Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

4. Übungsblatt

Abgabe am 17.11.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Seien V, W, X endlich-dimensionale Vektorräume.

1. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $V^* \otimes W^* \to \mathrm{Bilin}(V, W; \mathbb{R})$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.
2. Konstruieren Sie einen Vektorraum-Isomorphismus $V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$
3. Konstruieren Sie einen Vektorraum-Isomorphismus von $\Lambda^k V^*$ in den Raum der alternierenden k-Formen $V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$
4. Schreiben Sie die Räume $\mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Hom}(V \otimes W, X)$, $\mathrm{Hom}(V \otimes \Lambda^3 W, \mathrm{Bilin}(V, \Lambda^2 W; \mathbb{R}))$ unter Verwendung der Symbole V, W, X, $\otimes$, *, Λ^k (Keine weiteren Symbole sind erlaubt!)

2. Aufgabe
Sei $E \longrightarrow M$ ein glattes (reelles oder komplexes) Vektorbündel vom Rang n auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, dass $E \longrightarrow M$ genau dann trivial ist, wenn es n glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ von $E \longrightarrow M$ so gibt, dass für alle $x \in M$ die Vektoren $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ linear unabhängig sind.

3. Aufgabe
Für zwei glatte (reelle oder komplexe) Vektorbündel $E \longrightarrow M$ und $F \longrightarrow M$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, sei $E \otimes F$ definiert als $\bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes F_x$. Zeigen Sie, dass $E \otimes F$ eine glatte Struktur eines (reellen oder komplexen) Vektorbündels auf M besitzt.

4. Aufgabe

Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ bezeichne $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^{n+1}$.

1. Beschreiben Sie einen glatten Atlas auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

2. Man definiere, für alle $x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, den Vektorraum $E_x := x$. Zeigen Sie, dass $E := \bigsqcup_{x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n} E_x$ eine glatte Struktur eines komplexen Vektorbündels vom Rang 1 auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ besitzt.