Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

13. Übungsblatt

Abgabe am 2.02.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \delta$ für eine Konstante $\delta > 0$. Man bezeichne mit J ein Jacobi-Feld längs einer auf $\mathbb{R}$ definierten Geodätischen γ von (M^n, g) und setze voraus, dass $g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
Zeigen Sie, dass im Fall $n = 2$ das Jacobi-Feld J mindestens zwei Nullstellen hat. Gilt dies noch für $n \geq 3$?

2. Aufgabe
Sei (M^2, g) eine zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Sei e_1, e_2 eine ONB von T_pM. Für $r \in (0, \mathrm{injrad(p)})$, definieren wir den Kreis um p mit Radius r als $\gamma_r : [0, 2\pi] \to M$, $\gamma_r(t) = \exp_p(r \cos t e_1 + r \sin t e_2)$.

1. Zeigen Sie $\gamma_r([0, 2\pi]) = \{x \in M \,|\, d(x, p) = r\}$.

2. Zeigen Sie: für die Schnittkrümmung K_p in p gilt

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L[\gamma_r]}{r^3} = K_p.$$

(Hinweis: wählen Sie Polarkoordinaten (r, φ) in (T_pM, g_p) und beweisen und verwenden Sie folgende Identität auf U: $g(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi}) = r^2 - \frac{K}{3} r^4 + O(r^5)$.)

3. Aufgabe (Holonomiegruppe)
Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Sei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$. Ist $\gamma : [0, 1] \to M$ ein stetiger Weg, der auf den Intervallen $\gamma_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$,

$i = 0, 1, \ldots, r$ glatt ist, so definieren wir den Paralleltransport (oder die Parallelverschiebung)

$$\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} := \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_r} \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_{r-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_1} \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_0} : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma}$ wohldefiniert ist. Wie verändert sich der Paralleltransport unter orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden Parametertransformationen von γ?

2. Für ein $p \in M$ definiere man die Holonomiegruppe

$$\mathrm{Hol}^{\nabla}_p(E) := \Big\{ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} \mid \gamma : [0,1] \to M \text{ stetig und stückweise glatt mit } \gamma(0) = \gamma(1) = p \Big\},$$

   wobei $\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma}$ wie oben definiert ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hol}^{\nabla}_p(E)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{Aut}(T_pM), \circ)$ ist.

3. Für $p, q \in M$ sind die Gruppen $\mathrm{Hol}^{\nabla}_p(E)$ und $\mathrm{Hol}^{\nabla}_q(E)$ isomorph. (Tipp: Sie erhalten einen Isomorphismus durch Paralleltransport entlang eines Weges von p nach q.)

4. Aufgabe

Sei G eine Mannigfaltigkeit, die eine Gruppenstruktur besitzt, für welche die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$, glatt ist. Man bezeichne mit e das neutrale Element von G, mit I die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ und mit L_g (bzw. R_g) die Abbildung $G \to G$, $h \mapsto gh$ (bzw. $h \mapsto hg$).

1. Zeigen Sie, dass die Abbildungen I, L_g und R_g glatt sind, für alle $g \in G$.

2. Zeigen Sie, dass es einen linearen Isomorphismus gibt

$$T_eG \longrightarrow \mathfrak{g} := \{X \in \Gamma(TG) \mid d_hL_g(X_h) = X_{gh} \; \forall\, g, h \in G\}.$$

3. Sei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ eine semi-riemannsche Metrik auf G, für die $I^*\langle \cdot\,, \cdot \rangle = L_g^*\langle \cdot\,, \cdot \rangle = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$ für alle $g \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass dann auch $R_g^*\langle \cdot\,, \cdot \rangle = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$ für alle $g \in G$ gilt.
   (Notation: Ist $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $T \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N)$, dann ist $f^*T \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ definiert als $f^*T|_p(X, Y) = T_{f(p)}(d_pfX, d_pfY)$ für alle $X, Y \in T_pM$, $p \in M$.
   (Hinweis: zeigen und verwenden Sie folgende Identität:
   $I \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ I$.)