Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 15.6.2010

Differentialgeometrie II
8. Übungsblatt

24. Aufgabe *Hyperbolischer Raum, Busemann-Funktionen, Horosphären.* Wir versehen $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Lorentz-Metrik $g(x,y) := -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Sei $(e_i)_{i=0}^n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | g(x,x) = -1 \text{ und } x_0 > 0\}$ der hyperbolische Raum.

(a) Sei $f : H^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_0+x_1$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{grad} f_x \in T_xH^n$ gegeben ist durch

$$\mathrm{grad} f_x = -e_0 + e_1 + (x_0 + x_1)x.$$

Folgern Sie, dass $h := \log(f)$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion auf H^n definiert.

(b) Sei $x \in H^n$ mit $x_2 = ... = x_n = 0$. Zeigen Sie dass die Weingarten-Abbildung S_x der Niveaufläche $N_{h(x)} = h^{-1}(h(x))$ im Punkt x gegeben ist durch $S_x = -\mathrm{id}_{T_xN_{h(x)}}$.
Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Dies gilt sogar für alle $x \in H^n$.

(c) Berechnen Sie die Schnittkrümmung der Niveaufläche $N_{h(x)}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

Bemerkung: h heißt Busemann-Funktion, die Niveauflächen heißen Horosphären.

25. Aufgabe Wir versehen $\mathbb{C}P^n$ mit der Metrik, so dass $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $x \mapsto [x]$ eine riemannsche Submersion ist. Zeigen Sie:

(a) Die kanonische Operation von $U(n+1)$ auf $\mathbb{C}P^n$ ist eine isometrische Operation.

(b) Zu jedem $p \in \mathbb{C}P^n$ gibt es eine Isometrie $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ mit $f(p) = p$ und $d_pf = -\mathrm{Id}_{T_p\mathbb{C}P^n}$.

(c) $\nabla R \equiv 0$.

Tipp zu (c): Nutzen Sie die Tatsache, dass für eine Isometrie f gilt:

$$(\nabla R)_{f(p)}(d_pf(X), d_pf(Y), d_pf(Z), d_pf(W)) = d_pf(\nabla R_p(X,Y,Z,W)).$$

26. Aufgabe *(O'Neill-Formel)*
Sei $\pi : (M, g) \to (N, h)$ eine riemannsche Submersion. Die Vektoren im Kern von $d\pi$ heißen vertikal. Für jedes $X \in \Gamma(TN)$ bezeichnen wir den horizontalen Lift mit $\overline{X}$, d. h. $\overline{X} \in \Gamma(TM)$, und $d\pi \circ \overline{X} = X \circ \pi$, und $\overline{X}$ ist überall orthogonal zum Kern von $d\pi$.

(a) Zeigen Sie, dass der vertikale Anteil von $[\overline{X}, \overline{Y}]$ in $p \in M$, den wir mit $[\overline{X}, \overline{Y}]_p^v$ bezeichnen wollen, nur von $\overline{X}(p)$ und $\overline{Y}(p)$ abhängt.

(b) Seien $X \in \Gamma(TN)$, $\eta \in \Gamma(TM)$, η vertikal. Zeigen Sie, dass $[\eta, \overline{X}]$ vertikal ist.

(c) Zu $X, Y \in \Gamma(TN)$ berechnen Sie bitte $\overline{[X, Y]} - [\overline{X}, \overline{Y}]$ und $\nabla^M_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla^N_X Y}$.

(d) Angenommen $\overline{X}(p)$ und $\overline{Y}(p)$ seien orthonormal. Sei E die von $X(\pi(p))$ und $Y(\pi(p))$ aufgespannte Ebene, und sei $\overline{E}$ die von $\overline{X}(p)$ und $\overline{Y}(p)$ aufgespannte Ebene. Zeigen Sie die folgende Formel für die Schnittkrümmungen von (M, g) und (N, h).

$$K^{N,h}(E) = K^{M,g}(\overline{E}) + \frac{3}{4} \| [\overline{X}, \overline{Y}]_p^v \|^2.$$

Abgabe der Lösungen am Dienstag 22.6.2010 vor der Vorlesung