Universität Regensburg, Mathematik SS 2010
Prof. Dr. Bernd Ammann, Andreas Hermann 4.5.2010

Differentialgeometrie II
Tipps zum 3. Übungsblatt

8. Aufgabe
Seien $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ topologische Quotienten. Ist dann die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ ebenfalls ein topologischer Quotient? Beweisen Sie oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Wenn die allgemeine Lösung zu schwer ist, diskutieren Sie bitte Spezialfälle.

Wiederholung: Ein lokal-kompakter Raum ist definiert als ein Hausdorff-Raum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Es folgt, dass dann in jeder Umgebung eine kompakte Umgebung enthalten ist.

A.) Die Antwort ist im allgemeinen falsch. Skizze eines Gegenbeispiels:

1.) Zeigen Sie: Ein topologischer Raum Z ist hausdorffsch gdw die Diagonale
$$\Delta_Z := \{(z,z) \,|\, z \in Z\}$$
in $Z \times Z$ abgeschlossen ist.

2.) Wir versehen die Menge $X = \mathbb{R}$ mit der gröbsten Topologie, in der alle offenen Intervalle offen sind und in der $\mathbb{Q}$ eine offene Menge ist.

3.) Zeigen Sie: $\{1\}$ und $A := \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sind abgeschlossene Menge in X, die nicht getrennt werden können. Dies bedeutet, es gibt keine offenen disjunkten Menge U, V mit $\{1\} \subset U$ und $A \subset V$.

4.) Führe auf X die folgende Äquivalenzrelation ein: $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ oder ($x \in A$ und $y \in A$). Sei $Y = X/\sim$, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen, und $p : X \to Y$ die kanonische Abbildung $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie, dass Y, versehen mit der Quotienten-Topologie nicht hausdorffsch ist.

5.) Zeigen Sie, dass einerseits Δ_Y nicht abgeschlossen in $Y \times Y$ ist, und andererseits $(p \times p)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

6.) Zeigen Sie: $p \times p : X \times X \to Y \times Y$ ist kein topologischer Quotient.

B.) Die Antwort ist richtig, wenn $X_2 = Y_2$ ein lokal kompakter Hausdorffraum ist und wenn $f_2 = \mathrm{id}$.

Lösungsskizze:

Wir schreiben $Z := X_2 = Y_2$, $X := X_1$, $Y := Y_1$, $f := f_1$. Zu zeigen ist, dass $f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ ein topologischer Quotient ist.

Da die Stetigkeit von $f_1 \times f_2$ offensichtlich ist, ist zu zeigen, dass für jede saturierte offene Menge $U \subset X \times Z$ die Menge $(f \times \mathrm{id})(U)$ offen ist.

Hierzu nehmen wir $(x, t) \in U$. Da Z lokal kompakt ist, hat jede Umgebung von t eine kompakte Umgebung. Wir haben deswegen ein kompakte Umgebung K von t in Z, so dass $\{x\} \times K \subset U$.

Wir definieren

$$V := \bigcap_{k \in K} \mathrm{pr}_X(U \cap (X \times \{k\})) \subset X,$$

wobei $\mathrm{pr}_X : X \times Z \to X$ die Projektion auf X ist. Für jedes $k \in K$ ist offensichtlich $\mathrm{pr}_X(U \cap (X \times \{k\}))$ offen in X, es ist aber nicht offensichtlich, dass dies auch für den unendlichen Durchschnitt solcher Mengen gilt.

Behauptung 1: V ist ebenfalls offen.

Um die Behauptung zu zeigen, nehme an, das $y \in V$. Dann gibt es zu jedem $k \in K$ offene Umgebungen W_k^X von y in X und W_k^Z von k in Z, so dass $W_k^X \times W_k^Z \subset U$. Endliche viele dieser W_k^Z überdecken bereits K, der Schnitt der zughörigen W_k^X ist somit in V enthalten und als Schnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen. Die Behauptung 1 ist gezeigt.

Behauptung 2: V ist saturiert.

Um diese Behauptung zu zeigen, setze $\widetilde{V} := f^{-1}f(V)$. Offensichtlich gilt $V \subset \widetilde{V}$ und $\widetilde{V}$ ist saturiert. Wir haben

$$f(\widetilde{V}) \times K = f(V) \times K = (f \times \mathrm{id})(V \times K) \subset (f \times \mathrm{id})(U),$$

also $\widetilde{V} \times K \subset U$, da U saturiert ist. Nach Konstruktion von V ergibt sich $\widetilde{V} \subset V$ und somit $V = \widetilde{V}$, was die Behauptung liefert.

Also ist V eine offene, saturierte Umgebung von x, somit ist $f(V)$ eine offene Umgebung von $f(x)$ in Y. Ist K_o das Innere von K, dann ist also $f(V) \times K_o$ eine offene Umgebung von $(f(x), t)$ mit $f(V) \times K_o \subset (f \times \mathrm{id})(U)$. Wir sehen also, dass für jeden Punkt in $(f \times \mathrm{id})(U)$ auch eine offene Umgebung in $(f \times \mathrm{id})(U)$ enthalten ist, somit ist $(f \times \mathrm{id})(U)$ offen.

C.) Es folgt: Sind alle X_2 und Y_1 lokal-kompakte Hausdorffräume, so ist $f_1 \times f_2$ ein topologischer Quotient.