

# Teil-Skript zum Thema Riccati-Gleichung Bernd Ammann, Regensburg

Dieses Teil-Skript wurde von Prof. B. Ammann im Rahmen der Vorlesung  
Differentialgeometrie 2, Sommersemester 2010 geschrieben.



# Kapitel VI

## Riemannsche Geometrie, Teil 2

### VI.1 Rund um das Gauß-Lemma

Dieser Abschnitt enthält Wiederholungen und Erweiterungen aus dem Wintersemester 2010.

Schreibweise  $d_p = d(p, \cdot)$  ist die riemannsche Distanz zu  $p$ . Hingegen ist  $d_p$  die Ableitung einer Funktion an der Stelle  $p$ .

$m = \dim M$ .

— *kommt später* —

Sei  $\frac{\partial}{\partial r}$  das radiale Vektorfeld in Normalkoordinaten mit Zentrum in  $p$ , d.h.

$$\frac{\partial}{\partial r} |_{\exp_p X} := (d_X \exp_p) \left( \frac{X}{\|X\|} \right).$$

**Lemma VI.1.1.**

$$\text{grad } d_p = \frac{\partial}{\partial r}$$

auf  $B_{r_0}(p) \setminus \{p\}$  für  $r_0 < \text{inrad}(p)$ .

Beweis — *kommt später* —

### VI.2 Verallgemeinerte Abstandsfunktionen

Mit Ausnahme von Proposition VI.2.4 findet man die meisten Beweise für diesen Abschnitt in [1].

— *kommt später* — Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $A \subset M$  eine Teilmenge.

$$d_A(x) := d(A, x) := \inf_{a \in A} d(a, x).$$

Da die Distanzfunktion  $d$  die ursprüngliche Topologie auf  $M$  induziert, gilt  $d_A(x) = 0$  genau dann wenn  $x \in \bar{A}$ . Ferner gilt  $d_A = d_{\bar{A}}$ . — *kommt später* —

**Proposition VI.2.4.** *Bezeichnungen wie oben, und sei  $A$  abgeschlossen. Falls  $d_A$  differenzierbar in  $q$  ist und  $q \notin A$ , dann folgt  $\|\text{grad } f_q\| = 1$ .*

*Beweis.* Setze  $f := d_A$ .

**1. Behauptung:** Für alle  $x, y \in M$  gilt  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ .

— *kommt später* —

**2. Behauptung:** Aus der 1. Behauptung folgt  $\|\text{grad } f_q\| \leq 1$ .

— *kommt später* —

**3. Behauptung:**  $\|\text{grad } f_q\| \geq 1$ .

— *kommt später* —

□

**Folgerung VI.2.5.** *Sei  $A \subset M$  abgeschlossen, und  $U$  eine offene Teilmenge von  $M \setminus A$  und  $d_A$  glatt auf  $U$ . Dann ist  $d_A|_U$  eine verallgemeinerte Abstandsfunktion.*

— *kommt später* —

**Satz VI.2.6** (Riccati-Gleichung). *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine verallgemeinerte Abstandsfunktion,  $N_s = f^{-1}(s)$ ,  $\nu := \text{grad } f$ . Dann gilt*

$$\nabla_\nu S = R_\nu + S \circ S,$$

wobei  $S$  die Weingarten-Abbildung der Niveauflächen ist.

— *kommt später* —

$$T^f M := \bigcup_{p \in M} \ker d_p f = \bigcup_{p \in M} T_p N_{f(s)}.$$

**Lemma VI.2.7.** *Sei  $X \in \Gamma(T^f M)$ ,  $\nu = \text{grad } f$ ,  $\|\nu\| \equiv 1$ . Dann gilt auch  $\nabla_\nu X \in \Gamma(T^f M)$ .*

— *kommt später* —

**Definition VI.2.8.** *Für  $A \in \text{End}(T^f M)$  definieren wir  $\nabla_\nu A \in \text{End}(T^f M)$ , indem wir fordern, dass*

$$(\nabla_\nu A)(X) := \nabla_\nu(A(X)) - A(\nabla_\nu X)$$

für alle  $X \in \Gamma(T^f M)$  gelten soll.

