Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

Anwesenheitsaufgaben am 21.10.2009

1. Aufgabe
Bilden Sie für $A \subset \mathbb{R}$ das Innere und den Abschluss, und zwar bzgl. der Standardtopologie, der diskreten Topologie und der Klumpentopologie auf $\mathbb{R}$, wobei

1. $A = [0, 1]$,
2. $A = (0, 1)$,
3. $A = \mathbb{Z}$,
4. $A = \mathbb{Q}$.

2. Aufgabe
Es tragen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Standardtopologien. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ mit der Standardtopologie übereinstimmt.

3. Aufgabe
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf X, $X/\sim = \{[x] \,|\, x \in X\}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$.

1. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{O}'$ auf $X/\sim$ tatsächlich eine Topologie ist.
2. Zeigen Sie: $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.
3. Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X/\sim \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f : X/\sim \to Y \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ \pi : X \to Y \text{ ist stetig.}$$

4. Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Wir definieren

$$s \sim t \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} s = t \text{ oder} \\ s = 0 \text{ und } t = 1, \text{ oder} \\ s = 1 \text{ und } t = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $[0,1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Standardtopologie.

4. Aufgabe

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, sei p ein weiterer Punkt, $p \notin X$. Setze $X^+ := X \cup \{p\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{X^+} := \mathcal{O}_X \cup \{\, (X \setminus K) \cup \{p\} \mid K \subset X \text{ kompakt} \,\} \ .$$

Zeigen Sie:

1. $(X^+, \mathcal{O}_{X^+})$ ist ein topologischer Raum.
2. X^+ ist kompakt.
3. X^+ ist Hausdorffsch genau dann, wenn X *lokalkompakt* ist, d. h. jeder Punkt in x besitzt eine kompakte Umgebung.
4. $(-1,1)^+$ ist homöomorph zu S^1.

Man nennt X^+ die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.