen $(H_p)_{p \in P}$, so dass

(1) $H_p$ ist ein Unterraum von $T_pP$ und

$$T_pP = H_p \oplus T_p\pi^{-1}(\pi(p)),$$

(2) Sei $\mu_g : P \to P$, $p \mapsto pg$. Dann gilt

$$(d\mu_g)(H_p) = H_{pg}.$$

**Beispiele.**

$V$ trage einen Zusammenhang. Dann ist ... eine $GL(n)$-äquivariante Distribution von Horizontalräumen.

**Definition 7.3.** Sei $P \to M$ ein $G$-Hauptfaserbündel. Sei außerdem $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine reelle (bzw. komplexe) Darstellung von $G$, $\dim V = k$. Dann operiert $G$ von links auf $P \times V$ wie folgt

$$g(p, v) := (pg^{-1}, \rho(g)v).$$

Der Quotient von $P \times V$ nach dieser Gruppen-Operation heißt das *assoziierte Vektor-Bündel*

$$P \times_\rho V.$$

Es ist ein reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über $M$ vom Rang $k$.

Nun trage $P$ zusätzlich eine $G$-äquivariante horizontale Distribution $(H_p \,|\, p \in P)$. Wir wollen einen Zusammenhang auf $P \times_\rho V$ definieren.

Zushg., Beispiele, assoziierte Vektorbündel, .... etc., wird noch eingefügt.

## 8. Der klassische Dirac-Operator

**Definition 8.1.** Eine *Spin-Struktur* auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, g, \omega)$ besteht aus einem $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaser-Bündel $P_{\mathrm{Spin}}$ und einer Abbildung $\vartheta : P_{\mathrm{Spin}} \to P_{SO}(M, g, \omega)$, so dass das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathrm{Spin}} \times \mathrm{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[dd, "\vartheta \times \Theta"] & P_{\mathrm{Spin}} \arrow[dd, "\vartheta"] \arrow[dr] & \\
 & & M \\
P_{SO}(M, g, \omega) \times \mathrm{SO}(n) \arrow[r] & P_{SO}(M, g, \omega) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} .$$

Das Spinor-Bündel, Spinoren....

Es gibt eine nützliche Klasse von Invarianten von Vektorbündeln, die *charakteristische Klassen* genannt werden. Diese Klassen ordnen Vektorbündeln Kohomologie-Klassen zu. Einige dieser Klassen werden wir später kennenlernen.

Hier an dieser Stelle wollen wir uns darauf beschränken, zu sagen, dass es auch eine solche Klasse gibt, die mißt, ob eine Spin-Struktur auf $(M, g, \omega)$ existiert. Diese Klasse heißt *2. Stiefel-Whitney-Klasse* $w_2(TM)$, und $w_2(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$. Zum Vergleich: Die 1. Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ ist genau dann 0, wenn $M$ orientierbar ist. Für weitergehende Aussagen zu Stiefel-Whitney-Klassen liest man am besten in [MS74], §4.

**Bemerkungen 8.2.** (1) Insbesondere folgt daraus, dass die Eigenschaft, ob eine Spin-Struktur existiert oder nicht, nicht von der Wahl der Riemannschen Metrik abhängt.

(2) Wenn man die analoge Konstruktion des Spinor-Bündels für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten durchführt, ist die Lösung ein bischen komplizierter. Man splittet dann das Bündel $TM$ in zwei Unterbündel $T^+M$ und $T^-M$ auf, so dass $TM = T^+M \oplus T^-M$ und die Metrik ist auf $T^+M$ positiv definit und auf $T^-M$ negativ definit. Eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine Spin-Struktur, falls

$$w_2(TM) = w_1(T^+M) \cap w_1(T^-M).$$

Falls $M$ eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit ist, dann gilt $w_1(T^-M) = 0$. Also besitzt $M$ genau dann eine Spin-Struktur zu der Lorentz-Metrik, wenn $M$ eine Spin-Struktur zu einer Riemannschen Metrik trägt. Eine sehr gute Referenz ist [Bau81]. [6]

**Beispiele.** (1) $T^n$ ist spin,
(2) $S^n$ ist spin,
(3) $\mathbb{C}P^m$ ist spin, genau dann wenn $m \equiv 1 \quad mod 2$,
(4) $\mathbb{R}P^n$ ist spin, genau dann wenn $n \equiv 3 \quad mod 4$.

**Bemerkung 8.3.** Sei $M$ eine triangulierte Mannigfaltigkeit. Dann ist das *$k$-Gerüst* $(M)_k$ die Vereinigung der Zellen der Dimension von 0 bis $k$.

[6] Helga Baum's Buch [Bau81] ist leider nicht mehr lieferbar.

Wir zitieren zwei Sätze ohne Beweis.

**Satz 8.4.** *Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent*

(1) *$M$ ist orientierbar,*
(2) *$w_1(TM) = 0$,*
(3) *es gilt* $\dim M = 2$ *oder es gibt einen globalen Basisschnitt auf dem 1-Gerüst $(M)_1$ von $M$, d.h. es gibt eine Funktion $(M)_1 \to P_{GL}(M)$, so dass die Verkettung $(M)_1 \to P_{GL}(M) \to M$ die Inklusion ist.*

**Satz 8.5.** *Sei $(M, \omega)$ eine orientierte Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(1) *auf $(M, \omega)$ existiert eine Spin-Struktur,*
(2) *$w_2(TM) = 0$,*
(3) *es gilt* $\dim M = 2$ *oder es gibt einen globalen Basisschnitt auf dem 2-Gerüst $(M)_2$ von $M$, d.h. es gibt eine Funktion $(M)_2 \to P_{GL}(M)$, so dass die Verkettung $(M)_2 \to P_{GL}(M) \to M$ die Inklusion ist.*

Wir wollen nun annehmen, dass eine Spin-Struktur existiert, und fragen uns dann, ob diese auch eindeutig ist.

Sei

$$\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \ker \Theta \subset \mathrm{Spin}(n).$$

Die universelle Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \to M$ ist ein $\pi_1(M)$-Hauptfaserbündel über $M$. Das assoziierte Bündel

$$P_\alpha := \widetilde{M} \times_\alpha \mathbb{Z}_2 \to M$$

ist ein $\mathbb{Z}_2$-Hauptfaserbündel über $M$. Sei nun $P_{\mathrm{Spin}}$ eine Spin-Struktur. Das faserweise Produkt $P_{\mathrm{Spin}} \times P_\alpha$ ist ein $\mathrm{Spin}(n) \times \mathbb{Z}_2$-Hauptfaserbündel. Wir schrieben

$$m : \mathrm{Spin}(n) \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(n), \qquad m(g, h) = gh.$$

Dann ist

$$P^\alpha_{\mathrm{spin}} := (P_{\mathrm{Spin}} \times P_\alpha) \times_m \mathrm{Spin}(n)$$

wieder eine Spin-Struktur über $M$.

**Proposition 8.6.** *Falls eine Spin-Struktur $P$ auf $M$ existiert, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}_2) & \to & \{\textit{Spin-Strukturen auf } M\}/\textit{Isomorphie} \\ \alpha & \mapsto & P^\alpha_{\mathrm{spin}} \end{array}$$

*eine Bijektion.*

Der Beweis wird ausgelassen[7].

