Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

5. Übungsblatt

Abgabe am 24.11.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})^T, y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ definieren wir

$$g_{(n,m)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i y_i.$$

Die Menge $H^n_{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid g_{(n,m)}(x, x) = -1\}$ heißt pseudo-hyperbolischer Raum.

1. Zeigen Sie, dass H^n_{m-1} eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ ist und dass die Einschränkung von $g_{(n,m)}$ auf die Tangentialräume von H^n_{m-1} eine semi-riemannsche Metrik auf H^n_{m-1} definiert. Berechnen Sie deren Index.

2. Zeigen Sie, dass es für jedes $p \in H^n_{m-1}$ eine eindeutige surjektive lineare Abbildung $\pi_p : \mathbb{R}^{n+m} \to T_p H^n_{m-1}$ mit $\pi_p \circ \pi_p = \pi_p$ und $\pi_p(p) = 0$ gibt.

3. Für Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TH^n_{m-1})$ definieren wir

$$(\nabla_X Y)_p := \pi_p(\partial_{X_p} Y).$$

   Zeigen Sie, dass ∇ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang von H^n_{m-1} übereinstimmt. (Tipp: Alle Eigenschaften überprüfen, die den Levi-Civita-Zusammenhang eindeutig charakterisieren.)

Bemerkung an die Physiker: der Raum H^n_1 ist lokal isometrisch zur sogenannten Anti-deSitter-Raumzeit.

2. Aufgabe
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Derivation* auf M ist eine lineare Abbildung $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, welche die sogenannte Produktregel erfüllt: $D(f_1 \cdot f_2) = D(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot D(f_2)$, für alle $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$.

1. Seien X, Y glatte Vektorfelder auf M gegeben. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Derivationen ∂_X und ∂_Y die Abbildung $[\partial_X, \partial_Y] := \partial_X \circ \partial_Y - \partial_Y \circ \partial_X$ eine Derivation ist.

2. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$ die Identität $[\partial_{fX}, \partial_Y] = -(\partial_Y f) \cdot \partial_X + f[\partial_X, \partial_Y]$ erfüllt ist.

3. Aufgabe
Für einen Zusammenhang ∇ auf dem Tangentialbündel $TM \longrightarrow M$ sei die *Torsion* T von ∇ definiert durch $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, für alle glatten Vektorfelder X, Y auf M.

1. Zeigen Sie, dass für alle glatten Vektorfelder X, Y und jede glatte reellwertige Funktion f auf M die Identitäten $T(fX, Y) = T(X, fY) = fT(X, Y)$ erfüllt sind.

2. Zeigen Sie, dass T als Schnitt von $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$ aufgefasst werden kann. Tipp: Verwenden Sie Lemma III.2.3 aus der Einführung in die Differentialgeometrie

4. Aufgabe
Für eine glatte Mannigfaltigkeit M bezeichne $V := M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ das triviale reelle Vektorbündel vom Rang 1 auf M.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $C^\infty(M) \longrightarrow \Gamma(V)$, $f \longmapsto \tilde{f} := (\mathrm{id}, f)$, bijektiv ist.
   (Zusatzfrage (Bonus!)*: Zeigen Sie, dass diese Abbildung tatsächlich ein Isomorphismus von $C^\infty(M)$-Moduln ist.)*

2. Man identizifiere von nun an $C^\infty(M)$ mit $\Gamma(V)$ vermöge des in Aufgabenteil 1 definierten Isomorphismus. Für ein $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ setze $\nabla_X f := \partial_X f + \alpha(X) \cdot f$, für alle $f \in C^\infty(M)$ und alle $X \in \Gamma(TM)$. Zeigen Sie, dass ∇ einen Zusammenhang auf V definiert.

3. Zeigen Sie: ist ∇ ein Zusammenhang auf V, so gibt es ein eindeutiges $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ mit $\nabla_X f = \partial_X f + \alpha(X) \cdot f$ für alle $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \Gamma(TM)$.