— *kommt später* —

**Eigenschaften VI.2.9.**

- (1)  $\nabla_\nu \text{id}_{TfM} = 0$   
 (2)  $\text{Spur}(\nabla_\nu A) = \partial_\nu(\text{Spur } A)$

— kommt später —

**Lemma VI.2.10.** — kommt später —

$$\text{Spur } S^* \circ S \geq (\text{Spur } S)^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $S = \lambda 1_V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

— kommt später —

**Satz VI.2.11** (Riccati-Ungleichung für die mittlere Krümmung). *Unter den Voraussetzungen von Satz VI.2.6 gilt*

$$\partial_\nu H \geq \frac{1}{m-1} \text{ric}(\nu, \nu) + H^2$$

und Gleichheit gilt in  $p$  genau dann, wenn  $S_p = \lambda \text{id}_{T_p N_f(p)}$

**Beispiele VI.2.12** (Konstante Krümmung). *Betrachte vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten mit  $K \equiv \kappa$ , siehe z. B. [1].*

## Riccati-Gleichung und Jacobi-Gleichung

— kommt später —

## VI.3 Konjugierte Punkte

— kommt später —

### Riccati-Gleichung und konjugierte Punkte

— kommt später —  $M$  sei eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \exp_p tX$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und  $V \perp X$ .

$$\gamma_s(t) := \exp_p \left( t(\cos(\|V\|s)X + \sin(\|V\|s) \frac{V}{\|V\|}) \right)$$

$$J_V(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_2(t).$$

**Definition VI.3.3.** *Seien  $X, V \in T_p M$ ,  $\|X\| = \|V\| = 1$ ,  $X \perp V$ ,  $t_0 X \in \mathcal{D}_p$ . Die Punkte 0 und  $t_0$  seien nicht konjugiert längs der Geodätischen  $t \mapsto \exp_p(tX)$ .*

*Wir definieren die verallgemeinerte Weingarten-Abbildung durch die Vorschrift*

$$S_{t_0}(J(t_0)) := -\frac{\nabla}{dt} J(t_0)$$

für alle Jacobi-Felder  $J$  mit  $J(0) = 0$ .

Wohldefiniertheit von  $S_{t_0}$ : Da 0 und  $t_0$  nicht konjugiert sind, gibt es zu jedem  $W \in T_{\exp_p t_0} X M$  genau ein Jacobi-Feld mit  $J(t_0) = W$  und  $J(0) = 0$ .

Definiere  $I_0 := \{t_0 \in (0, b) \mid t_0 \text{ ist nicht konjugiert zu } 0\}$ . Nach Übungsaufgabe ?? ist  $I_0$  offen und dicht in  $[0, b)$ .

**Lemma VI.3.4.**

- (i) *Angenommen  $(0, b_0) \subset I_0$ ,  $d_p$  sei glatt auf einer Umgebung  $U$  von  $\gamma((0, b_0))$  und  $\gamma|_{[0, t]}$  sei Kürzeste von  $p = \gamma(0)$  nach  $\gamma(t)$  für alle  $t \in (0, b_0)$ . Dann gilt*

$$S_t = S_{\gamma(t)}.$$

*Hierbei ist  $S_{\gamma(t)}$  die Weingarten-Abbildung von  $d_p^{-1}(d_p(\gamma(t)))$ .*

- (ii)  $S_t$  erfüllt die Riccati-Gleichung auf ganz  $I_0$ .  
 (iii) Es gelte  $(0, b_1) \subset I_0$ . Dann ist  $S_t$  selbstadjungiert für alle  $t \in (0, b_1)$ .

*Beweis.* (i) und (ii)

— kommt später —

(iii): Für  $0 < b_0 \leq \text{inrad}(p)$  sind die Voraussetzungen von (i) erfüllt. Da die Weingarten-Abbildung selbstadjungiert ist, folgt also auch die Selbstadjungiertheit von  $S_t$ ,  $t \in (0, b_0)$ . Adjunktion der Riccati-Gleichung ergibt

$$\nabla_\nu S_t^* = R_{\gamma(t)} + S_t^* \circ S_t^*.$$

Die beiden Familien von Endomorphismen  $S_t$  und  $S_t^*$  lösen also dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung mit denselben Anfangswerten und somit gilt  $S_t = S_t^*$  auf  $(0, b_1)$ .  $\square$

Seien ab sofort  $\lambda_1(t) \leq \dots \leq \lambda_{m-1}(t)$  die Eigenwerte (mit Multiplizität) von  $S_t$ ,  $t \in I_0$ .

**Proposition VI.3.5.**

- (a)  $S_t$  divergiert für  $t \rightarrow 0$ . Genauer

$$\lim_{t \rightarrow 0} t S_{\gamma(t)} = -\text{id}_{\gamma(0)^\perp}.$$

- (b) Sind 0 und  $t_0$  zueinander konjugiert, dann divergiert  $S_t$  für  $t \rightarrow t_0$ . Außerdem  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} \lambda_{m-1}(t) = \infty$ .

