Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

3. Übungsblatt

Abgabe am 10.11.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M genau dann zusammenhängend ist, wenn M wegzusammenhängend ist.

2. Aufgabe
Seien M und N offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Sei $F : M \longrightarrow N$ eine C^1-Abbildung und $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass durch die kanonischen Isomorphismen $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ und $T_{F(p)}N \cong \mathbb{R}^n$ die Differentialabbildung d_pF aus der Vorlesung mit dem üblichen Differential aus der Analysis II übereinstimmt.

3. Aufgabe
Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung auf einer glatten kompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit $n \geq 1$.

1. Sei $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie: Falls f in p sein Maximum oder Minimum annimmt, dann gilt $d_pf = 0$.

2. Zeigen Sie, dass das Differential von f in mindestens zwei verschiedenen Punkten von M verschwindet.

3. Zeigen Sie, dass f genau dann einen einzigen kritischen Wert hat, wenn f konstant ist.
   (Ein kritischer Wert von f ist ein $r \in \mathbb{R}$, für welches ein $x \in f^{-1}(\{r\})$ existiert mit $d_xf = 0$)

4. Aufgabe
Sei $F : M \longrightarrow N$ eine C^∞-Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ ein Punkt, $X \in T_pM$ ein Tangentialvektor und f eine glatte reellwertige Funktion auf N. Beweisen Sie folgende Identität:

$$\partial_{d_pF(X)} f = \partial_X (f \circ F).$$

(Hinweis: Nutzen Sie $d_q f(Y) = \partial_Y f$ für alle $q \in N$ und $Y \in T_qN$)