Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

7. Übungsblatt

Abgabe am 8.12.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Es bezeichne can die kanonische Metrik auf $\mathbb{R}$ oder Intervallen von $\mathbb{R}$. Für eine glatte positive Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichne $f(t)\mathrm{can}$ die Metrik $t \mapsto f(t)\mathrm{can}$ auf $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, (1+t^2)^2\mathrm{can})$ isometrisch zu $(\mathbb{R}, \mathrm{can})$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, (1+t^2)^{-2}\mathrm{can})$ nicht isometrisch zu $(\mathbb{R}, \mathrm{can})$ ist. *(Tipp: betrachten Sie die Längenfunktion der Kurve* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$*)*
3. Sei g eine beliebige riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, g)$ isometrisch entweder zu $(\mathbb{R}, \mathrm{can})$ oder zu $((0,b), \mathrm{can})$ für ein eindeutiges $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

2. Aufgabe
Sei $F : M \longrightarrow M$ eine Isometrie einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g). Für eine Geodätische $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ setze man voraus, dass $F(c(0)) = c(0)$ sowie $d_{c(0)}F(\dot{c}(0)) = \dot{c}(0)$ gelten. Zeigen Sie, dass $F \circ c(t) = c(t)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt.

3. Aufgabe
Es bezeichne H^n den n-dimensionalen hyperbolischen Raum.

1. Sei E ein 2-dimensionaler nicht-entarteter Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n,1}$. Zeigen Sie, dass es eine Lorentztransformation (= Isometrie) F_E von $\mathbb{R}^{n,1}$ gibt, so dass $\mathrm{Ker}(F_E - \mathrm{id}) = E$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass für diese Abbildung F_E die Gleichheit $F_E(H^n) = H^n$ gilt, sobald E einen Vektor x enthält mit $g_{(n,1)}(x,x) < 0$.

3. Leiten Sie daraus her, dass die nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen von H^n genau die Kurven der Form $c(t) := \cosh(t)p + \sinh(t)X$ sind, wobei $p \in H^n$ und $X \in T_pH^n$ mit $g_{(n,1)}(X,X) = 1$.

4. Aufgabe
Gibt es eine riemannsche Metrik

1. auf $\mathbb{R}^2$ so, dass alle Kreise Geodätische sind (genauer: als Geodätische parametrisiert werden können) ?

2. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ so, dass alle Kreise, die 0 als Mittelpunkt haben, Geodätische sind?

3. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ so, dass alle Kreise mit 0 als Mittelpunkt Geodätische sind aber kein Strahl durch 0 Geodätische ist?

(Antwort jeweils begründen)