Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 1.6.2010

Differentialgeometrie II
6. Übungsblatt

17. Aufgabe. Wir versehen $M := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der riemannschen Metrik, so dass die Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine lokale Isometrie ist. Bestimmen Sie die Distanzfunktion $f = d(A, .)$ für die folgenden Mengen $A \subset M$. Wo ist f differenzierbar, wo ist f glatt?

(a) $A = \{\pi(0,0)\}$ (b) $A = \pi(B_{\frac{1}{2}}(0))$
(c) $A = \pi(\mathbb{R} \times \{0\})$ (d) $A = \pi([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times \{0\})$

Hierbei ist $B_{\frac{1}{2}}(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{1}{2}\}$.

18. Aufgabe.

(a) Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und seien $f, F : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definierte und differenzierbare Funktionen mit $F'(t) \geq \kappa + F^2(t)$ und $f'(t) \leq \kappa + f^2(t)$. Sei $a \in I$ beliebig. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}\left[(F(t) - f(t)) \exp\left(-\int_a^t (F(r) + f(r))\, dr\right)\right] \geq 0.$$

Gilt zusätzlich $f(t_0) \leq F(t_0)$, so folgt $f(t) \leq F(t)$ für alle $t \geq t_0$.

(b) Sei nun (M, g) eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric}(X, X) \geq (m-1)g(X, X)$ $\forall X \in TM$. Sei h eine verallgemeinerte Abstandsfunktion, und sei $H(p)$ die mittlere Krümmung der Niveaufläche $h^{-1}(h(p))$ im Punkt $p \in M$. Zeigen Sie

$$\partial_{\mathrm{grad}\, h} H \geq 1 + H^2.$$

(c) Sei nun $\gamma : (a, b) \to M$ eine Integrallinie von $\mathrm{grad}\, h$ mit $0 \in (a, b)$ und $H(\gamma(0)) = 0$. Zeigen Sie $a \geq -\pi/2$ und $b \leq \pi/2$.
Tipp: Verwenden Sie (a) mit $\kappa = 1$ und $f = \tan$.

(d) Was können Sie im Fall $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$ über die Weingartenabbildung aussagen?

19. Aufgabe. Seien M und $\widetilde{M}$ zusammenhängende nichtleere riemannsche Mannigfaltigkeiten, und sei $f : \widetilde{M} \to M$ eine lokale Isometrie, d.h. ein isometrischer lokaler Diffeomorphismus.
Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \widetilde{M} \to M$ eine Überlagerung, so ist M genau dann vollständig, wenn $\widetilde{M}$ vollständig ist. *Tipp: Satz von Hopf-Rinow*

(b) Ist $\widetilde{M}$ vollständig, so ist $f : \widetilde{M} \to M$ eine Überlagerung.
Tipp: Ist r kleiner als der Injektivitätsradius von p in M, dann ist $B_r(p)$ die gesuchte trivialisierende Umgebung von p.

20. Aufgabe. Sei (M, g) eine vollständige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ, sei $p \in M$. Wir definieren

$$s_\kappa(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{falls } \kappa > 0 \\ t & \text{falls } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}t) & \text{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

Seien $X, V \in T_pM$, $X \neq 0$. Zerlege $V = V^{\text{par}} + V^\perp$ mit $V^\perp \perp X$, und $V^{\text{par}} \in \mathbb{R}X$. Wir setzen $V, V^{\text{par}}, V^\perp \in T_pM$ zu parallelen Vektorfeldern längs $t \mapsto \exp_p tX$ fort, die mit demselben Symbol bezeichnet werden.

(a) Zeigen Sie:
$$d_X \exp_p(V) = V^{\text{par}} + \frac{s_\kappa(\|X\|)}{\|X\|} V^\perp.$$
Hinweis: Nutzen Sie die Jacobi-Gleichung für das Jacobi-Feld $J(t)$ der geodätischen Variation $\gamma_s(t) := \exp_p(t(X + sV))$. Zeigen Sie $J(0) = 0$ und $(\nabla/dt\ J)(0) = V$.

(b) Sei von nun an $\kappa \leq 0$. Zeigen Sie: Es gibt keine konjugierten Punkte auf M und $\exp_p$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

(c) Setzen wir nun $h := \exp_p^* g$. Zeigen Sie, dass (T_pM, h) eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Begründen Sie, wieso $\exp_p : T_pM \to M$ eine Überlagerung ist. *Tipp: 19. Aufgabe.*

Keine Vorlesung am Dienstag 8.6., keine Übungsgruppe am 9.6.
Nachholtermin Übungsgruppe am 10.6., 14–16 in M102
Abgabe der Lösungen am Donnerstag 10.6.2010 vor der Vorlesung