Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 4.5.2010

Differentialgeometrie II
3. Übungsblatt

5. Aufgabe
Sei $(\mathfrak{g}, [.,.])$ eine Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{ad}: \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \mathrm{ad}_x = (y \mapsto [x,y])$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

6. Aufgabe
Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld auf einer Lie-Gruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to G$ existiert mit $\gamma(0) = \mathbb{1}$ und $\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie dass γ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus ist.

7. Aufgabe
Eine Gruppe G operiere auf einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) G operiert eigentlich auf M,

(b) für alle kompakten Mengen $K \subset M$ ist $G_K = \{g \in G \,|\, (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ kompakt,

(c) Für alle konvergenten Folgen (p_i) in M und alle Folgen (g_i) in G, für die $(g_i \cdot p_i)$ konvergiert, gibt es eine konvergente Teilfolge von (g_i).

8. Aufgabe
Seien $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ topologische Quotienten. Ist dann die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ ebenfalls ein topologischer Quotient? Beweisen Sie oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Wenn die allgemeine Lösung zu schwer ist, diskutieren Sie bitte Spezialfälle.

Abgabe am 11.5.2010 vor der Vorlesung