Differentialgeometrie II
5. Übungsblatt

13. Aufgabe

(a) Versehen Sie $O(n)$ mit der riemannschen Metrik $g_A(X,Y) :=\mathrm{Tr}(X^TY)$ für $X, Y \in T_AO(n)$. Zeigen Sie dass g eine linksinvariante Metrik ist.

(b) Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $(O(n), g)$. Zeigen Sie, dass für linksinvariante Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TO(n))$ gilt:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y], \quad R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

Hinweis: Koszul-Formel

(c) Folgern Sie, dass $(O(n), g)$ nichtnegative Schnittkrümmung besitzt.

14. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : S^1 \to \mathrm{Aut}(SU(n))$,

$$\lambda \mapsto \varphi_\lambda, \quad \varphi_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $SU(n) \times S^1$, versehen mit der Verknüpfung

$$(A,\lambda) \circ (A',\lambda') := (A\varphi_\lambda(A'), \lambda\lambda')$$

eine Gruppe ist. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $SU(n) \rtimes_\varphi S^1$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$SU(n) \rtimes_\varphi S^1 \to U(n), \quad (A,\lambda) \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix}$$

ein Gruppen-Isomorphismus ist.

15. Aufgabe

(a) Eine Lie-Gruppe G operiere frei und eigentlich auf M. Wir nehmen an, dass M eine riemannsche Metrik h trägt, so dass alle Abbildungen $l_g : M \to M$, $l_g(x) = g \cdot x$ Isometrien sind. (Solche Operationen heißen isometrische Operationen). Zeigen Sie: Es gibt auf M/G genau eine riemannsche Metrik $\bar{h}$, so dass $(M, h) \mapsto (M/G, \bar{h})$ eine riemannsche Submersion ist. Eine Submersion $\pi : M \to N$ nennt man hierbei riemannsch, falls für alle $p \in M$ die Abbildung $d_p\pi : ((\ker d_p\pi)^\perp, h) \to (T_{\pi(p)}N, \bar{h})$ eine Isometrie ist.

(b) Gilt die selbe Eigenschaft auch für Lorentzmannigfaltigkeiten?

16. Aufgabe

Eine Lie-Gruppe trage eine riemannsche Metrik g, so dass sowohl die Linksmultiplikation l_g als auch die Rechtsmultiplikation r_g für alle $g \in G$ eine Isometrie ist. Mann kann zeigen, (nicht Teil der Aufgabe), dass dann

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0$$

für alle links-invarianten Vektorfelder X, Y, Z gilt. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Zeigen Sie:

(a) $\nabla_X X = 0$ für alle links-invarianten Vektorfelder X.

(b) Eine glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to G$ mit $\gamma(0) = 1$ ist genau dann eine Geodätische, wenn γ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Abgabe am 1.6.2010 vor der Vorlesung