Universität Regensburg WS 2009/10
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

Semi-Riemannsche Geometrie

8. Übungsblatt

Abgabe am 15.12.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Zeigen Sie, dass in lokalen Koordinaten der Riemannsche Krümmungstensor (d.h. der Krümmungstensor des Tangentialbündels, versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang) die folgende Gleichung erfüllt

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial \varphi^j} + \sum_m \left(\Gamma^l_{mi} \Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj} \Gamma^m_{ki} \right).$$

Hierbei ist ϕ eine Karte und $R^l_{ijk} = d\phi^l \left(R(\partial/\partial\phi^i, \partial/\partial\phi^j)\partial/\partial\phi^k \right)$.

2. Aufgabe
Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ mit der Metrik $(x,y) \mapsto g_{(x,y)} := \frac{\langle \cdot,\cdot \rangle}{y^2}$ versehen, wobei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ die kanonische Metrik des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

1. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole von g in den kanonischen Koordinaten. Leiten Sie daraus her, dass die Koordinatenlinien $\{(a,y) \,|\, y > 0\}$ (wobei $a \in \mathbb{R}$ Konstante ist) Geodätische sind.
2. Berechnen Sie den riemannschen Krümmungstensor von (M, g).

3. Aufgabe (Schwarzschildmetrik)
Für eine Konstante $m > 0$ sei $M := \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in (0, 2m) \cup (2m, \infty)\}$ mit der Metrik $g := -h(r)dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)} dr \otimes dr$, wobei $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$.

1. Berechnen Sie in den Koordinaten (t,r) die Christoffel-Symbole von g und stellen Sie die Geodäten-Gleichung auf.

2. Skizzieren Sie für verschiedene Punkte in M die Menge der Tangentialvektoren X mit $g(X,X) < 0$, > 0, $= 0$.

3. Skizzieren Sie die Geodätischen c mit $g(\dot{c},\dot{c}) = 0$.

4. Berechnen Sie den riemannschen Krümmungstensor von (M,g).

4. Aufgabe

Sei (N,g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und M eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Zu $X \in T_pN$ bezeichne $c_X : (a_X, b_X) \to N$ die Geodätische in (N,g) mit $c_X(0) = p$, $\dot{c}_X(0) = X$ und mit maximalem Definitionsbereich.

1. Zeigen Sie:
$$^N\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}(t) - {}^M\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\dot{c}(t) = \mathrm{I\!I}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$$

2. Zeigen Sie: die zweite Fundamentalform von M in N ist genau dann identisch Null, falls es zu jedem $X \in TM$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $c_X((-\epsilon,\epsilon)) \subset M$.

3. Gilt dann auch $c_X((a_X,b_X)) \subset M$? (Tipp: Betrachten Sie $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$).