Exercices pour le cours Géométrie différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 1 — 29 novembre 2005

---

1 Montrer qu'il existe une unique métrique sur $\mathbb{C}P^n$, telle que l'application

$$S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n, \qquad p \mapsto [p]$$

est une submersion riemannienne.

2 Soit $\gamma : (a,b) \to M$ une géodésique. Détérminer toutes les applications lisses $\rho : (c,d) \to (a,b)$ telles que $\gamma \circ \rho$ est une géodésique. Quelle est la relation entre $E[\gamma]$ et $E[\gamma \circ \rho]$?

3 Soit (M,g) et (N,h) des variétés riemanniennes. Une *isométrie* de (M,g) à (N,h) est un difféomorphisme $\varphi : M \to N$, tel que

$$h(d\varphi(X),d\varphi(Y)) = g(X,Y) \qquad \forall X,Y \in T_pM \quad \forall p \in M$$

Soit $\gamma : (a,b) \to M$ une géodésique. Montrer que $\varphi \circ \gamma$ est une géodésique de N. En utilisant ce fait, déterminer l'ensemble de toutes les géodésiques de S^n.

4 Soit X un champ de vecteurs sur une variété compacte. Montrer qu'il y a une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to X$, telle que $X_{\gamma(t)} = \dot\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5 *Formule de transformation pour les symboles de Christoffel.* Soit M une variété riemannienne et soient $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$, $\psi\colon U^\psi \to V^\psi$ deux cartes de M. Soient g^φ_{ij} et g^ψ_{ij} les composantes de la métrique par rapport aux cartes φ et ψ, et soient ${}^\varphi\Gamma^k_{ij}$ et ${}^\psi\Gamma^t_{rs}$ les symboles de Christoffel asociés à φ et ψ.
Montrer que:

$$\sum_k {}^\varphi\Gamma^k_{ij}\, g^\varphi_{kv} = \sum_{t,s} \frac{\partial\psi^t}{\partial\varphi^v} \frac{\partial^2\psi^s}{\partial\varphi^j\,\partial\varphi^i}\, g^\psi_{st} + \sum_{r,s,t,w} \frac{\partial\psi^r}{\partial\varphi^i} \frac{\partial\psi^s}{\partial\varphi^j} \frac{\partial\psi^w}{\partial\varphi^v}\ {}^\psi\Gamma^t_{rs}\, g^\psi_{tw}.$$

6 Soit $f : (M,g) \to (N,h)$ une submersion riemannienne. Une courbe $\gamma : (a,b) \to M$ est dite *horizontal* si $\dot\gamma(t)$ est orthogonal au fibres de f. Montrer que une courbe horizontal $\gamma : (a,b) \to M$ est une géodésique de (M,g) si et seulement si $f \circ \gamma$ est une géodésique de (N,h).

TD: 6 décembre 2005, 8:30 à 10:00, Salle 313.
Rendez vos solutions dans mon casier, le 5 décembre jusqu'à 15:00 heures, s'il vous plaît.

`http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/master`