Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 27.4.2010

Differentialgeometrie II
2. Übungsblatt

1. Aufgabe
Zeigen Sie dass die affine Gruppe

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & b \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$$

eine Lie-Gruppe ist und bestimmen Sie die Lie-Algebra.

2. Aufgabe

(a) Bestimmen Sie die Lie-Algebren zu $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $U(n)$ und $SU(n)$.

(b) Konstruieren Sie einen Lie-Algebren-Isomorphismus von $\mathfrak{so}(3)$ nach $(\mathbb{R}^3, \times)$.

3. Aufgabe
Sei $(V, [\,.\,,\,.\,])$ eine Lie-Algebra über dem Körper K. Ein Ideal ist ein Untervektorraum W, so dass

$$[x, y] \in W \qquad \forall x \in W, \forall y \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenvektorraum V/W trägt eine eindeutige Lie-Klammer, so dass $V \to V/W$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

(b) Der Kern eines Lie-Algebren-Homomorphismus ist ein Ideal und umgekehrt ist jedes Ideal der Kern eines Lie-Algebren-Homomorphismus.

(c) Zusatzaufgabe: Sei nun $K = \mathbb{R}$. Sei G eine Lie-Gruppe und H ein Normalteiler von G, der gleichzeitig Untermannigfaltigkeit ist. Dann ist die Lie-Algebra von H ein Ideal der Lie-Algebra von G.

4. Aufgabe
Sei $f : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ genau dann surjektiv ist, wenn f eine Submersion ist.

(b) Zeigen Sie, dass $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ genau dann bijektiv ist, wenn f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie: Ist H zusammenhängend und $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ surjektiv, dann ist auch f surjektiv.
Tipp: Zeigen Sie, dass $f(G)$ offen und abgeschlossen ist.

(d) Ist das Bild eines Lie-Gruppen-Homomorphismus immer abgeschlossen?

Abgabe am 4.5.2010 vor der Vorlesung