Universität Regensburg SS 2010
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Andreas Hermann

Differentialgeometrie II
1. Übungsblatt

1. Aufgabe
Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇^M und sei $S \subset M$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei NS das Normalenbündel von S in M, und $\pi : TM \to NS$ die (faserweise) Orthogonal-Projektion. Wir setzen für $X \in \Gamma(TS)$ und $U \in \Gamma(NS)$:

$$\nabla_X U := \pi(\nabla^M_X U).$$

Zeigen Sie, dass ∇ einen Zusammenhang auf NS definiert. Ist ∇ metrisch?

2. Aufgabe
Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M. Beweisen Sie, dass es eine Verfeinerung $(V_i)_{i\in I}$ von $(U_i)_{i\in I}$ gibt, so dass $\overline{V_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$ gilt. *Tipp:* Verwenden Sie eine Zerlegung der Eins.

3. Aufgabe

1. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $V \to \Omega$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit Ω mit Zusammenhängen ${}^1\nabla, ..., {}^k\nabla$. Seien weiter $\varphi_i \in C^\infty(\Omega)$ für $1 \le i \le k$ mit $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$. Zeigen Sie, dass $\nabla := \sum_{i=1}^k \varphi_i \, {}^i\nabla$ ebenfalls ein Zusammenhang auf V ist.

2. Sei $V \to \Omega$ ein triviales Vektorbündel von Rang n über einer Mannigfaltigkeit Ω mit einer Trivialisierung $\psi : V \to \Omega \times \mathbb{R}^n$. Für $1 \le i \le n$ definieren wir $s_i \in \Gamma(V)$ durch $s_i(x) := \psi^{-1}(x, e_i)$, wobei $(e_i)_{i=1}^n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ sei. Zeigen Sie, dass es genau einen Zusammenhang auf V gibt, so dass alle s_i parallel sind.

3. Folgern Sie: Auf jedem Vektorbündel existiert ein Zusammenhang.
   Tipp: Überdecken Sie M mit offenen Mengen auf denen das Bündel trivial ist.

Abgabe am 27.4.2010 vor der Vorlesung