**Bemerkung VI.3.6.** Man kann im zweiten Teil sogar mehr zeigen: Ist die Metrik  $g$  auf  $M$  reell-analytisch, dann ist  $S_t$  eine reell-meromorphe Familie von Endomorphismen parametrisiert durch  $(0, b)$ , mit Polen von höchstens erster Ordnung. Die Polstellen sind genau die zu 0 konjugierten Punkte. Das Residuum

im konjugierten Punkt  $t_0$  ist ein Endomorphismus, dessen Kern den Jacobi-Feldern  $j$  mit  $J(0) = 0$  und  $J(t_0) = 0$  entspricht.

Man beachte aber, dass die  $\lambda_i(t)$  i.a. nicht glatt sind, da wir sie der Größe nach geordnet haben. Durch Umordnen kann man sie aber auch reell-analytisch machen.

Ist  $g$  nicht mehr reell-analytisch, dann sind die  $S_t$  zwar nicht mehr reell-analytisch. Man sieht dann aber weiterhin, dass  $(t - t_0)S_t$  sich zu einem glatten Endomorphismen-Feld um  $t_0$  herum fortgesetzt werden kann.

Also: Konjugierte Punkte sind genau die Pole der verallgemeinerten Weingarten-Abbildung.

*Beweis. — kommt später —*

□

## VI.4 Rauchsche Vergleichssätze

Verallgemeinerte trigonometrische Funktionen

Die Eigenwerte von  $S_t$  seien  $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_{m-1}(t)$ .

**Proposition VI.4.1.** *Sei  $\gamma : [0, \ell) \rightarrow M$  eine Geodätische. Es gebe keine zu 0 konjugierten Punkte auf  $(0, \ell)$ . Für alle  $t \in (0, \ell)$  und alle Ebenen  $E \subset T_{\gamma(t)}(M)$  gelte*

$$\kappa_1 \leq K(E) \leq \kappa_2.$$

Dann gilt  $\kappa_1 \ell^2 \leq \pi^2$  und wir erhalten die folgenden Abschätzungen für alle  $i = 1, \dots, m - 1$ .

- (1)  $-\text{ct}_{\kappa_1}(t) \leq \lambda_i(t)$  für alle  $t \in (0, \ell)$ ,
- (2)  $-\text{ct}_{\kappa_2}(t) \geq \lambda_i(t)$  für alle  $t \in (0, \ell^*)$ , wobei  $\ell^* := \ell$  im Falle  $\kappa_2 \leq 0$  und  $\ell^* := \min\{\ell, \pi/\sqrt{\kappa_2}\}$ .

*Beweis. Untere Schranke*

**Obere Schranke** Wir wissen bereits, dass  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{m-1}(t) = -\infty$ . Zu jedem  $\epsilon > 0$  wähle ein  $t_0(\epsilon)$ , so dass

$$\lambda_{m-1}(t_0(\epsilon)) < -\text{ct}_{\kappa_2}(t_0(\epsilon) + \epsilon). \quad (\text{VI.1})$$

Wir können annehmen, dass  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_0(\epsilon) = 0$ .

Sei nun  $\epsilon > 0$  fixiert. Wir wollen zeigen, dass  $\lambda_{m-1}(t) < -\text{ct}_{\kappa_2}(t + \epsilon)$  für alle  $t \in (t_0, l^* - \epsilon)$ .

Wir nehmen das Gegenteil an. Sei  $t_1 \in (t_0, l^* - \epsilon)$  die kleinste Zahl, für die die Ungleichung nicht gilt. Es gilt also aus Stetigkeitsgründen

$$\lambda_{m-1}(t_1) = -\text{ct}_{\kappa_2}(t_1 + \epsilon).$$

Insbesondere gilt  $\lambda_i(t) \leq \text{ct}_{\kappa_2}(t_1 + \epsilon)$  für alle  $i$  und alle  $t \in I := [t_0, t_1]$ . Der Endomorphismus

$$A_t := \text{ct}_{\kappa_2}^{-1}(-S_t)$$

ist somit wohldefiniert, und hängt glatt von  $t$  ab. Man rechnet leicht nach, dass

$$\frac{d}{dt}A_t = \frac{1}{\kappa_2 + S_t^2}(S_t^2 + R_{\dot{\gamma}(t)}) \leq \frac{\kappa_2 + S_t^2}{\kappa_2 + S_t^2} = \text{id}_{\dot{\gamma}(t)^\perp}$$

