Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

14. Übungsblatt

Abgabe am 9.02.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine zusammenhängende, nichtkompakte, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$.

1. Zeigen Sie, dass es $p_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $d(p, p_i) \to \infty$ for $i \to \infty$.

2. Zeigen Sie, dass es in (M^n, g) einen Strahl $\gamma : [0, \infty) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ gibt.
   (Hinweis: Betrachten Sie die nach Bogenlänge parametrisierten Kürzesten von p nach p_i.)

2. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine zusammenhängende, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Man fixiere einen Punkt $m \in M$.

1. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in N$ gibt mit $d(m, p) = d(m, N)$, wobei $d(m, N) := \inf_{x \in N} \{d(m, x)\}$.

2. Zeigen Sie, dass es eine Geodätische γ von m nach p gibt mit Länge $L[\gamma] = d(m, p)$.

3. Zeigen Sie, dass γ die Untermannigfaltigkeit N orthogonal trifft.

3. Aufgabe
Seien (M^m, g) und (N^n, h) semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten mit M^m zusammenhängend und $f_1, f_2 : M \longrightarrow N$ Isometrien. Für einen Punkt $p \in M$ setze man voraus, dass $f_1(p) = f_2(p)$ sowie $d_p f_1 = d_p f_2$ gelten. Zeigen Sie, dass dann $f_1 = f_2$ gilt.
(Hinweis: verwenden Sie die Exponentialabbildung.)

4. Aufgabe
Für eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) und ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $(\gamma_s)_{s \in I}$ eine Ein-Parameter-Schar von geschlossenen Geodätischen von (M^n, g) mit konstanter Periodenlänge, d. h. die Abbildung $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ ist glatt und jedes γ_s ist eine Geodätische mit $\gamma_s(t + \ell) = \gamma_s(t)$ für ein $\ell > 0$ und für alle $t \in \mathbb{R}$, $s \in I$. Zeigen Sie, dass die Energie $E[\gamma_s|_{[0,\ell]}]$ unabhängig von s ist.
(Hinweis: betrachten Sie die erste Variation des Energiefunktionals.)