**Bemerkung 8.7.** Es gilt $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) = H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

[7] Der Beweis ist nicht schwierig und wird zusammen mit der Isomorphie von Spin-Strukturen vielleicht noch nachgeliefert.

**Lokale Formel für den Zusammenhang des Spinor-Bündels.** Seien $\Gamma_{ij}^k$ die Christoffelsymbole bezüglich eines orthonormalen Rahmens $e_1, \ldots, e_n$. Sei $q$ ein lokaler Schnitt von $P_{\mathrm{Spin}}$ mit $\vartheta \circ q = (e_1, \ldots, e_n)$, der definiert auf $U$ ist. Sei $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$. Es gibt dann eine induzierte glatte Funktion $\tau : U \to \Sigma_n$, so dass

$$\psi|_U = [q, \tau].$$

**Lemma 8.8.**

$$\nabla_X^{\Sigma M}[q,\tau] = [q, \partial_X \tau + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \, \Gamma_{ij}^k e_j^b \cdot e_k^b \cdot \tau].$$

*Beweis.* ... □

**Proposition 8.9.** *(i) Die Krümmung von $\Sigma M$ ist gegeben durch*

$$R^{\Sigma M}(X,Y)\varphi = -\frac{1}{4} \sum_k (R^{TM}(X,Y)e_k)^b \cdot e_k^b \cdot \varphi.$$

*(ii) Für den Krümmungsendomorphismus $\mathcal{K}$ von $\Sigma M$ gilt*

$$\mathcal{K}(\varphi) = \frac{1}{4} \, \mathrm{scal} \varphi.$$

*Diese Formel wurde von Schrödinger* **??** *und später unabhängig davon von Lichnerowizc* **??** *gezeigt.*

*Beweis.* (i) Nachrechnen in Koordinaten.

(ii) ..... □

Zusammen mit der Bochner-Formel (**??**)

**Korollar 8.10** (Schrödinger, Lichernowicz)**.** *Für den klassischen Dirac-Operator gilt*

$$D^2 \varphi = \nabla^* \nabla \varphi + \frac{\mathrm{scal}}{4} \varphi.$$

**Korollar 8.11.** *Sei $M$ eine kompakte orientierte Riemannsche spin Mannigfaltigkeit, sei $s_0 =$* $\min_M \mathrm{scal} > 0$*. Dann erfüllt jeder Eigenwert $\lambda$ des klassischen Dirac-Operators auf $M$ die Abschätzung*

$$\lambda^2 \geq \frac{s_0}{4}.$$

*Insbesondere gilt* $\ker(D) = \{0\}$.

*Beweis.* Sei $\varphi$ ein Spinor der Eigenvektor von $D$ zum Eigenwert $\lambda$ ist. (Solche Spinoren nennen wir ab sofort *Eigenspinoren*.) Dann gilt

$$\lambda^2(\varphi,\varphi) = (D^2\varphi,\varphi) = \underbrace{(\nabla\varphi, \nabla\varphi)}_{\geq 0} + \frac{s_0}{4}(\varphi,\varphi) \geq \frac{s_0}{4}(\varphi,\varphi).$$

□

**Bemerkung 8.12.** Man kann zeigen [Sem99], dass für alle Spinoren $(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \geq \frac{1}{n}(D\varphi, D\varphi)$, wobei $n = \dim M$. Hieraus folgt die folgende stärkere Abschätzung von Thomas Friedrich [Fri80].

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1}\frac{s_0}{4}.$$

Diese Abschätzung ist *scharf*, (das heißt die Konstante kann nicht ohne weitere Annahmen verbessert werden), da für den betragsmäßig kleinsten Eigenwert $\lambda_1$ des klassischen Dirac-Operators auf $S^n$ (mit Standardmetrik) gilt

$$\lambda_1^2 = \frac{n}{n-1}\frac{\mathrm{scal}}{4}.$$

## 9. Wärmeleitungs- und Wellen-Geichung

In diesem Abschnitt sei $W$ immer ein Clifford-Bündel über $M$ und $D$ der verallgemeinerte Dirac-Operator auf $W$ Ziel dieses Abschnittes ist es, Lösungen der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial s}{\partial t} + D^2 s = 0 \qquad s : M \times [0,\infty) \to W, \quad s(\,\cdot\,,t) =: s_t \in \Gamma(W)$$

und der Wellengleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} - iDs = 0 \qquad s : M \times \mathbb{R} \to W, \quad s(\,\cdot\,,t) =: s_t \in \Gamma(W)$$

zu finden zu vorgegebenem Anfangswert $s_0 \in \Gamma(W)$.

Wir müssen zunächst definieren, wie wir $D$ in beschränkte Funktionen einsetzen können.

Wir definieren

$$CB(\mathrm{spec}(D)) := \{f \,|\, f : \mathrm{spec}(D) \to \mathbb{C} \text{ beschränkt.}\}$$

Diese Raum ist zusammen mit der Supremumsnorm ein Banachraum. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-raum, z.B. $\mathcal{H} = L^2(W)$ oder $\mathcal{H} = W^k(W)$, dann schreiben wir:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \,|\, A \text{ beschränkt},\}.$$

Versehen mit der Operator-Norm ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Banachraum.

Für $f \in CB(\mathrm{spec}(D))$ sei $f(D)$ die eindeutige beschränkte lineare Abbildung $f(D) : L^2(W) \to L^2(W)$, so dass

$$f(D)|_{E_\lambda} = \lambda \,\mathrm{Id}\,|_{E_\lambda}.$$

**Proposition 9.1.** (1) *$\iota_D : CB(\mathrm{spec}(D)) \to \mathcal{B}(L^2(W)), f \mapsto f(D)$ ist ein unitärer $*$-Ring-Homomorphismus*
(2) *$\iota_D$ ist stetig.*
(3) *$D$ kommutiert mit $f(D)$.*
(4) *$f(D)$ bildet die $C^\infty(W)$ auf $C^\infty(W)$ ab.*
(5) *Ist $f$ reell-wertig, so ist $f(D)$ selbstadjungiert.*

**Beispiele.** Die Funktionen $\lambda \mapsto e^{-t\lambda^2}$ , $t \geq 0$ und $\lambda \mapsto e^{it\lambda}$, $t \in \mathbb{R}$, sowie alle ihre Ableitungen nach $t$ sind Elemente von $CB(\mathrm{spec}(D)$.