Somit ist für  $t \in I$  der Endomorphismus  $A_t - A_{t_0} - (t - t_0)\text{id}_{\dot{\gamma}(t)^\perp}$  ein negativ semi-definiter symmetrischer Endomorphismus. Also erfüllt der größte Eigenwert  $\text{ct}_{\kappa_2}^{-1}(-\lambda_{m-1}(t))$  von  $A_t$  dann

$$\text{ct}_{\kappa_2}^{-1}(-\lambda_{m-1}(t)) \leq \text{ct}_{\kappa_2}^{-1}(-\lambda_{m-1}(t_0)) + (t - t_0) < t_0 + \epsilon + t - t_0 = t + \epsilon,$$

und Ungleichung VI.1 folgt für alle  $t \in [t_0, t_1]$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.  $\square$

## VI.5 Der Schnitt-Ort

— kommt später —

**Lemma VI.5.17.** *Sei  $M$  eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ . Dann gilt*

$$\text{inrad}(p) = \min_{X \in S_p M} s(X).$$

*Beweis.* Das Minimum wird angenommen, da  $S_p M$  kompakt ist.

— kommt später —  $\square$

## VI.6 Das Klingenberg-Lemma

Im folgenden sei  $M$  immer eine vollständige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ .

**Definition VI.6.1.** *Eine geodätische Schleife ist eine Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Man nennt  $\gamma(a)$  den Basispunkt von  $\gamma$ . Gilt zusätzlich  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ , so nennt man  $\gamma$  eine geschlossene Geodätische. Geschlossene Geodätische können zu einer periodischen Geodätischen mit Periodienlänge  $b - a$  fortgesetzt werden, die wiederum mit  $\gamma$  bezeichnet wird, falls keine Mißverständnisse zu erwarten sind.*

$$d(p, S_p) := \min_{X \in S_p M} s(X) = \text{inrad}(p).$$



**Lemma VI.6.2.** *Seien  $p, q \in M$ ,  $q \in \mathcal{S}_p$ . Es gelte  $d(p, q) = \text{injad}(p) =: r$ . Dann gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:*

- (1) *Es gibt eine Kürzeste von  $p$  nach  $q$  mit konjugierten Endpunkten.*  
 (2) *Es gibt genau zwei Kürzeste  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, r] \rightarrow M$  und  $\dot{\gamma}_1(r) = -\dot{\gamma}_2(r)$ .*

Im Fall (2) erhalten wir somit, dass  $[0, 2r] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \exp_p(t\dot{\gamma}_1(0))$  eine geodätische Schleife ist.

*Beweis des Lemmas.* Wir wollen annehmen, dass Eigenschaft (1) nicht gilt. Dann gibt es nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts mindestens zwei Kürzeste von  $p$  nach  $q$ , sagen wir  $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, r] \rightarrow M$ , beide nach Bogenlänge parametrisiert.

Wir zeigen zunächst die Behauptung:  $\dot{\gamma}(r) = -\dot{\tilde{\gamma}}(r)$ .

Um die Behauptung zu zeigen, nehmen wir  $\dot{\gamma}(r) \neq -\dot{\tilde{\gamma}}(r)$  an. Es gibt dann ein  $V \in T_q M$  mit  $\langle \dot{\gamma}(r), V \rangle < 0$  und  $\langle \dot{\tilde{\gamma}}(r), V \rangle < 0$ . Wir wählen eine Kurve  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\dot{c}(0) = V$ . Da Eigenschaft (1) nicht gilt, ist  $d \exp_p$  an den Stellen  $r\dot{\gamma}(0)$  und  $r\dot{\tilde{\gamma}}(0)$  invertierbar, und somit ist  $\exp_p$  um diese Stellen herum ein lokaler Diffeomorphismus. Für genügend kleine  $\epsilon > 0$  gibt es also glatte Wege  $\alpha, \tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_p M$  mit  $c(s) = \exp_p(\alpha(s)) = \exp_p(\tilde{\alpha}(s))$  und mit  $\alpha(0) = r\dot{\gamma}(0)$ ,  $\tilde{\alpha}(0) = r\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ . Nun definieren  $\gamma_s(t) := \exp_p((t/r)\alpha(s))$  und  $\tilde{\gamma}_s(t) := \exp_p((t/r)\tilde{\alpha}(s))$ . Die zugehörigen Variationsfelder sind Jacobi-Felder, die in 0 verschwinden und die zum Zeitpunkt  $r$  den Wert  $V$  annehmen. Nach der ersten Variations-Formel gilt für kleine positive  $s$  dann

$$L[\gamma_s] < r \quad \text{und} \quad L[\tilde{\gamma}_s] < r,$$

und andererseits  $\gamma_s(r) = c(s) = \tilde{\gamma}_s(r)$ . Wegen der Injektivität von  $\exp_p|_{B_r(0_p)}$  ergibt sich hieraus  $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$  für kleine positive  $s$ . Dies widerspricht der Stetigkeit von  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$ , und die Behauptung ist gezeigt.

