Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 22.6.2010

Differentialgeometrie II
9. Übungsblatt

27. Aufgabe. Bestimmen Sie $\mathcal{S}_p^{\tan}M$, $\mathcal{C}_p^{\tan}M$, $\mathcal{S}_pM$ und $\mathcal{C}_pM$ für

(a) $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$, wobei Γ die von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe ist. Und $p := [0]$.

(b) $M = \mathbb{R}P^m = S^m/\{\pm 1\}$ mit der Quotientenmetrik, und $p := [e_1]$.

28. Aufgabe. Sei M eine vollständige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ fix. Wir definieren $\operatorname{diam} M := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in M\}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{diam} M = \sup_{X \in SM} s(X)$

(b) $\operatorname{injrad}(p) \leq \inf_{X \in S_pM} s(X)$

(c) $\operatorname{injrad}(M) \leq \inf_{X \in SM} s(X)$

(d) $\sup_{X \in SM} s(X) = \infty$ genau dann, wenn es für alle $p \in M$ ein $X \in S_pM$ gibt mit $s(X) = \infty$.
Tipp: Benutze Aufgabe 1 des 14. Blatts, Differentialgeometrie I

29. Aufgabe. Sei P eine kompakte Untermannigfaltigkeit einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M. Sei $\pi : N \to P$ das Normalenbündel von P in M. Die normale Exponentialfunktion sei die Funktion $\exp^N : N \to M$, $X \mapsto \exp_{\pi(X)}(X)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $d_X \exp^N$ invertierbar für alle $X \in N$ mit $\|X\| < \epsilon$.

(b) Sei P eine Hyperfläche mit Einheitsnormalenfeld ν und Weingartenabbildung S. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to P$ eine glatte Kurve, $p = c(0)$, $X = \dot{c}(0)$. Dann erfüllt das Jacobi-Feld J zur Variation

$$\gamma_s(t) := \exp_{c(s)}\left(t\nu_{c(s)}\right)$$

die Anfangsbedingungen $J(0) = X$ und $J'(0) = -S(X)$.

(c) Zusätzlich zu den Annahmen in (b) nehmen wir an, dass M flach ist. Sei $\lambda^* > 0$ ein Eigenwert von S_p. Zeigen Sie, dass $d_{t\nu_p} exp^N$ für $t = 1/\lambda^*$ nicht invertierbar ist.
Diese Punkte heißen Brennpunkte von P.

(d) Zusatzaufgabe (ohne Zusatzannahmen von (b) und (c)): Es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung U von P in M, so dass $\exp^N$ die Menge $\{X \in N \mid \|X\| < \epsilon\}$ diffeomorph auf U abbildet.

30. Aufgabe. Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\gamma : [0, \infty) \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $d(\gamma(t), \gamma(0)) = t \ \forall t \in [0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie: $f(q) := \lim_{t\to\infty}(d(q, \gamma(t)) - t)$ existiert.
Tipp: Monotonie in t. Bemerkung: f heißt Busemann-Funktion.

(b) Ist f glatt auf der offenen Menge U, so ist $f|_U$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion.
Tipp: Sie können ähnlich wie im Beweis für $f(q) = d(q, A)$ argumentieren.

Abgabe der Lösungen am Dienstag 29.6.2010 vor der Vorlesung