Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 10.6.2010

Differentialgeometrie II
7. Übungsblatt

21. Aufgabe *Hyperbolische Ebene und Poincarésches Kreisscheibenmodell*
Wir versehen $\mathbb{R}^3$ mit der Lorentz-Metrik $g(x,y) := -x_0y_0 + \sum_{i=1}^2 x_iy_i$. Sei $H^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | g(x,x) = -1 \text{ und } x_0 > 0\}$ die hyperbolische Ebene.

(a) Wir definieren einen Diffeomorphismus φ von H^2 auf die offene Scheibe

$$D := \{(0,x,y) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1\},$$

indem wir dem Punkt $p \in H^2$ den Schnittpunkt von D mit der Geraden durch p und $(-1,0,0)$ zuordnen. Zeigen Sie, dass die auf D induzierte Metrik $g_D := (\varphi^{-1})^*g$ gegeben ist durch $g_D = \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2 + dy^2)$.

(b) Sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ die obere Halbebene versehen mit der Metrik $g_H := \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Wir identifizieren D mit $\{z \in \mathbb{C} | \|z\| < 1\}$ und H mit $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation $f : D \to H$, $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ eine Isometrie von (D, g_D) nach (H, g_H) definiert.

22. Aufgabe (Fortsetzung 20. Aufgabe)
Sei (M,g) eine vollständige zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $\kappa \leq 0$, sei $p \in M$.

(a) Es gelte $\pi_1(M,p) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\exp_p$ ein Diffeomorphismus von T_pM nach M ist.

(b) Sei nun $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ eine weitere vollständige zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit derselben konstanten Schnittkrümmung κ sei $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ und sei $I : (T_{\tilde{p}}\widetilde{M}, \tilde{g}_{\tilde{p}}) \to (T_pM, g_p)$ eine lineare Isometrie. Zeigen Sie: I ist eine Isometrie $(T_{\tilde{p}}\widetilde{M}, \exp_{\tilde{p}}^*\tilde{g}) \to (T_pM, \exp_p^*g)$.
Tipp: Aufgabe 20a

(c) Sei nun $\kappa = -1$. Zeigen Sie: Es gibt eine glatte Abbildung vom hyperbolischen Raum H^m nach M, die lokal isometrisch und eine universelle Überlagerung ist.

(d) Sei nun $\kappa = 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine glatte Abbildung f vom euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ nach M, die lokal isometrisch und eine universelle Überlagerung ist.

(e) Zusatzfrage: Welche Aussage können Sie in den Fällen $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ machen?

23. Aufgabe Sei $\gamma : [0, b) \to M$ eine Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{t \in [0, b) \,|\, t \text{ ist nicht konjugiert zu } 0\}$$

offen und dicht in $[0, b)$ ist.

Abgabe der Lösungen am Dienstag 15.6.2010 vor der Vorlesung