Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

11. Übungsblatt

Abgabe am 19.01.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Man betrachte eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) und bezeichne mit $K(E)$ die Schnittkrümmung einer nicht-ausgearteten Ebene $E \subset T_pM$.

1. Zeigen Sie: hängt $K(E)$ nur vom Fußpunkt p ab, so ist (M^n, g) Einstein, d.h., $\mathrm{ric} = f \cdot g$ für eine glatte reellwertige Funktion f auf M.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der 2. Aufgabe von Blatt 10, dass jede Einstein Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ konstante Skalarkrümmung hat. Gilt dies in Dimension $n = 2$? Begründen.

2. Aufgabe
Sei (M^3, g) eine drei-dimensionale semi-riemannsche Mannigfaltigkeit.

1. Drücken Sie ric in Abhängigkeit der Schnittkrümmung aus.
2. Leiten Sie daraus her, dass (M^3, g) genau dann Einstein ist, wenn sie konstante Schnittkrümmung hat.

3. Aufgabe
Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine flache semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und M eine m-dimensionale semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\overline{M}$ mit induzierter Metrik g. Für eine Basis (b_i) von T_pM mit $g(b_i, b_j) = \delta_{ij}\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ definieren wir den mittleren Krümmungsvektor $H(p) := \sum_{i=1}^m \epsilon_i \mathrm{I\!I}(b_i, b_i)$, $H \in \Gamma(TM^\perp)$.

1. Zeigen Sie, dass die Definition von H unabhängig von der Wahl der Basis ist.

2. Sei ric die Ricci-Krümmung von (M, g). Zeigen Sie für alle $X, Y \in T_pM$
$$\mathrm{ric}(X, Y) = \bar{g}(H, \mathrm{I\!I}(X, Y)) - \sum_{i=1}^m \epsilon_i \, \bar{g}(\mathrm{I\!I}(b_i, X), \mathrm{I\!I}(b_i, Y)).$$

3. Berechnen Sie eine Formel für die Skalarkrümmung von (M, g).

4. Aufgabe
Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definieren wir in den kartesischen Koordinaten (x, y)
$$g := \frac{1}{x^2 + y^2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx).$$

1. Zeigen Sie, dass dadurch eine semi-riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert ist. Was ist der Index von g?

2. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole und den riemannschen Krümmungstensor des zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhangs.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ durch
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (k, (x, y)) & \longmapsto & (2^k x, 2^k y) \end{array}$$
isometrisch und frei wirkt.

4. Sei $M := {}_{\mathbb{Z}}\backslash \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ der Quotient dieser Operation, also der Raum aller Bahnen. Konstruieren Sie einen Atlas von M, so dass die Projektion $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. (Man achte insbesondere auf die Hausdorff-Eigenschaft). Zeigen Sie dann, dass M diffeomorph zum 2-Torus ist.