Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 29.6.2010

Differentialgeometrie II
10. Übungsblatt

31. Aufgabe.
Sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = e^{-z^2}\}$. Zeigen Sie: M ist vollständig, $\mathrm{vol}(M) < \infty$, $\mathrm{injrad}(M) = 0$, $\mathrm{diam}(M) = \infty$.

32. Aufgabe.
Sei (M,g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\mathrm{injrad}(M) > 0$. Dann ist M vollständig.

33. Aufgabe.
Wir versehen $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ mit der Standard-Metrik, und $\Gamma := \{1, i, -1, -i\}$ operiert frei und isometrisch auf S^3. Sei $M := S^3/\Gamma$, $\pi : S^3 \to M$ die zugehörige Projektion und $p := \pi(e_1) = e_1 \mod \Gamma \in M$. Zeigen Sie, dass für den Schnittort $\mathcal{S}_p$ gilt:

$$\mathcal{S}_p = \{\pi(x) \,|\, x \in S^3 \text{ mit } d(x, e_1) = d(x, ie_1)\}$$

$$= \left\{ \pi\left(\frac{(1+i)r}{\sqrt{2}} e_1 + ve_2 \right) \,\middle|\, r \in [0,1], \quad v \in \mathbb{C} \text{ mit } r^2 + |v|^2 = 1 \right\}.$$

Geben Sie ohne Begründung an: Wo sind die Minima und Maxima der Funktion $s : S_pM \to (0, \infty)$?
Zusatzfrage: Wo ist $\mathcal{S}_p$ eine glatte Hyperfläche und wo nicht?

34. Aufgabe.
$\mathbb{C}P^n$ trage die *Fubini-Study-Metrik*, das heißt die riemannsche Metrik, so dass die *Hopf-Faserung* $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $z \mapsto [z]$ eine riemannsche Submersion ist. In der 26. Aufgabe auf dem 8. Blatt haben wir gesehen: Sind $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(TS^{2n+1})$ horizontale Lifts von $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{C}P^n)$, dann hängt der vertikale Anteil von $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ im Punkt z nur von $X(\pi(z))$ und $Y(\pi(z))$ ab. Vertikale Vektoren im Punkt z sind von der Form λiz, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ziel der Aufgabe ist, die bilineare Abbidung $T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^n \times T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}iz$ zu bestimmen und anzuwenden.

Für $X, Y \in \mathbb{C}^{n+1}$ definieren wir $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^{n+1} X_j\overline{Y_j}$ und weiter $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n+1} X_j\overline{Y_j}$. Dann gilt $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle X, iY\rangle_{\mathbb{R}}$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\tilde{X}_0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, so ist $\tilde{X} \in \Gamma(TS^{2n+1})$, $\tilde{X}_w := \tilde{X}_0 - \langle \tilde{X}_0, w\rangle_{\mathbb{C}} w$ ein wohldefiniertes Vektorfeld.

(b) $\tilde{X}$ ist überall horizontal

(c) Jeder Punkt $p \in \mathbb{C}P^n$ besitzt eine offene Umgebung U mit einer glatten Abbildung $f : \pi^{-1}(U) \to S^1$, die $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ für alle $z \in \pi^{-1}(U)$, $\lambda \in S^1$, erfüllt.

(d) $f\tilde{X}$ ist horizontaler Lift eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(T\mathbb{C}P^n)$.

(e) Für festes $z \in S^{2n+1}$ gelte $\langle \tilde{X}_0, z\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \tilde{Y}_0, z\rangle_{\mathbb{C}} = 0$. Für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von S^{2n+1} gilt

$$\nabla_{\tilde{Y}_w} \tilde{X}_w|_{w=z} = -(\Im\langle \tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\rangle_{\mathbb{C}})iz.$$

(f) Wir folgern:

$$[f\tilde{Y}, f\tilde{X}]^v|_{w=z} = -2(\Im\langle \tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\rangle_{\mathbb{C}})iz.$$

(g) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{C}P^n$ gilt $1 \leq K \leq 4$. Für welche Ebenen gilt $K = 4$, für welche Ebenen gilt $K = 1$?

Abgabe der Lösungen am Dienstag 6.7.2010 vor der Vorlesung