

## Differentialgeometrie II 11. Übungsblatt

### 35. Aufgabe

Sei  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  eine riemannsche Submersion,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\gamma : I \rightarrow N$  eine Kurve. Man nennt eine Kurve  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow M$  einen horizontalen Lift von  $\gamma$ , falls  $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$  für alle  $t \in I$  horizontal ist, und falls  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

- (a) Sei  $\gamma : [0, b] \rightarrow N$  eine Kurve. Zeigen Sie: Für jedes  $x \in \pi^{-1}(\gamma(0))$  gibt es ein  $\varepsilon \in (0, b]$ , so dass  $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$  einen horizontalen Lift  $\tilde{\gamma}$  mit der Eigenschaft  $\tilde{\gamma}(0) = x$  besitzt.

*Tipp: Benutzen Sie, dass für geeignete Karten  $(U, \varphi)$  von  $M^m$  und  $(V, \psi)$  von  $N^n$  die Abbildung  $\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}$  durch  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  gegeben ist. Reduzieren Sie das Problem in diesen Koordinaten auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

- (b) Geben Sie ein Beispiel einer riemannschen Submersion  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  und einer Kurve  $\gamma : [0, b] \rightarrow N$  an, die nicht auf ganz  $[0, b]$  einen horizontalen Lift besitzt.

### 36. Aufgabe

Sei  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  eine riemannsche Submersion.

- (a) Zeigen Sie: Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow N$  eine Kürzeste zwischen den Endpunkten, dann ist jeder horizontale Lift  $\tilde{\gamma}$  ebenfalls eine Kürzeste zwischen den Endpunkten.
- (b) Folgern Sie: Die horizontalen Lifts von Geodätischen auf  $(N, h)$  sind Geodätische auf  $(M, g)$ .
- (c) Folgern Sie: Ist  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische in  $(M, g)$  mit  $\dot{\tilde{\gamma}}(a)$  horizontal, dann ist  $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$  für alle  $t$  horizontal.
- (d) Folgern Sie: Ist der horizontale Lift  $\tilde{\gamma}$  einer Kurve  $\gamma$  eine Geodätische in  $(M, g)$ , so ist  $\gamma$  eine Geodätische in  $(N, h)$ .  
*Tipp: Vergleichen Sie mit einer Geodätischen  $\gamma_1$  in  $(N, h)$  mit  $\dot{\gamma}_1(a) = \dot{\gamma}(a)$ . Alternativ können Sie auch Blatt 8, 26. Aufgabe (c) nutzen.*

### 37. Aufgabe

Sei  $M \rightarrow B$  eine riemannsche Submersion zwischen zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeiten und sei  $M$  vollständig. Dann ist  $B$  vollständig.

*Tipp: Nutzen Sie die 36. Aufgabe.*

### 38. Aufgabe.

$\mathbb{C}P^n$  trage wiederum die Fubini-Study-Metrik, und wieder sei  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ,  $x \mapsto [x]$  die Hopf-Faserung. Es gilt dann  $1 \leq K \leq 4$  (siehe 34. Aufgabe). Für  $X, Y \in \mathbb{C}^{n+1}$  definieren wir  $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^{n+1} X_j \overline{Y_j}$ .

- (a) Sei  $\tilde{\gamma}$  ein Großkreisbogen auf  $S^{2n+1}$ . Zeigen Sie: Ist  $\langle \dot{\tilde{\gamma}}(0), \tilde{\gamma}(0) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ , so ist das Bild von  $\tilde{\gamma}$  unter der Hopf-Faserung eine Geodätische auf  $\mathbb{C}P^n$ . Alle nichtkonstanten Geodätischen auf  $\mathbb{C}P^n$  sind so gegeben.
- (b) Folgern Sie dass alle nichtkonstanten nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen auf  $\mathbb{C}P^n$  periodisch mit Periode  $\pi$  sind.
- (c) Zeigen Sie für  $z_1, z_2 \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ :  $\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  gilt genau dann, wenn  $d([z_1], [z_2]) = \pi/2$ . Zeigen Sie weiter:  $\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{C}} \neq 0$  gilt genau dann, wenn  $d([z_1], [z_2]) < \pi/2$ .
- (d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt bezüglich  $[e_1]$  (mit Begründung).

*Abgabe der Lösungen am Dienstag 13.7.2010 vor der Vorlesung*