Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

6. Übungsblatt

Abgabe am 1.12.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $\varphi : U^\varphi \longrightarrow V^\varphi$ und $\psi : U^\psi \longrightarrow V^\psi$ lokale Karten von M, seien g_{ij} bzw. $\tilde{g}_{ij}$ die Koordinatendarstellungen der semi-Riemannschen Metrik und ${}^\varphi\Gamma_{ij}^k$ bzw. ${}^\psi\Gamma_{ij}^k$ die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs bzgl. φ bzw. ψ. Zeigen Sie:

$$\sum_k {}^\varphi\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \sum_{t,s} \frac{\partial \psi^t}{\partial \varphi^l} \cdot \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \cdot \tilde{g}_{st} + \sum_{r,s,t,u} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varphi^j} \cdot \frac{\partial \psi^r}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial \psi^u}{\partial \varphi^l} \cdot {}^\psi\Gamma_{rs}^t \tilde{g}_{tu}.$$

2. Aufgabe
Es bezeichnen $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die 2-dimensionale Sphäre und $E_1, E_2, E_3 \in S^2$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$. Betrachte die Kurven $\gamma_i : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^2$, $t \mapsto \cos(t)E_i + \sin(t)E_{i+1}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, wobei $E_4 := E_1$. Wir versehen den Tangentialraum mit dem Levi-Civita-Zusammenhang.

1. Bestimmen Sie die Parallelverschiebung π_i im Tangentialraum längs γ_i in S^2.
   (Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes längs γ_i konstant fortgesetzte $Y \in T_{E_i}S^2 \cap \dot{\gamma}_i(0)^\perp$ parallel ist, und dass $\dot{\gamma}_i$ parallel längs γ_i ist.)

2. Ist die Nacheinanderausführung $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ die Identitätabbildung auf $T_{E_1}S^2$?

3. Aufgabe
Seien $F : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N. Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ heißt *F-verwandt* zu $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$, wenn $dF \circ X = \tilde{X} \circ F$ gilt. Zeigen Sie: ist $X \in \Gamma(TM)$ F-verwandt zu $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ und $Y \in \Gamma(TM)$ F-verwandt zu $\tilde{Y} \in \Gamma(TN)$, dann ist auch $[X, Y]$ F-verwandt zu $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

4. Aufgabe
Es bezeichne V ein (reelles oder komplexes) glattes Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M.

1. Definiere in jedem $p \in M$,
$$({}^*\nabla_X\alpha)(v) := \partial_X(\alpha(v)) - \alpha(\nabla_X v),$$
für alle $X \in T_pM$, $\alpha \in \Gamma(V^*)$ und $v \in \Gamma(V)$ (hierbei bezeichnet V^* das zu V duale Vektorbündel auf M). Zeigen Sie, dass $({}^*\nabla_X\alpha)(v)$ einen Zusammenhang ${}^*\nabla$ auf V^* definiert.
(Tipp: Man zeige zunächst, dass $({}^*\nabla_X\alpha)(v) = ({}^*\nabla_X\alpha)(\tilde{v})$, falls $v_p = \tilde{v}_p$.)

2. Für ein weiteres glattes Vektorbündel W auf M mit Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ definiere, in jedem $p \in M$,
$${}^{\otimes}\nabla_X(v \otimes w) := (\nabla_X v) \otimes w + v \otimes (\tilde{\nabla}_X w),$$
für alle $X \in T_pM$, $v \in \Gamma(V)$ und $w \in \Gamma(W)$. Zeigen Sie, dass ${}^{\otimes}\nabla_X(v \otimes w)$ wohldefiniert ist und ${}^{\otimes}\nabla$ einen Zusammenhang auf $V \otimes W$ definiert.

3. Sei eine semi-Riemannsche Metrik g auf V gegeben. Zeigen Sie, dass bzgl. des von ∇ auf $V^* \otimes V^*$ induzierten Zusammenhangs die Identität ${}^{\otimes *}\nabla g = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn ∇ metrisch bzgl. g ist.

4. *Zusatzaufgabe:* Zeigen Sie, dass die Spurabbildung auf $\mathrm{Hom}(V, V)$ einen parallelen Schnitt von $V^* \otimes V$ definiert.