*Beweis.* Eigenschaft (1) kann man einfach kontrollieren. Die Stetigkeit (2) ist dann klar, da die Operator-Norm von $f(D)$ mit der Supremums-Norm von $f$ übereinstimmt. (3) ist ebenfalls klar. Nun zeigen wir (4). Es gilt für $\varphi \in C^\infty(W)$: $D^k f(D)\varphi = f(D)D^k\varphi \in L^2$. Also $f(D) \in W^k(W)$, und somit $f(D) \in C^\infty(W)$. (5) ist eine direkt Folgerung von (1). □

**KOROLLAR 9.2.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I \to CB(\mathrm{spec}(D)), t \mapsto f_t$ eine glatte Abbildung, so dass $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_t \in CB(\mathrm{spec}(D))$, für alle $k = 0, \ldots, k_0$, dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} F_t : I & \to & \mathcal{B}(L^2(W)) \\ t & \mapsto & f_t(D) \end{array}$$

*ebenfalls glatt und es gilt für alle $k = 0, \ldots, k_0$:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k F_t = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k f_t\right)(D).$$

*Beweis.* Die Abbildung $\iota_D$ ist beschränkt und linear und somit ist bereits die 2. Ableitung (im Fréchet-Sinne) von $\iota_D$ gleich 0. Also ist $\iota_D$ glatt im Fréchet-Sinn. Das Korollar folgt dann aus der Kettenregel. □

**KOROLLAR 9.3.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I \to CB(\mathrm{spec}(D), t \mapsto f_t$ eine glatte Abbildung, so dass $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_t \in CB(\mathrm{spec}(D))$, für alle $k = 0, \ldots, k_0$ dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} F_t : I & \to & \mathcal{B}(W^r(W)) \\ t & \mapsto & f_t(D) \end{array}$$

*für alle $r \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und ebenfalls glatt und es gilt (bezüglich der Operator-Topologie von $\mathcal{B}(W^r(W))$) für alle $k = 0, \ldots, k_0$*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k F_t = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k f_t\right)(D).$$

*Beweis.* Der Beweis geht fast wie oben, wobei man noch zusätzlich nutzt, dass $D$ mit allen $f_t(D)$ und allen Ableitungen vertauscht. □

**Beispiele.** (1) $f_t(\lambda) = e^{i\lambda t}$. Sei $s_0 \in \Gamma(W)$. Dann gilt $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_t \in CB(\mathrm{spec}(D))$ für alle $k \in \mathbb{N}$. als Folgerung hiervon ist dann $t \mapsto f_t(D)s_0$ glatt als Abbildung $I \to W^k(W)$ für alle $k$, und somit ist nach den Sobolevschen Einbettungs-Sätzen auch $I \to C^r(W)$, $t \mapsto f_t(D)s_0$ glatt. Somit ist

$$s(x,t) := e^{itD} s_0(x)$$

eine glatte Lösung der Wellengleichung.

(2) Analoge Betrachtungen für $f_t(\lambda) = e^{-\lambda t^2}$ liefern, dass für glatte Anfangsdaten $s_0 \in \Gamma(W)$ auch

$$e^{-tD^2} s_0(x)$$

eine glatten Schnitt auf $M \times [0, \infty)$ liefert, der eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit der Lösungen klären.

**Proposition 9.4** (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)**.** *Sei $s_t$ eine Lösung der Wellengleichung. Dann gilt*

$$\operatorname{supp} s_t \subset \{y \in M \mid d(y, \operatorname{supp} s_0) \leq |t|\}. \tag{9.5}$$

*Beweis.* O.B.d.A. können wir annehmen, dass $t \geq 0$.

Wir werden die Behauptung zunächst für $t < \operatorname{injrad}(M, g)$ zeigen. Wir zeigen zunächst ein Lemma:

**Lemma 9.6.** *Sei $R < \operatorname{injrad}(M, g)$ und $m \in M$. Dann ist*

$$\int_{B(m,R-t)} |s_t|^2$$

*eine monoton in $t$ fallende Funktion.*

*Beweis des Lemmas.* Die Ableitung des Intergrals liefert zwei Terme: ein erster aus der Ableitung des Integranden, ein zweiter aus der Ableitung der Integrationsmenge.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B(m,R-t)} |s_t|^2 &= \left( \langle \frac{\partial}{\partial t} s_t, s_t \rangle + \langle s_t, \frac{\partial}{\partial t} s_t \rangle \right) - \int_{S(m,R-t)} |s_t|^2 \\ &= \left( \langle iDs_t, s_t \rangle + \langle s_t, iDs_t \rangle \right) - \int_{S(m,R-t)} |s_t|^2 \end{aligned}$$

Mit Proposition 2.6 formen wir den ersten Term in

$$i \int_{S(m,R-t)} \langle \nu^b \cdot s_t, s_t \rangle$$

um. Es gilt mit Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_{S(m,R-t)} \langle \nu^b \cdot s_t, s_t \rangle \right| \leq \left( \int_{S(m,R-t)} \langle \nu^b \cdot s_t, \nu^b \cdot s_t \rangle \right)^{1/2} \left( \int_{S(m,R-t)} \langle s_t, s_t \rangle \right)^{1/2}.$$

Da Clifford-Multipikation mit $\nu^b$ eine punktweise Isometrie ist, ist die rechte Seite hiervon gleich $\int_{S(m,R-t)} |s_t|^2$. Also folgt das Lemma. □

Sei nun zunächst $t \in (0, \rho_M)$, $\rho_M := \operatorname{injrad}(M, g)$. Für $x \notin \{y \in M \mid d(y, \operatorname{supp} s_0) \leq |t|\}$ gilt $B(x, t_0) \cap \operatorname{supp}(s_0) = \emptyset$, also mit dem Lemma

$$\int_{B(m,0)} |s_t|^2 \leq \int_{B(m,t)} |s_0|^2 = 0.$$

Also auch $x \notin \mathrm{supp}(s_t)$. die Aussage ist somit bewiesen für alle $t < \rho_M$.

Sei nun $t_0$ das Supremum über alle $t$, für die (9.5) gilt. Falls $t_0 < \infty$, dann ist $\tilde{s}_t := s_{t+t_0-(\rho_M/2)}$ ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung und zwar zu den Anfangswerten $s_{t_0-(\rho_M/2)}$. Da (9.5) für $\tilde{s}_t \quad \forall t \in (0, \rho_M)$ gilt, folgt (9.5) auch für alle $t \le t_0 + (\rho_M/2)$. Also ist $t_0 = \infty$. □

**Bemerkung 9.7.** Dieser Beweis gilt auch dann noch wenn $M$ nicht kompakt ist.

**KOROLLAR 9.8.** *Zu gegebenem glatten Anfangswerten $s_0$ existiert eine eindeutige Lösung der Wellengleichung.*

*Beweis.* Die Existenz haben wir bereits gesehen. Sind $s_t$, $\tilde{s}_t$ Lösungen zu den gleichen Anfangswerten, so ist $\hat{s}_t := s_t - \tilde{s}_t$ eine Lösung zu den Anfangswerten 0. Wegen $\mathrm{supp}\, \hat{s}_0 = \emptyset$ gilt $\mathrm{supp}\, \hat{s}_t = \emptyset$ für alle $t$. □

**PROPOSITION 9.9.** *Sei $s_t$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt für $t > 0$*

$$\frac{d}{dt} \int_M |s_t|^2 \le 0.$$

*Beweis.*

$$\frac{d}{dt} \int_M |s_t|^2 = \int_M (\langle -D^2 s_t, s_t \rangle + \langle s_t, -D^2 s_t \rangle) = -2\|D s_t\|^2 \le 0.$$

□

**KOROLLAR 9.10.** *Zu gegebenem glatten Anfangswerten $s_0$ exisitert eine eindeutige Lösung der Wärmeleitungsgleichung.*

□

Seien $V_1$ und $V_2$ Vektorbündel über $M$. Sei $\pi_j : M \times M \to M$, $j = 1, 2$, die Projektion auf die $j$-te Komponente. Wir definieren

$$V_1 \boxtimes V_2 := \pi_1^* V_1 \otimes \pi_2^* V_2.$$

Dies ist ein Bündel über $M \times M$.

