Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 11.5.2010

Differentialgeometrie II
4. Übungsblatt

9. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(n) & \to & \mathrm{O}(n+1). \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} \end{array}$$

ein Lie-Gruppen-Homomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SO}(n+1) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \quad (A,[x]) \mapsto [Ax]$$

eine transitive Gruppenoperation definiert.

(c) Berechnen Sie die Isotropiegruppe des Elements $[e_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ und stellen Sie $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ als homogenen Raum dar.

10. Aufgabe

Eine diskrete Gruppe G operiere glatt auf einer Mannigfaltigkeit M. Man nennt die Gruppenoperation eigentlich diskontinuierlich, wenn alle p und q in M Umgebungen U_p und U_q besitzen, so dass gilt

$$\forall g \in G : \quad p \neq gq \Rightarrow U_p \cap gU_q = \emptyset.$$

(a) Sei G eine freie Gruppenoperation. Zeigen Sie, dass G genau dann eigentlich operiert, wenn G eigentlich diskontinuierlich operiert.

(b) Gegeben sei die Operation von $G = \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^n$, durch $k \cdot x := 2^k x$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ist diese Operation eine eigentlich diskontinuierliche Operation of $M_1 := \mathbb{R}^n$, auf $M_2 := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, auf $M_3 := (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-2}$?

(c) Sind die Quotienten $M_i/\mathbb{Z}$ hausdorffsch und sind sie (quasi-)kompakt?

11. Aufgabe
Sei $0 < m < n$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Quotienten, ob er eine Menge von Untervektorräume in $\mathbb{R}^n$, eine Menge von orientierten Untervektorräumen oder keines von beiden beschreibt:

(a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/(\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R}))$

(b) $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})/(\mathrm{GL}_+(m,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_+(n-m,\mathbb{R}))$.

(c) $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n-m))$.

(d) $\mathrm{SO}(n)/(\mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n-m))$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

12. Aufgabe
Wir definieren

$$\mathcal{K} := \{J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n}) \mid J^2 = -\mathrm{Id}\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{K}$ heißen komplexe Strukturen auf $\mathbb{R}^{2n}$. Die Gruppe $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ operiere durch Konjugation auf $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ eine Bahn dieser Operation ist. Berechnen Sie die Isotropie-Gruppe und stellen Sie $\mathcal{K}$ als homogenen Raum dar.

Abgabe am 18.5.2010 vor der Vorlesung