Elementare Differentialgeometrie, WS 2001/2002

Dozent: Bernd Ammann
Protokollant: Bernd Ammann
Datum: Mittwoch, 6.2.2001

1 Der Satz von Gauss-Bonnet in der lokalen Version

Bemerkung: Ich kann leider nicht völlig ausschließen, dass mir an der einen oder anderen Stelle ein kleiner Vorzeichenfehler unterlaufen ist. Sollte jemand einen bemerken, so bitte ich darum, mir diesen Fehler mitzuteilen.

Wir wollen den folgenden Satz zeigen:

Satz 1.1. *Sei M eine orientierte Fläche mit Riemannscher Metrik, $F : P \to M$ ein Diffeomorphismus F eines Polygons P auf sein Bild in M. Seien α_j, $1 \le j \le k$, die Außenwinkel und sei κ_g die geodätische Krümmung des in positive Richtung durchlaufenen Randes γ. Dann gilt*

$$\int_{F(P)} K\, dvol + \int_\gamma \kappa_g\, dt + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 2\pi.$$

Definition. Sei $U \subset M$ offen und sei E ein auf U definiertes Einheitsvektorfeld. Sei $E^\perp$ das Einheitsvektorfeld, so dass $(E_p, E_p^\perp)$ eine positiv orientierte Ortonormalbasis von T_pM. Dann heißt die auf U definierte 1-Form ω mit

$$\omega(X) := \langle \nabla_X E, E^\perp \rangle$$

die *Zusammenhangs*-1-*Form* bezüglich E.

Lemma 1.2. *Sei γ ein stückweise glatter geschlossener Weg, γ homotop 0 in U. Dann ist $\int_\gamma \omega$ unabhängig von der Wahl von E.*

Beweis. Seien ω_1 und ω_2 die Zusammenhangs-1-Formen bezüglich zweier Einheitsvektorfelder E_1 und E_2. Sei $\beta : V \to \mathbb{R}$ der zwischen E_1 und E_2 eingeschlossene Winkel, diese Funktion kann auf einer kleinen sternförmigen Menge glatt gewählt werden. Dann gilt auf V

$$\omega_1 - \omega_2 = d\beta.$$

Deswegen ist $d(\omega_1 - \omega_2) = 0$ auf U und somit

$$\int_\gamma (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

für jeden Weg homotop Null in U. □

Bemerkung. Sei γ ein stückweise glatter geschlossener Weg, dann ist der Paralleltransport längs γ eine Rotation um den Winkel $\pm \int_\gamma \omega$.

Der Beweis wird übersprungen, da wir diese Bemerkung nicht mehr benötigen.

Lemma 1.3. *Sei $\gamma : [a,b] \to M$ ein stückweise glatter regulärer Weg. Sei $\beta(t)$ der von $\dot\gamma(t)$ und E eingeschlossene Winkel. Dann gilt*

$$\beta(b) - \beta(a) = \int_\gamma \kappa_g \, dt + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j - \int_\gamma \omega.$$

Beweis. Es ist klar, dass β in den Unstetigkeitsstellen von $\dot\gamma$ jeweils um den Außenwinkel α_j springt. Sei E_p ein Einheitsvektorfeld längs γ mit $\nabla_{\dot\gamma(t)} E_p = 0$. Für den Winkel $\beta_1(t)$ zwischen $\dot\gamma(t)$ und $E_p(t)$ sieht man leicht, dass

$$\dot\beta_1(t) = \kappa_g(t).$$

Für den Winkel $\beta_2(t)$ zwischen E_p und E sieht man leicht, dass

$$\dot\beta_2(t) = \langle \nabla_{\dot\gamma(t)} E_p, E_p^\perp \rangle - \langle \nabla \dot\gamma(t) E, E^\perp \rangle = -\omega(\dot\gamma(t)).$$

Das Lemma folgt dann durch Addition und Integration. □

Sei von nun an ϕ eine auf dem Inneren eines Polygons definierte Parametrisierung einer offenen Menge $U \subset M$. Wir wählen das Einheitsnormalenfeld E parallel zu $\frac{\partial}{\partial \phi^1}$. Nehmen wir nun weiter an, dass γ eine Fläche $F(P)$ berandet und diese im positiven Sinne durchläuft. Der Umlaufsatz besagt dann, dass

$$\beta(b) - \beta(a) = 2\pi.$$

Der Satz von Stokes liefert uns

$$\int_\gamma \omega = \int_{F(P)} d\omega.$$

Mit dem folgenden Lemma folgt somit der Beweis des Satzes.

Lemma 1.4. *Es gilt für die Zusammenhangs-1-form ω und die Gauß-Krümmung K:*

$$d\omega = -K \, dvol.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= \partial_X(\omega(Y)) - \partial_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \\ &= \langle \partial_X \partial_Y E, E^\perp \rangle + \underbrace{\langle \partial_Y E, \partial_X E^\perp \rangle}_{=0} \\ &\quad -\langle \partial_Y \partial_X E, E^\perp \rangle + \underbrace{\langle \partial_X E, \partial_Y E^\perp \rangle}_{=0} \\ &\quad -\langle \partial_{[X,Y]} E, E^\perp \rangle \\ &= \langle R(X,Y)E, E^\perp \rangle. \end{aligned}$$

Setzen wir $X = E$ und $Y = E^\perp$ ein, so folgt

$$d\omega(E, E^\perp) = -K = -K \, dvol(E, E^\perp).$$

Da $\Lambda^2(T^*M)$ eindimensional, folgt die Behauptung. □