Ist $k$ ein $C^k$-Schnitt von $V_1 \boxtimes V_2^*$, so bildet der Operator

$$(A_k \varphi)(x) := \int_M k(x,y) \varphi(y)\, \mathrm{dvol}_y$$

$L^2(V_2)$ auf $C^k(V_1)$ ab. Diese $k$ heißt *Intergrationskern* von $A_k$. Wir wollen nun umgekehrt zu einem Operator einen Kern finden.

**LEMMA 9.11.** *Sei $A$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf $L^2(V)$, so dass $A : L^2(V) \to C^{r+1}(V)$ stetig ist. Dann hat $A^2$ einen Integrationskern $k \in C^r(V \boxtimes V^*)$, d.h. es gilt*

$$A^2 s(x) = \int_M k(x,y) s(y)\ \mathrm{dvol}_y.$$

*Beweis.* kommt noch □

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $R^k(\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass

$$|f(x)| \leq C_k(1+|x|)^{-k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zusammen mit der Norm

$$\|f\|_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|(1+|x|)^k$$

ist $R^k(\mathbb{R})$ ein Banachraum.

Ferner sei $R^\infty(\mathbb{R}) := \bigcap_k R^k(\mathbb{R})$. Dies ist mit den obigen Normen ein Frechet-Raum.

**Beispiel.** $f_t : \lambda \mapsto e^{-t\lambda^2}$ und alle Ableitungen von $f_t$ nach $t$ sind in $R^k(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$.

$f \in R^k(\mathbb{R})$ ist äquivalent zu $\lambda \mapsto f(\lambda), \ldots, \lambda \mapsto |\lambda|^k f(\lambda) \in R^0(\mathbb{R})$.

Seien $\mathcal{B}(B_1, B_2)$ die beschränkten Abbildungen vom normierten Raum $B_1$ ind $B_2$. Man sieht dann analog zu den vorigen Überlegungen:

**Proposition 9.12.** *die Restriktion von $\iota_D$ ist eine stetige lineare Abbildung von $R^k(\mathbb{R})$ nach $\mathcal{B}(L^2(W), W^k(W))$. Falls $f_t$ und alle seine Ableitungen nach $t$ in $R^k(\mathbb{R})$ liegen, so ist $t \to f_t(D)$ eine glatte Abbildung von $I \to \mathcal{B}(L^2(W), W^k(W))$.*

*Beweis.* Geht ähnlich wie vorhin. □

Durch Komposition mit dem Sobolevschen Einbettungssatz erhalten wir auch diesselbe Propositi-on, wenn wir $W^k$ durch $C^r$ mit $r < k - (n/2)$ ersetzen.

**Folgerung 9.13.** *Der Operator $e^{-tD^2}$ bildet für alle $t > 0$ die Funktionen $L^2(W)$ stetig in $W^k(W)$ und in $C^r(W)$ ab, also insbesondere für $t > 0$*

$$e^{-tD^2}(L^2(W)) \subset C^\infty(W).$$

**Bemerkung 9.14.** Man kann sogar nachprüfen, dass $e^{-tD^2}$ ist für $t > 0$ ein Friedrichs-Glätter ist.

Wenden wir Proposition 9.9 auf $A = e^{-tD^2/2}$ an, so sehen wir dass $A^2 = e^{-tD^2}$ für jedes $t > 0$ einen Integrationskern $k_t \in C^\infty(W \boxtimes W^*)$ besitzt. Die Familie $k_t$ heißt *Wärmeleitungskern* oder kürzer *Wärmekern*. Wir wollen nun zeigen, dass $k_t$ auch glatt in $t$ ist.

**Proposition 9.15.** *Für jedes $f \in R^\infty(\mathbb{R})$ hat $f(D)$ einen glatten Integrationskern, also ist $f(D)$ ein Glättungs-Operator. Weiterhin ist die Abbildung*

$$R^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(W \boxtimes W^*)$$

*die jedem $f \in R^\infty(\mathbb{R})$ den Integrationskern von $f(D)$ zuordnet, ist stetig.*

*Beweis.* Zunächst bestimmen wir $g_j \in R^\infty(mR)$, $g_j \geq 0$ so dass

$$f = \sum_{j=1}^{4} i^j g_j^2.$$

Nach Lemma 9.11 für $A = g_j(D)$ besitzt $f(D)$ einen Integrationskern.

Zu zeigen bleibt die Stetigkeit. Wir wenden den Satz des abgeschlossenen Graphen für Fréchet-Räume an [Yos94, II.6.,Theorem 1]. Wir müssen also zeigen, dass der Graph abgeschlossen ist. Sei $f_j$ eine Folge, die in $R^\infty(mR)$ gegen $f$ konvergiert, und so dass der zugehörige Kern $k_j$ in $C^\infty(W \boxtimes W^*)$ gegen einen Kern $k$ konvergiert. Dann konvergiert $f_j(D)$ gegen $f(D)$ in der Operator-Topologie (Stetigkeit von $\iota_D$). Da die $C^\infty$-Konvergenz von Integrationskernen die Operator-Konvergenz von den zugehörgen Operatoren impliziert, ist $k$ der Kern von $f(D)$. Somit folgt die Aussage. □

**Korollar 9.16.** *Der* Wärmekern $(t, x, y) \to k_t(x, y)$ *ist glatt in* $t > 0$, $x$ *und* $y$.

## 10. Der formale Wärmekern

Wir folgen hier im wesentlichen [AB02, Abschnitt 2].

## 11. Spuren und Eigenwert-Asymptotik

**Definition 11.1.** Sei $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ separable Hilbert-Räume mit Orthonormalbasen $\{e_i\}_i$ und $\{e'_j\}_j$. Zu $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ setze

$$\langle A, B\rangle_{HS} := \sum_{ij} \langle Ae_i, e'_j\rangle \overline{\langle Be_i, e'_j\rangle},$$

$$\|A\|_{HS}^2 :) \sum_{ij} |\langle Ae_i, e'_j\rangle|^2.$$

Wenn $\|A\|_{HS} < \infty$, so heißt $A$ *Hilbert-Schmidt-Operator* $(A \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'))$.

**Lemma 11.2.**

Kommt noch....

## 12. Charakteristische Klassen

Wir folgen einem Crashkurs über charakeristische Klassen von Christian Bär. (Kann von seiner Homepage runtergeladen werden.)

## 13. Atiyah-Singer-Satz und Getzler-Formailsmus

### 13.1. **Filtrierte und graduierte Algebren.**
$\mathrm{Cl}(V)$: nicht komplexifizierte Clifford-Algebra $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$: komplexifizierte Clifford-Algebra

Wir wollen einen Formalismus entwickeln, mit dem wir $str(\Phi_{n/2})$ berechnen können.

**Definition 13.1.** Filtrierte und graduierte Algebren, Symbolabbildung, assoziierte graduierte $G(A)$

**Lemma 13.2.** *Sei $A$ eine filtrierte Algebra und $G$ eine graduierte Algebra, und $\sigma_{\cdot} : A \to G$ eine Symbol-Abbildung, so dass*

(1) $\sigma_k(A_k) = G_k$,
(2) $\ker \sigma_k = A_{k-1}$.