Angenommen es gebe drei (verschiedene) Kürzeste  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  von  $p$  nach  $q$ . Dann ergibt sukzessive Anwendung der Behauptung den Widerspruch

$$\dot{\gamma}_1(r) = -\dot{\gamma}_2(r) = \dot{\gamma}_3(r) = -\dot{\gamma}_1(r).$$

Das Lemma folgt. □

Beispiele für (1): Sphäre  $S^m$ , für (2):  $\mathbb{R}P^m$  und  $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ . — *kommt später* —

Wir wollen diese Ergebnisse nun auf kompakte  $M$  anwenden. Wegen der Stetigkeit gilt dann  $r := \text{injad}(M) := \min_{p \in M} \text{injad}(p) > 0$ . Fixiere ein  $p$ , in dem das Minimum angenommen wird. Wähle ein  $q \in \mathcal{S}_p$  mit minimalem Abstand von  $p$ , also  $d(p, q) = r$  und für ein  $X \in \mathcal{S}_p M$  mit  $s(X) = r$  gilt  $q = \exp_p(s(X)X)$ . Die Voraussetzungen des vorangehenden Lemmas sind erfüllt: es gibt (1) eine Kürzeste mit konjugierten Endpunkten von  $p$  nach  $q$  oder (2) es gibt genau zwei Kürzeste  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  von  $p$  nach  $q$ .

Es folgt, dass dann auch  $\text{injad}(q) \leq r$ , nach Wahl von  $p$  also  $\text{injad}(q) = r = \text{injad}(p)$ . Man kann das Lemma also auch anwenden, wenn  $p$  und  $q$  vertauscht

werden. Das Lemma und die  $p$ - $q$ -vertauschte Version des Lemmas ergeben somit im Fall (2):

$$\dot{\gamma}_1(0) = -\dot{\gamma}_2(0) \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_1(r) = -\dot{\gamma}_2(r)$$

und dies bedeutet, dass die Kurve  $[0, 2r] \rightarrow M$ ,  $[0, r] \ni t \mapsto \gamma_1(t)$ ,  $[r, 2r] \ni t \mapsto \gamma_2(2r - t)$  eine geschlossene Geodätische ist.

Im Fall (1) gibt es eine Geodätische der Länge  $r$  mit konjugierten Endpunkten. Angenommen die Schnittkrümmung erfüllt  $K \leq \kappa_2 > 0$ . Dann haben wir in Proposition VI.4.1. gezeigt, dass es auf  $(0, \pi/\sqrt{\kappa_2})$  keine zu 0 konjugierten Punkte gibt, also  $r \geq \pi/\sqrt{\kappa_2}$ . Wir haben somit das Klingenberg-Lemma gezeigt. Im Klingenberg-Lemma gilt wieder die Konvention

$$\frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}} = \infty \quad \text{falls } \kappa_2 \leq 0.$$

**Theorem VI.6.3** (Klingenberg-Lemma). *Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $K \leq \kappa_2$ . Dann gibt es eine geschlossene Geodätische der Länge  $\leq 2 \operatorname{injr}ad(M)$  oder es gilt  $\operatorname{injr}ad(M) \geq \pi/\sqrt{\kappa_2}$ .*

Es können auch beide Fälle eintreten. Wir erhalten jedenfalls ein untere Abschätzung von  $\operatorname{injr}ad(M)$ :

$$\operatorname{injr}ad(M) \geq \min \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}, \frac{1}{2} \inf \{L[\gamma] \mid \gamma \text{ ist geschlossene Geodätische.}\} \right\}.$$

Im Fall  $K \leq 0$  gibt es eine geschlossene Geodätische  $\gamma$  mit  $L[\gamma] \leq 2 \operatorname{injr}ad(M)$ , und man zeigt dann leicht, dass

$$2 \operatorname{injr}ad(M) = \min \{L[\gamma] \mid \gamma \text{ ist geschlossene Geodätische.}\}.$$

