Universität Regensburg WS 2009/10
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

Semi-Riemannsche Geometrie

9. Übungsblatt

Abgabe am 22.12.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (keine Begründung erforderlich). Dabei bezeichnen V, W $\mathbb{K}$-Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sind V und W trivial, so sind $V \oplus W$, $V \otimes W$, $\mathrm{Hom}(V, W)$ und $\Lambda^2 V$ trivial.
2. Für jedes $n \geq 3$ gibt es eine n-dimensionale glatte kompakte Mannigfaltigkeit, deren Tangentialbündel trivial ist.
3. Jedes komplexe Vektorbündel mit Zusammenhang über einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist flach.
4. Jedes reelle Vektorbündel über S^1 ist trivial.
5. Sind V und $V \oplus W$ trivial, so ist W auch trivial.
6. Sei M zusammenhängend. Jedes komplexe Vektorbündel mit Zusammenhang und von Rang 1, das einen nicht-trivialen parallelen Schnitt besitzt, ist flach.
7. Jedes reelle Vektorbündel mit Zusammenhang und von Rang 1 ist flach.
8. Über jeder Mannigfaltigkeit existiert ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang.
9. Über jeder Mannigfaltigkeit existiert ein Vektorbündel mit nicht-flachem Zusammenhang.

10. Das Tangentialbündel einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt einen eindeutigen metrischen Zusammenhang.

2. Aufgabe
Für gegebene semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten (M_1, g_1) und (M_2, g_2) sei $M := M_1 \times M_2$ versehen mit der Produktmetrik g. Sei $x_i \in M_i$.

1. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von $M_1 \times \{x_2\}$ und $\{x_1\} \times M_2$ in M, $i = 1, 2$.

2. Berechnen Sie den riemannschen Krümmungstensor von (M, g) in Abhängigkeit der entsprechenden Krümmungstensoren von (M_1, g_1) und (M_2, g_2).

3. Hat $S^2 \times S^2$ mit der von den kanonischen Metriken induzierten Produktmetrik konstante Schnittkrümmung? Begründen Sie.

3. Aufgabe
Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine Konstante $c > 0$ betrachte man die neue semi-riemannsche Metrik $\widetilde{g} := c \cdot g$ auf M. Zeigen Sie, dass für die entsprechenden Objekte $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{R}$ usw. folgende Identitäten erfüllt sind: $\widetilde{\nabla} = \nabla$, $\widetilde{R} = R$, $\widetilde{\mathrm{ric}} = \mathrm{ric}$, $\widetilde{\mathrm{Ric}} = c^{-1}\mathrm{Ric}$, $\widetilde{K} = c^{-1}K$ und $\widetilde{\mathrm{scal}} = c^{-1}\mathrm{scal}$.

4. Aufgabe (Tensoren mit Symmetrien des Krümmungstensors)
(Bitte auf Extra-Blatt, Abgabe bis 12.1. möglich, mit Blatt 10)
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Die lineare Abbildung
$$\beta : \bigwedge^2 V^* \otimes \bigwedge^2 V^* \to \left(\bigwedge^3 V^*\right) \otimes V^*$$
$$\beta(R)(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W)$$
ist wohldefiniert.

2. Ein Tensor in $V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ erfüllt genau dann die punktweisen Symmetrien des Krümmungstensors (Vorlesung II 1.2 (1)-(4)), wenn er im Kern von β enthalten ist.

3. β ist surjektiv. *Tipp: Für eine Basis (b_i) von V^* betrachte man $\beta(b_i \wedge b_j \otimes b_k \wedge b_\ell)$ für $\ell \in \{i, j\}$ und $\ell \notin \{i, j, k\}$, dann $\beta((b_k + b_\ell) \wedge b_i \otimes b_j \wedge (b_k + b_\ell))$.*

4. $$\dim \ker \beta = \binom{n}{2}^2 - n\binom{n}{3} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$$