*Dann ist $G = G(A)$.*

*Beweis.* ... □

**Beispiel.** Sei $V$ eine euklidischer Vektorraum. Die Abbildungen

$$\sigma_k : \mathrm{Cl}(V)_k \to \Lambda^k V, \quad v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$$

sind wohldefiniert und bilden eine Symbol-Abbildung, die die obigen Eigenschaften (1) und (2) erfüllen. Somit gilt

$$\Lambda^*(V) = G(\mathrm{Cl}(V)).$$

#### 13.1.1. *Reskalierungen.*
Als Vorstufe zum Verständnis der Getzler-Reskalierung wollen wir zeigen wie durch Reskalierung eine filtrierte Algebra zu seiner assoziierten graduierten Algebra konvergiert.

**Lemma 13.3.** *Sei $A$ eine filtrierte Algebra, $A = \bigcup A_\ell$, so dass es Vektorräume $C_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass als Vektorräume gilt*

$$A_k = \bigoplus_{\ell \le k} C_\ell.$$

*Wir definieren auf $C_\ell$*

$$R_\lambda|_{C_\ell} := \lambda^{-\ell} \operatorname*{Id}_{C_\ell}$$

*und setzen es linear zu einem Vektorraum-Endomorphismus von $A$ fort, der die Algebra-Struktur i.a. nicht erhält. Wir existiert für $a$ und $b$*

$$a \bullet b := \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda(R_\lambda^{-1}(a) R_\lambda(b)^{-1})$$

*und $(A, \bullet)$ ist algebra-isomorph zu $G(A)$.*

*Beweis.* Sei $\sigma.$ die kanonische Symbol-Abbildung $A \to G(A)$. Wir setzen

$$\tau|_{C_\ell}\sigma_\ell : C_\ell \to G(A)^l$$

zu einer linearen Abbildung $A \to G(A)$ fort. Man sieht, dass $\tau$ bijektiv ist. Es bleibt zu zeigen, das $\tau$ die Multiplikation erhält. Wegen Linearität reicht zu zeigen, dass

$$\tau(a \bullet b) = \tau(a)\tau(b) \qquad \forall a \in C_k, b \in C_\ell.$$

Wir zerlegen $ab$ in seine $C_j$-Komponenten:

$$ab = c_{k+\ell} + \ldots + c_{k+\ell-s} \qquad c_j \in C_j.$$

Dann gilt

$$R_\lambda^{-1}\left(R_\lambda(a)R_\lambda(b)\right) = c_{k+\ell} + \lambda c_{k+\ell}^{-1} \ldots + \lambda^s c_{k+\ell-s}.$$

Und somit

$$a \bullet b := \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda(R_\lambda^{-1}(a)R_\lambda^{-1}(b)) = c_{k+\ell}.$$

Es ergibt sich

$$\tau(a \bullet b) = \sigma_{k+\ell}(a \bullet b) = \sigma_{k+\ell}(c_{k+\ell}) = \sigma_{k+\ell}(ab) = \sigma_k(a)\sigma_\ell(b) = \tau(a)\tau(b).$$

□

Identifizieren wir $\mathrm{Cl}(V) \cong \Lambda^* V$ als Vektorraum, dann konvergiert die Clifford-Multiplikation gegen die äußere Multiplikation $\wedge$. Man sieht dies auch direkt, da $\iota_X$ gegen Null konvergiert, wenn wir die Metrik $g$ auf $V$ durch $\lambda^2 g$ ersetzen und den Limes $\lambda \to 0$ betrachten.

13.2. **Getzler-Symbole von Differential-Operatoren.** Die Idee des Getzler-Formalismus ist nun, sowohl die Zeitkoordinate als auch die Raumrichtung im Wärmekern so zu reskalieren, dass die wichtigen Terme im Limes überleben. Die filtrierte Algebra der Differentialoperatoren auf $\Gamma(W)$ konvergiert hierbei gegen eine graduierte Algebra konvergiert. Der Filtrierungs-Grad ist dabei die Summe der Differentiationsordnung und des Filtrierungs-Grad des Clifford-Elements. [8]

Sei $W \to M$ ein Clifford-Bündel über einer Mannigfaltigkeit $M$ gerader Dimension $n = 2m$. Wir definieren

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}} = \{A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W), \text{ so dass } A(X \cdot \varphi) = X \cdot A(\varphi) \quad \forall X \in \Gamma(TM), \varphi \in \Gamma(W)\}$$

Es gilt kanonisch $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) = \mathrm{Cl}(TM) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W)$. Die Algebra $\mathcal{D}(W)$ der Differentialoperatoren auf $\Gamma(W)$ wird deswegen von den folgenden Operatoren erzeugt

(1) Schnitte von $\Gamma(\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W))$
(2) Clifford-Multiplikationen $\gamma_X = X^b\cdot$, wobei $X$ ein beliebiges Vektorfeld ist,
(3) kovarianten Ableitungen $\nabla_X$, wobei $X$ ein beliebiges Vektorfeld ist.

[8] Allerdings werden wir in dieser Idee nicht strikt folgen, um die Darstellung einfach zu halten. U.a. arbeiten wir mit einer Symbolabbildung an Stelle der oben erwähnten graduierten Algebra.

Die Getzler-Filtrierung ist definiert als

$$\mathcal{D}(W)_{-n} := \{0\} \qquad \forall n > 0.$$

$$\mathcal{D}(W)_0 := \Gamma(\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(W)).$$

$$\mathcal{D}(W)_1 := \mathrm{span}\left\{\mathcal{D}(W)_0,\ \text{Operatoren vom Typ (2) und (3)}\right\}.$$

$$\mathcal{D}(W)_{k+1} := \mathrm{span}\left\{\mathcal{D}(W)_k, \mathcal{D}(W)_1\right\}.$$

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{P}(V)$ die graduierte Algebra der polynomialen Differentialoperatoren auf $V$, wobei der grad von $x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}$ als $|\beta| - |\alpha|$ definiert ist.

$$\mathcal{P}(TM) = \bigcup_{p \in M} \mathcal{P}(T_pM).$$

Sei $X \in \Gamma(TM)$. Wir betrachten $V^*$ als Unterraum von $\mathcal{P}(V)$, jede Linear-Form auf $V$ ist ein polynomialer Differential-Operator der Ordnung 0. Dann definieren wir:

$$R_X \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^2 T^*M) \subset \Gamma(\mathcal{P}(TM) \otimes \Lambda^2 T^*M)$$
$$(R_X)_p := \left\{T_pM \ni v \mapsto g(R(\,.\,,\,.\,)X, v) \in \Lambda^2 T^*M\right\}$$

Wenn $X \in T_pM$ notieren wir mit $\partial_X^F$ die Derivation von Funktionen auf $T_pM$ in Richtung $X$, wobei $p$ festgehalten wird. Ist $X$ also ein Vektorfeld, so ist $\partial_X^F$ eine Ableitungen von Funktionen auf dem Totalraum von $TM$ in Richtung der Fasern von $TM$.