Wir betrachten nun den Spezialfall von kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten gerader Dimension und mit positiver Schnittkrümmung. solche Mannigfaltigkeiten wurden schon im letzten Semester in Kapitel III untersucht. Insbesondere besagte in diesem Fall Theorem III.4.7 (Synge-Lemma), dass  $\pi_1(M) = 0$  im Fall  $M$  orientierbar und  $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  im Fall  $M$  nicht-orientierbar. Im Beweis des Synge-Lemmas haben wir zwei Teilschritt gezeigt, die wir nun hier nochmals als Lemmata formulieren:

**Lemma VI.6.4.** *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K > 0$  und sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine geschlossene Geodätische mit einem parallelen Vektorfeld  $V$  längs  $\gamma$ ,  $V(a) = V(b) \neq 0$ ,  $V(a) \perp \dot{\gamma}(a)$ . Für die Variation*

$$\gamma_s(t) := \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$$

folgt dann aus der ersten und zweiten Variationsformel

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E[\gamma_s] = 0 \quad \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E[\gamma_s] < 0.$$

**Lemma VI.6.5.** *Sei  $M$  eine orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension und sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine geschlossene Geodätische. Dann gibt es ein paralleles Vektorfeld  $V$  längs  $\gamma$  mit  $V(a) = V(b) \neq 0$ ,  $V(a) \perp \dot{\gamma}(a)$ .*

**Korollar VI.6.6.** *Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit  $0 < K \leq \kappa_2$ . Dann gilt*

$$\text{injr}(\text{rad}(M)) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}$$

*Beweis des Korollars.* Angenommen  $\text{injr}(\text{rad}(M)) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}$ , dann gibt es nach dem Klingenberg-Lemma eine geschlossene Geodätische  $\gamma : [0, 2] \rightarrow M$  mit Länge  $\leq 2 \text{injr}(\text{rad}(M))$ ,  $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv L[\gamma]/2$ . Setze  $p := \gamma(0)$ ,  $X := \dot{\gamma}(0)$ ,  $r := \|X\|$ . Wegen  $\exp_p(X) = \exp_p(-X)$  sieht man  $\text{injr}(\text{rad}(M)) = \text{injr}(p) = L[\gamma]/2 = r$ . Die Voraussetzungen der vorangehenden Lemmata sind erfüllt, und  $\gamma_s$  sei eine Variation von  $\gamma$  wie oben beschrieben. Es gibt ein  $\epsilon > 0$ , so dass wir für alle  $s \in (0, \epsilon)$  die Aussage  $L[\gamma_s] < 2 \text{injr}(\text{rad}(M))$  haben, und somit gilt dann für alle  $t \in [0, 2]$  die Abschätzung  $d(\gamma_s(t), \gamma_s(0)) < \text{injr}(\text{rad}(M))$ . Es gibt somit eine glatte Abbildung  $\tilde{\gamma} : ([0, \epsilon) \times [0, 2]) \setminus (0, 1) \rightarrow TM$  mit  $\exp \tilde{\gamma}(s, t) = \gamma_s(t)$ . Da  $\gamma_0 = \gamma$  eine Geodätische ist, gilt  $\tilde{\gamma}(t) = tX$  für  $0 \leq t < 1$  und  $\tilde{\gamma}(t) = (2-t)X$  für  $1 < t \leq 2$ .

Wähle nun ein  $\eta > 0$  mit  $\text{injr}(\text{rad}(M)) + \eta < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2}}$ . Dann ist  $\exp_q$  für alle  $q$  in einer kleinen Umgebung von  $p$  ein Diffeomorphismus von  $B_{r+\eta}(0_q)$  auf sein Bild, insbesondere ist also  $\tilde{g}_s := \exp_{\gamma_s(0)}^* g$  eine riemannsche Metrik auf  $B_{r+\eta}(0_{\gamma_s(0)}) \subset T_{\gamma_s(0)}M$ , falls  $s \in (0, \epsilon_1)$  für ein  $\epsilon_1 \in (0, \epsilon)$ . Wir identifizieren nun  $B_r(0_{\gamma_s(0)}) \subset T_{\gamma_s(0)}M$  mit  $B_r(0_p) \subset T_pM$  mittels Paralleltransport längs  $s \mapsto \gamma_s(0)$ . Dann ist  $g_s$  eine glatte Familie von riemannschen Metriken auf  $B_{r+\eta}(0_p)$ . Insbesondere gibt es ein  $\epsilon_2 \in (0, \epsilon_1)$ , so dass  $2g_s(X, X) \geq g_0(X, X)$  für alle  $X \in TB_{r+\eta}(0_p)$ .

