Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 15.6.2010

Differentialgeometrie II
Lösung zum 7. Übungsblatt

23. Aufgabe Sei $\gamma : [0, b) \to M$ eine Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{t \in [0, b) \,|\, t \text{ ist nicht konjugiert zu } 0\}$$

offen und dicht in $[0, b)$ ist.
Lösung der 23. Aufgabe
Wir beginnen mit einem Lemma zu linearer Algebra.

Lemma 1 *Seien V und W m-dimensionale reelle Vektorräume und A_t eine glatte Familie von Homomorphismen, und sei $A_t' := (d/dt)A_t$. Wir nehmen an, dass*

$$\mathrm{Bild}A_0 \oplus A_0'(\mathrm{Kern}A_0) = W \tag{1}$$

Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass A_t für alle $t \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$ Rang m hat.

Beweis des Lemmas:
Sei k der Rang von A_0. Man kann Basen von V und W wählen, so dass A_0 durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird, bei der auf der Diagonalen zunächst k-mal 1 steht und dann $m - k$ mal die 0. Außerdem kann man durch Wahl der Basis erreichen, dass $\mathrm{Kern}A_0 = \mathrm{span}(e_{k+1}, \ldots, e_m)$ und dass $A_0'(e_r) \in e_r + \mathrm{Bild}A_0$ für alle $r \in \{k + 1, \ldots, m\}$. Man rechnet dann leicht nach (bezüglich der gewählten Basen

$$\det A_t = \det(A_0 + tA_0' + O(t^2)) = t^{m-k} + O(t^{m-k+1}).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas.
Nun brauchen wir noch einen Rechentrick zu Jacobi-Feldern.

Lemma 2 *Seien J_1 und J_2 zwei Jacobifelder längs einer Geodẗischen. Dann ist die Funktion*

$$t \mapsto \langle J_1(t), J_2'(t)\rangle - \langle J_1'(t), J_2(t)\rangle \tag{2}$$

konstant.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\langle J_1(t), J_2'(t)\rangle - \langle J_1'(t), J_2(t)\rangle\right) \\
= \;& \langle J_1'(t), J_2'(t)\rangle + \langle J_1(t), J_2''(t)\rangle - \langle J_1''(t), J_2(t)\rangle - \langle J_1'(t), J_2'(t)\rangle \\
= \;& \langle J_1(t), R(\dot\gamma(t), J_2(t))\dot\gamma(t)\rangle - \langle R(\dot\gamma(t), J_1(t))\dot\gamma(t), J_2(t)\rangle = 0
\end{aligned}$$

Lemma 3 *Sei $\gamma : [0,\ell]$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und für $V \in T_{\gamma(0)}M$ bezeichnen wir mit J_V das Jacobi-Feld mit $J_V(0) = 0$ und $J_V'(0) = V$. Wir identifizieren die Vektorräume $T_{\gamma(t)}M$, $t \in [0,\ell]$ vermöge Paralleltransport. Wir definieren $A_t(V) := J_V(t)$. Sei $t_0 \in (0,\ell)$ ein zu 0 konjugierter Punkt längs γ. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild} A_{t_0} \cap A_{t_0}'(\mathrm{Kern} A_{t_0}) = \{0\}. \tag{3}$$

Aus Dimensionsgründen folgt dann $\mathrm{Bild} A_{t_0} \oplus A_{t_0}'(\mathrm{Kern} A_{t_0}) = T_{\gamma(t_0)}M$, und mit Lemma 1 folgt, dass für kleines $\epsilon > 0$ die Abbildung A_t für $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ und für $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ invertierbar ist. Auf diesen Intervallen gibt es also keine zu 0 konjugierten Punkte. Die Aufgabe ist also gelöst, sobald wir Lemma 3 gezeigt haben.

Beweis von Lemma 3:
Angenommen $Z \in \mathrm{Bild} A_{t_0} \cap A_{t_0}'(\mathrm{Kern} A_{t_0})$, also $Z = A_{t_0}(V) = J_V(t_0)$ und $Z = A_{t_0}'(W) = J_W'(t_0)$ und $J_W(t_0) = A_{t_0}(W) = 0$ für geeignete $V, W \in T_{\gamma(0)}M$. Nach Lemma 2 ist die Funktion (2) für $J_1 = J_V$ und $J_2 = J_W$ konstant. Wir erhalten somit

$$0 = \langle 0, W\rangle - \langle V, 0\rangle = \langle J_V(0), J_W'(0)\rangle - \langle J_V'(0), J_W(0)\rangle$$

$$= \langle J_V(t_0), J_W'(t_0)\rangle - \langle J_V'(t_0), J_W(t_0)\rangle = \langle Z, Z\rangle - \langle J_V'(t_0), 0\rangle = \|Z\|^2.$$

Und dies impliziert Lemma 3.