**Theorem 13.4.** *Es gibt genau eine Symbol-Abbildung, das sogenannte* Getzler-Symbol

$$\sigma_\cdot : \mathcal{D}(W) \to C^\infty(\mathcal{P}(TM) \otimes \lambda^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(W)),$$

*so dass*

(1) $\sigma_0(F) = \mathrm{id} \otimes 1 \otimes F$ *für alle* $F \in \Gamma(\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(W)$,
(2) $\sigma_1(\gamma_X) = \mathrm{id} \otimes X^b \otimes \mathrm{Id}$,
(3) $\sigma_1(\nabla_X) = \partial_X^F + \frac{1}{4} R_X$.

Als Beweis dieses Theorems wollen wir das Getzler-Symbol durch eine Reskalierung definieren, und danach zeigen, dass es die obigen Relationen erfüllt.

Wir fixieren $p \in M$ und wollen das Symbol eines Differentialoperators $Q$ auf $\Gamma(W)$ im Punkte $p$ definieren. Wir betrachten dazu eine Umgebung $U$ von $p$ in Gaussschen Normalkoordinaten und trivialisieren $W$ durch Paralleltransport entlang der radialen Geodäten. Wir wählen eine Basis $(e_\rho)_{\rho=1,\dots,n}$ von $T_pM$ und verschieben sie in radiale Richtung parallel. Dies liefert uns eine Trivialisierung von $TM$ auf $U$. Wir identizeren vo nun ab $T^*M$ mit $TM$ mit Hilfe der Metrik.

Einen Schnitt $f$ von $\mathrm{Cl}(TM)$ interpretieren wir deswegen als Abbildung in $U \to \mathrm{Cl}(T_pM)$. Wir definieren auf dem Raum

$$\mathcal{F} := C^\infty(T_pM, \mathrm{Cl}(T_pM) \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(W_p))$$

eine Reskalierungsabbildung durch

$$(R_\lambda f)(x) := (R_\lambda \otimes \mathrm{id})(f(\lambda x)),$$

wobei auf der rechten Seite $R_\lambda$ die oben benutzte Reskalierung von $\mathrm{Cl}(T_pM)$ ist und mit der Identität auf $\mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}}(W_p)$ tensoriert wird.

Ein Differentialoperator $Q$ operiert auf Elementen von $\mathcal{F}$.

Dann ist

$$R_\lambda \circ Q \circ R_\lambda^{-1}$$

ein auf $\frac{1}{\lambda}U$ definierter Differentialoperator. Wir schreiben falls der Limes (im Sinne von $C^\infty$-Konvergenz der Koeffizieten der Differentialoperatoren)

$$\sigma_\ell(Q)(p) := \lim_{\lambda\to 0} \lambda^m R_\lambda \circ Q \circ R_\lambda^{-1}$$

und nach Identifikation $\mathrm{Cl}(T_pM) \cong \Lambda^* T_pM$ ist

$$\sigma_\ell(Q)(p) \in \mathcal{P}(T_pM) \otimes \Lambda^* T_pM \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}}(W_p).$$

**Lemma 13.5.** *Die folgenden Symbole sind definiert und es gilt:*

(1) $\sigma_0(F)(p) = \mathrm{id} \otimes 1 \otimes F$ *für alle* $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}}(W_p)$,
(2) $\sigma_1(\gamma_X) = \mathrm{id} \otimes X^b \otimes \mathrm{Id}$ *für alle* $X \in T_pM$,
(3) $\sigma_1(\nabla_X) = \partial_X + (1/4)R_X$ *für alle* $X \in T_pM$.

*Beweis.* (1) und (2) sind bereits klar.

(3) Hierzu berechnen wir den Termin höchster Getzler-Ordnung in der Koordinaten-Darstellung von $\nabla_X$. Wir berechnen zunächst $\nabla_X\varphi$ für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und konstantes $\varphi \in \mathcal{F}$. Wir setzen $Y := \sum x^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Es gilt dann $[X, Y] = X$ und $\partial_Y x^\alpha = |\alpha| x^\alpha$. Die Taylorentwicklung von $\nabla_X\varphi$ sei $\nabla_X\varphi \sim \sum x^\alpha \varphi_\alpha$.

$$\begin{aligned} R^W(X,Y)\varphi &= \nabla_X\nabla_Y\varphi - \nabla_Y\nabla_X\varphi - \nabla_{[X,Y]}\varphi \\ &\sim \sum_\alpha (|\alpha|+1) x^\alpha \varphi_\alpha \end{aligned}$$

Es gilt $R^W = R^\Sigma + R^{W/\Sigma}$, wobei der Clifford-Grad von $R^\Sigma$ 2 ist und der Clifford-Grad von $R^{W/Si}$ 0 ist. Wir betrachten nur die Terme von höchstem Getzler-Grad und erhalten modulo Terme niedrigerer Ordnung

$$\nabla_X\varphi \equiv -\frac{1}{2}\sum x^j R^\Sigma(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)\varphi = \frac{1}{4}R^{TM}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)\cdot\varphi = \frac{1}{4}R_X\varphi$$

Hierbei wurde Proposition **??** zur Umformung von $R^\Sigma$ und der Isomorphismus $\mathrm{Cl}(T_p^*M) \cong \Lambda^* T_p^*M$ benutzt. Es gilt somit (3) für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und konstantes $\varphi \in \mathcal{F}$. Der allgemeine Fall folgt aus den Axiomen von Zusammenhängen. □

**Lemma 13.6.** *Hat $Q$ Getzler-Ordnung $\leq m$ dann existiert*

$$\sigma_m(Q) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^m R_\lambda \circ Q \circ R_\lambda^{-1},$$

*wobei die Konvergenz $C^\infty$-Konvergenz der Koeffizienten des Differentialoperators ist. Außerdem ist $\sigma.$ eine Symbolabbildung.*

*Beweis D.* ie Existenz des Limes für $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W_p)$, $\gamma_X$ und $\nabla_X$ haben wir bereits im letzten Lemma gezeigt. Sind $\sigma_k(Q_1)$ und $\sigma_l(Q_2)$ definiert, so ist auch $\sigma_{k+\ell}(Q_1 \circ Q_2)$ definiert und es gilt

$$\sigma_{k+\ell}(Q_1 \circ Q_2) = \sigma_k(Q_1)\sigma_l(Q_2).$$

Hieraus folgt rekursiv, dass $\sigma_k$ auf den Operatoren von Getzler-Grad $\leq k$ wohldefiniert ist, und es folgt die multiplikative Eigenschaft von $\sigma.$. □

13.3. **Getzler-Symbole von Fundamentallösungen.** Sei $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$ eine graduierte Algebra. Dann sei $A^{-*}$ bzw. $A^{-*/2}$ die graduierte Algebra $A$ mit der Graduierung, so dass Elemente in $A^k$ Grad $-k$ bzw. $-2k$ haben.

Wir fixieren ein $y \in M$. Sei $s \in \Gamma(W \boxtimes W_y^*)$, z.B. $s(x) = k_t(x,y)$, wobei $k_t$ der Wärmekern ist. Wir trivialisieren $W$ in einer Gaußschen Normalkoordinaten-Umgebung von $p$ mit Hilfe von Paralleltransport wntlang radialer Geodätischer. Dann gilt

$$\Gamma(W \boxtimes W_y^* \to U) \cong C^\infty(U, \mathbb{R}) \otimes \mathrm{End}(W_p) = C^\infty \otimes \mathrm{Cl}(T_p^* M) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W_p). \tag{13.7}$$

Dies sind also genau die Restriktionen der Elemente von $\mathcal{F}$.