Für ein kleines  $\delta > 0$  behaupten wir nun: Es gibt einen Weg  $\tilde{c}_\delta : [a, b] \rightarrow B_r(0_p)$  von  $(1-\delta)X$  nach  $-(1-\delta)X$  mit

$$\int_a^b \|\dot{\tilde{c}}(t)\|_{g_0} dt = L[\exp_p \circ \tilde{c}_\delta] < 4\delta r.$$

Danach werden wir zeigen, dass diese Behauptung zu einem Widerspruch führt.

Um die Behauptung zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s, t)\|_{g_s} dt = L[\gamma_s|_{[1-\delta, 1+\delta]}] < 2\delta r.$$

Andererseits gilt für  $0 < s < \epsilon_2$

$$\sqrt{2} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s, t)\|_{g_s} dt \geq \int_{1-\delta}^{1+\delta} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s, t)\|_{g_0} dt,$$

also  $\int_{1-\delta}^{1+\delta} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s, t)\|_{g_0} dt < 3\delta r$ . Wegen  $\tilde{\gamma}(s, 1-\delta) \rightarrow (1-\delta)X$  und  $\tilde{\gamma}(s, 1+\delta) \rightarrow -(1-\delta)X$  erhalten wir für kleine  $s > 0$  einen Weg wie oben behauptet, die Behauptung ist gezeigt.

Die Behauptung impliziert nun, dass  $(1 - \delta)X$  und  $-(1 - \delta)X$  auf der von  $g_0$  induzierten Distanzfunktion auf  $B_{r+\eta}(0_p)$  einen Abstand von höchstens  $4\delta r$  haben und im Limes  $\delta \rightarrow 0$  erhalten wir, dass  $X$  und  $-X$  den Abstand 0 besitzen, was offensichtlich den Widerspruch  $X = -X$  impliziert.  $\square$

Zum Abschluss des Abschnitts wollen wir erwähnen, dass diese Abschätzungen genutzt werden, um kompakte riemannsche Mannigfaltigkeiten mit  $0 < \kappa_1 \leq K \leq \kappa_2$  zu analysieren. Man kann zeigen:

**Theorem VI.6.7** (Sphären-Satz, von Rauch 1951, Berger 1960 und Klingenberg 1959). *Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $0 < \kappa_1 \leq K \leq \kappa_2$ , und gilt  $\kappa_2 < 4\kappa_1$ . Dann ist  $M$  homöomorph zu einer Sphäre.*

Wie immer bedeutet  $0 < \kappa_1 \leq K \leq \kappa_2$  das folgende: Für alle  $p \in M$  und alle Ebenen  $E \subset T_p M$  gilt

$$0 < \kappa_1 \leq K(E) \leq \kappa_2.$$

Man nennt  $\kappa_2/\kappa_1$  die Pinching-Konstante. Wenn wir  $\mathbb{C}P^n$  mit der Metrik versehen, so dass  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n, x \mapsto [x]$  eine riemannsche Submersion ist, so gilt  $\max K / \min K = 4$ . Der Sphären-Satz gilt also nicht mehr für Pinching-Konstante 4. Weitere Beispiele mit Pinching-Konstante 4 sind gewisse Metriken auf den quaternionisch-projektiven Räumen und auf der projektiven Ebene über den Oktonionen.

Wünschenswert wäre nun, im Sphären-Satz homöomorph durch diffeomorph zu ersetzen. Dies ist ein entscheidender Unterschied, denn es gibt Mannigfaltigkeiten, die Homöomorph zu einer Sphäre, aber nicht diffeomorph zu einer Sphäre sind. E. Ruh konnte den Sphären-Satz mit Diffeomorphie an Stelle von Homöomorphie für deutlich kleinere Pinching-Konstanten zeigen, aber man hat jahrelang vergeblich versucht, ein Resultat mit Pinching-Konstante 4 zu erhalten. Es war deswegen sehr erstaunlich, dass der gewünschte Satz vor kurzem gezeigt und noch deutlich verbessert werden konnte. Der Beweis nutzt den Ricci-Fluss (Unser Seminar!). Unter anderem wird nur eine lokale Pinching-Bedingung gefordert.

