Differentialgeometrie II
12. Übungsblatt

39. Aufgabe
Geben Sie ein Beispiel einer vollständigen nichtkompakten zweidimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K > 0$.

40. Aufgabe.
Sei (M, g) eine kompakte zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit unendlichem $\pi_1(M)$ und $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ die universelle Überlagerung von M. Die Überlagerungsabbildung φ sei eine lokale Isometrie.

(a) Zeigen Sie, dass $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ nicht kompakt und vollständig ist.

(b) Beweisen Sie: Für alle $L > 0$ gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\tilde{\gamma}_L : [0, L] \to \widetilde{M}$, die eine Kürzeste zwischen den Endpunkten ist.

Nach Vorlesung operiert $G = \pi_1(M)$ frei und isometrisch auf $\widetilde{M}$. Zu festem $h \in G$ sei $\alpha_h : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, $\tilde{x} \mapsto h \cdot \tilde{x}$. Wir definieren $\beta_h : T\widetilde{M} \to T\widetilde{M}$ durch

$$T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \ni X \mapsto d_{\tilde{x}}\alpha_h(X) =: h \cdot X.$$

Sie können benutzen, dass dies eine Gruppenoperation auf $T\widetilde{M}$ definiert.

(c) Zeigen Sie: Es existieren Folgen $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in G mit $L_i \to \infty$ und so dass $\tilde{X} := \lim_{i\to\infty} g_i \cdot \dot{\tilde{\gamma}}_{L_i}(L_i/2)$ existiert.
Tipp: Nutzen Sie die Kompaktheit von SM.

(d) Sei $\tilde{p}$ der Fußpunkt von $\tilde{X}$. Folgern Sie, dass $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$, $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{p}}(t\tilde{X})$ eine Gerade ist (d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist $\tilde{\gamma}|_{[a,b]}$ minimal).
Tipp: Nutzen Sie die Stetigkeit der Distanzfunktion auf $\widetilde{M}$.

41. Aufgabe *(Zusatzaufgabe)*
Gegeben sei die Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Für $g, h \in G$ definieren wir $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Weiter seien

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Seien $l, m, n \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie $c := [a, b]$. Zeigen Sie

$$a^m b^n c^{l-mn} = \begin{pmatrix} 1 & m & l \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie dass $\Gamma := \{a, b\}$ ein Erzeugendensystem von G ist.

(b) Seien $r, s \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie $[a^r, b^s] = c^{rs}$. Folgern Sie $d^{G,\Gamma}(c^{rs+t}, 1) \leq 2|r| + 2|s| + 4|t|$.

(c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir wählen $r \in \mathbb{N}$, so dass $r^2 \leq |k| \leq (r+1)^2$ und schreiben $k = \pm r^2 + t$ mit $|t| \leq \frac{|2r+1|}{2}$.
Folgern Sie dass $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ existieren, die unabhängig von m, n, k sind, so dass $d^{G,\Gamma}(a^m b^n c^k, 1) \leq C_1(|m| + |n| + \sqrt{|k|}) + C_2$.

(d) Folgern Sie, dass, falls $R > 0$ groß genug ist, ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\left\{ a^m b^n c^k \,\middle|\, |m|, |n|, \sqrt{|k|} \leq \frac{R}{3C} \right\} \subset \overline{B_\Gamma^R}.$$

Abgabe der Lösungen am Dienstag 20.7.2010 vor der Vorlesung