$C^\infty(U, \mathbb{R})$ trage die Filtrierung, dass $f$ Grad $\leq -k$, $k \in \mathbb{Z}$ hat, falls $f$ mindestens von der Ordnung $k$ in $p$ verschwindet.

$$C^\infty(U, \mathbb{R})_{-k} := \sum_{|\alpha| \leq k} x^\alpha C^\infty(U, \mathbb{R}) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, k > 0$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R})_k := C^\infty(U, \mathbb{R}). \qquad \forall k \geq 0$$

Die *Getzler-Filtrierung* auf $\Gamma(W \boxtimes W_p^*)$ ist die Produkt-Filtrierung dieser Filtrierung auf $C^\infty(U, \mathbb{R})$ der Clifford-Filtrierung auf $\mathrm{Cl}(T_p M)$ und der trivialen[9] Filtrierung auf $\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W_p)$.

Die Algebra

$$\mathbb{R}[T_p M]^{-*} \otimes \Lambda^* T_p M \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W_p)$$

trage auf aänhliche Art und Weise die Produkt-Graduierung. Wir erhalten eine Symbol-Abbildung

$$\sigma_\ell^{(p)} : \Gamma(W \boxtimes W_y^* \to U)_\ell \to \left(\mathbb{R}[T_p M]^{-*} \otimes \Lambda^* T_p M \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{Cl}}(W_p)\right)^\ell,$$

indem wir den kanonischen Vektorraum-Isomorphismus $\mathrm{Cl}(T_p^* M) \to \Lambda^* T_p^* M$ auf das Taylor-Polynom der Ordnung $\ell$ von $s \in \Gamma(W \boxtimes W_y^* \to U)_\ell$ anwenden.

[9]Eine Graduirung ist trivial, falls $A^k = \{0\}$ für $k \neq 0$. Eine Filtrierung ist trivial, wenn sie von der trivialen Graduierung herkommt.

## 14. Anhang

### 14.1. **Dolbeault-Operator.**

### 14.2. **Das Symbol von Differential-Operatoren.**

**Definition 14.1.** Der Differentialoperator $P$ sei lokal durch Formel (2.1) gegeben. Dann definieren wir das *totale Symbol von P* bezüglich der Trivialisierung $(U, v_i, w_i)$ als

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{tot} : T^*U & \to & \mathrm{Hom}(V,W)|U \\ T_{(q^1,\ldots,q^n)}U \ni (q^1,\ldots,q^n,\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum \xi_i\, dx_q^i & \mapsto & (v_j \mapsto \sum_{\alpha|\leq d} \sum_k i^{|\alpha|} A_{jk}^{\alpha} \underbrace{\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}_{=:\xi^\alpha} w_k. \end{array}$$

Für die Definition des Hauptsymbols von $\sigma(P)$ summieren wir nur über die höchste Ordnung:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : T^*U & \to & \mathrm{Hom}(V,W)|U \\ \sum \xi_i\, dx_q^i & \mapsto & \left( v_j \mapsto \sum_{\alpha|=d} \sum_k i^{|\alpha|} A_{jk}^{\alpha} \underbrace{\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}_{=:\xi^\alpha} w_k \right). \end{array}$$

**Proposition 14.2.** *Das Hauptsymbol ist unabhängig von der Wahl von $U$ und $\psi$ und von der Wahl der $v_i$ und $w_i$. Es ist deswegen eine wohldefinierte Abbildung*

$$\sigma(P) : T^*M \to \mathrm{Hom}(V,W).$$

Der Beweis folgt durch nachrechnen.

Man beachte aber, dass das totale Symbol von der Wahl von $\psi$ und der Wahl der $v_i$ und $w_i$ abhängt.

**Proposition 14.3.** *Seien*

$$\Gamma(V) \xrightarrow{P,P'} \Gamma(W) \xrightarrow{Q} \Gamma(Z)$$

*Differentialoperatoren* $\operatorname{ord} P = \operatorname{ord} P' = d_P$, $\operatorname{ord} Q = d_Q$. *Dann ist $Q \circ P$ ein Differentialoperator der Ordnung $d_P + d_Q$ und es gilt für alle $\xi \in T^*M$*

$$\sigma_\xi(Q \circ P) = \sigma_\xi(Q) \circ \sigma_\xi(P),$$
$$\sigma_\xi(tP + t'P') = t\sigma_\xi(P) + t'\sigma_\xi(P').$$

**Definition 14.4.** Ein Differentialoperator heißt *elliptisch*, falls für alle $p \in M$ und alle $\xi \in T_pM$ mit $\xi_p \neq 0$ das Hauptsymbol $\sigma_\xi \in \mathrm{Hom}_p(V,W)$ invertierbar ist.

**Proposition 14.5.** *Das Symbol eines verallgemeinerten Dirac-Operators $D$ auf einem Clifford-Bündel $W$ ist gegeben durch*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : T^*M & \to & \mathrm{Hom}(W,W) \\ \xi & \mapsto & (w \mapsto i\xi \cdot w). \end{array}$$

*Insbesondere ist $D$ elliptisch.*

*Beweis.* Wir rechnen in Koordinaten und $v_i = w_i$.

$$\begin{aligned} D\left(\sum_j s^j v_j\right) &= \sum_{j,\alpha} e^b_\alpha \cdot \nabla_{e_\alpha}(s^j v_j) \\ &= \sum_{j,\alpha} \left(e^b_\alpha \cdot (\partial_{e_\alpha} s^j) v_j + s^j e^b_\alpha \cdot \nabla_{e_\alpha} v_j\right) \\ &= \sum_j (ds_j \cdot v_i + s^j D v_j) \\ &= \sum_{j,\alpha} \frac{\partial s_j}{\partial \psi^\alpha} dx^\alpha \cdot v_i + 0.\ \text{Ordnung} \end{aligned}$$

$$\sum_k A^{(\alpha)}_{jk} = dx^\alpha \cdot v_j$$

$$\sigma_\xi(D) = \left(v_j \mapsto \sum_{\alpha=1}^n \sum_k i A^{(\alpha)}_{jk} \xi_\alpha v_j = i \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha dx^\alpha \cdot v_j = \xi \cdot v_j\right).$$

□

14.3. **Ideale in Algebren.**

**Definition 14.6.** Sei $A$ eine Algebra (wie immer assoziativ, mit 1). Eine Teilmenge $I$ heißt *Ideal*, falls gilt:

(1) $I$ ist Untervektorraum
(2) für $i \in I$ und $a \in A$ gilt $ai \in I$ und $ia \in I$.

Ist $f : A \to B$ ein Algebren-Homomorphismus, und $I \subset B$ ein Ideal in $B$, so ist auch $f^{-1}(I)$ ein Ideal. Unter anderem ist der Kern eines Algebren-Homomorphismus ein Ideal. Umgekehrt, ist $I \subset A$ ein Ideal , so trägt der Quotientenvektorraum $A/I$ eine eindeutige Algebren-Struktur, so dass $\pi : A \to A/I$ ein Algebren-Homomorhpismus ist und der Kern hiervon ist $I$.

Es gilt auch die folgende universelle Eigenschaft: Ist $f : A \to B$ ein Algebren-Homomorphismus und $I$ ein Ideal in $A$, das im Kern von $f$ enthalten ist, so läßt sich $f$ auf eindeutige Art als Verkettung $f : A \xrightarrow{\pi} A/I \to B$ schreiben.

Jedes Ideal ist auch eine Unteralgebra. Aber Achtung: ist $I$ ein Ideal in $A$ und $J$ ein Ideal in $I$, so folgt i.a. nicht, dass $J$ ein Ideal in $A$ ist. Der Schnitt von beliebig vielen Idealen in $A$ ist wieder ein Ideal.

**Definition 14.7.** Sei $S$ ein Teilmenge von $A$. Dann ist das von $S$ erzeugte Ideal definiert als

$$I_S := \bigcap_{\substack{I \text{ Ideal} \\ S \subset I}} I,$$

Offensichtlich enthält $I_S$ bereits $\operatorname{span} S$, nach Definition den von $S$ aufgespannten Vektorraum. Weiter sind alle Elemente der Form $a\varphi b$ mit $a, b \in A$, $\varphi \in \operatorname{span} S$,in $I_S$ enthalten. Man sieht nun direkt, dass der von diesen Elementen aufgespannte Vektorraum bereits ein Ideal ist, und somit mit $I_S$ übereinstimmt.

### 14.4. **Lie-Algebren und Zusammenhangs-1-Formen.**

**Definition 14.8.** Eine *Lie-Algebra* ist ein reeller Vektorraum $V$ mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot] : v \times V \to V$, der sogenannten *Lie-Klammer*, mit den Eigenschaften

(1) $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear
(2) $[X,Y] = -[Y,X]$ für alle $X, Y \in V$ (Asymmetrie)
(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ für alle $X, Y, Z \in V$ (Lie-Klammer).

Sei $G$ eine Lie-Gruppe. Wir identifizieren den Tangentialraum an die Eins $T_eG$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern auf $G$. Die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]$ auf den Vektorfeldern liefert mit dieser Identifikation eine Lie-Klammer auf $T_eG$.

Man kann umgekehrt auch zeigen

**Theorem 14.9.** [War83, Theorem 3.28] *Zu jeder endlich dimensionalen Lie-Algebra $(V,[\cdot,\cdot])$ gibt es eine (bis auf Isomorphie von Lie-Gruppen eindeutige) zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $G$, so dass $T_eG$ als Lie-Algebra isomorph zu $(V,[\cdot,\cdot])$ ist.*

Wir haben also eine eineindeutige Beziehung zwischen endlich-dimensionalen Lie-Algebren und einfach zusammenhängend, zusammenhängenden Lie-Gruppen.

**Proposition 14.10.** *Ist $\pi : \tilde{G} \to G$ eine Überlagerung und ein Gruppenhomorphismus, so ist $(d\pi)_e$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus*

$$(T_e\tilde{G},[\cdot,\cdot]) \to (T_eG,[\cdot,\cdot]).$$

Beweis siehe [War83].

Sei für $g \in G$

$$\begin{aligned} I_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Wir setzen $\mathrm{Ad} := (dI_g)_e : T_eG \to T_eG$. Dann ist $(T_eG, \mathrm{Ad})$ eine Darstellung von $G$, die *adjungierte Darstellung von $G$.*

### 14.5. $\pi_1(\mathrm{Spin}(n))$.

**Proposition 14.11.** $\mathrm{Spin}(n)$ *ist einfach zusammenhängend für $n \geq 3$.*

*Beweis.* Wir zeigen es durch Induktion über $n$. Die Aussage gilt für $n = 3$, da $\mathrm{Spin}(3) = S^3$. Im folgenden kommutativen Diagramm sind nach Satz 6.11 die Zeilen kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{Spin}(n) & \to & \mathrm{SO}(n) \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{Spin}(n+1) & \to & \mathrm{SO}(n+1) \end{array}$$

Man überlegen sich, dass $\mathrm{SO}(n+1)$ das $SO$-Rahmen-Bündel über der Standard-Sphäre $S^n$ ist und somit ein $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaser-Bündel. Daraus folgt, dass $\mathrm{Spin}(n+1)$ ein $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaser-Bündel über $S^n$ ist. Die Proposition folgt nun aus dem folgenden Lemma. □

**Lemma 14.12.** *Sei $G$ eine einfach zusammenhängende, zusammenhängende Lie-Gruppe und $P$ ein $G$-Hauptfaserbündel über $M$. Dann ist $\pi_1(P) \to \pi_1(M)$ bijektiv.*

*Beweis.* Der Beweis ist ein bischen Arbeit, aber nicht schwer. Man ueberlegt sich zunächst, dass man Wege und Familien von Wegen liften kann. Die Surjektivität folgt dann aus der Tatsache, dass $G$ zusammenhängend ist. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir eine Schleife $\gamma$ in $P$, so dass das Bild von $\gamma$ in $M$ als Schleife in $M$ homotop zu einer konstanten Schleife ist. Man zeigt nun, dass diese Homotopie liftet (etwas Arbeit). Somit ist $\gamma$ homotop zu einer Kurve, die ganz in einer faser verläuft. Da die Faser einfach zusammenhängend ist, ist $\gamma$ homotop zur konstanten Kurve. □

## Literatur


[AB02] Bernd Ammann and Christian Bär. The Einstein-Hilbert action as a spectral action. In *Vortrag auf der Arbeitstagung "Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik unter mathematisch-geometrischem Aspekt", F. Scheck (Ed.), Hesselberg 1999.* Springer Verlag, 2002.

[Bär00] Christian Bär. Localization and semibounded energy – a weak unique continuation theorem. *J. Geom. Phys.*, 34(2):155–161, 2000.

[Bau81] Helga Baum. *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten.* Teubner Verlag, 1981.

[BtD95] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck. *Representations of compact Lie groups. Corrected reprint of the 1985 orig.* Graduate Texts in Mathematics. 98. New York, Springer, 1995.

[Fri80] Thomas Friedrich. Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht-negativer Krümmung. *Math. Nach.*, 97:117–146, 1980.

[HS71] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Number 296 in BI-Hochschultaschenbücher. BI-Wissenschafts-Verlag, 1971.

[Hum80] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory. 3rd printing, rev.* Graduate Texts in Mathematics, 9. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[LM89] H.-B. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry.* Princeton University Press, Princeton 1989, 1989.

[MS74] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic Classes.* Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, Princeton, 1974.

[Roe88] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods.* Number 179 in Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman, 1988.

[Sem99] Uwe Semmelmann. A short proof of eigenvalue estimates for the Dirac operator on Riemannian and Kähler manifolds. In *Kolár, Ivan (ed.) et al., Differential geometry and applications. Proceedings of the 7th international conference, DGA 98, and satellite conference of ICM in Berlin, Brno, Czech Republic, August 10-14, 1998. Brno: Masaryk University. 137-140* . 1999.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Reprint.* Graduate Texts in Mathematics, 94. New York etc.: Springer-Verlag. IX, 272 p., 57 figs. DM 58.00; $ 22.50 , 1983.

[Yos94] Kosaku Yosida. *Functional analysis.Repr. of the 6th ed.* Berlin: Springer-Verlag, 1994.