**Theorem VI.6.8** (Brendle und Schoen, Journal AMS, 2009). *Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass in jedem Punkt  $p$  gilt*

$$\max_{E \subset T_p M} K(E) < 4 \min_{E \subset T_p M} K(E),$$

*wobei das Minimum und das Maximum über alle Ebenen geht. Dann ist  $M$  diffeomorph zu einer Sphäre.*

Ein schöner Übersichtsartikel hierzu ist im Januar 2010 auf das Internet gelegt worden: arXiv:1001.2278.

## VI.7 Volumen-Wachstum von Sphären und Bällen

**Satz VI.7.1** (Bishop-Gromov). *Wie Satz 6.7.1 und Satz 6.7.2 in [1].*

## VI.8 Fundamentalgruppe und Volumenwachstum

— kommt später —

**Lemma VI.8.3.** *Ist  $\Gamma$  ein endliches Erzeugendensystem einer Gruppe  $G$  und  $d'$  eine links-invariante Metrik auf  $G$ , dann gibt es ein  $C \in (0, \infty)$  mit:*

- 1)  $d'(g_1, g_2) \leq Cd^{G, \Gamma}(g_1, g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$
- 2)  $N_{d'}(R) := \#\{h \in G \mid d'(h, 1) \leq R\} \geq N_{\Gamma}(CR)$

*Beweis.* — kommt später — □

— kommt später —

Sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung. Fixiere  $p \in M$ . Dann operiert  $G := \pi_1(M, p)$  auf  $P := \pi^{-1}(p)$  wie folgt:

Seien  $\tilde{p} \in P$  und  $g := [\gamma] \in \pi_1(M, p)$  gegeben, mit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . Auf Grund der Überlagerungseigenschaft gibt es genau einen Lift  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  von  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{p}$ . Setze  $g \cdot \tilde{p} := \tilde{\gamma}(0)$ . Die Operation ist unabhängig von der Wahl von  $\gamma$ , denn wenn wir  $\gamma$  homotop verändern, ändert sich  $\tilde{\gamma}(0)$  stetig, ist aber andererseits wegen  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  in der diskreten Menge  $P$ , also ist  $\tilde{\gamma}(0)$  unabhängig unter Homotopien. Somit ist diese Abbildung  $G \times P \rightarrow P$ ,  $(g, \tilde{p}) \mapsto g \cdot \tilde{p}$  wohldefiniert, und man überprüft leicht die Axiome einer Operation von links.

Wir versehen nun  $\tilde{M}$  mit der von  $M$  zurückgezogenen riemannschen Metrik und sei  $\tilde{d}$  die induzierte Distanzfunktion auf  $\tilde{M}$ .

Man fixiere nun  $p_0 \in P$ . Wir definieren für  $g_1, g_2 \in \pi_1(M)$ :

$$d(g_1, g_2) := \tilde{d}(g_1 \cdot p_0, g_2 \cdot p_0).$$

Dann ist  $d$  eine Metrik auf  $G$  im Sinne von Distanzfunktion, d.h. im Sinne metrischer Räume.

Für festes  $g \in G$  ist die Abbildung  $M \rightarrow M \ x \mapsto gx$  eine Isometrie riemannscher Mannigfaltigkeiten, und deswegen definiert dies eine Isometrie im Sinne metrischer Räume von  $(P, d)$  auf sich selbst. In anderen Worten:  $d$  ist linksinvariant.<sup>1</sup>

Der abgeschlossene Ball  $\overline{B}_{3 \operatorname{diam}(M)}(p_0)$  ist nach Hopf-Rinow das Bild von  $\overline{B}_{3 \operatorname{diam}(M)}(0_{p_0}) \subset T_{p_0} \tilde{M}$  unter  $\exp_{p_0}$ , also kompakt. Dann ist also  $\Gamma := \overline{B}_{3 \operatorname{diam}(M)}(0_{p_0}) \cap$

<sup>1</sup>Achtung  $d$  ist nicht rechts-invariant und hängt von der Wahl von  $p_0 \in P$  ab. Dies ist aber im folgenden nicht relevant.

$P$  endlich. Man sieht leicht, dass  $g \in G$  genau dann in  $\Gamma$  liegt, wenn es von einem Weg der Länge  $\leq 3 \operatorname{diam}(M)$  erzeugt wird.

**Lemma VI.8.4.**  $\Gamma$  erzeugt  $G$  und es gilt

$$d^{G,\Gamma}(g_1, g_2) \leq Cd(g_1, g_2). \quad (\text{VI.2})$$

*Beweis.* Zu gegebenen verschiedenen  $g_1, g_2 \in G$  wähle einen nach Bogenlänge parametrisierten Weg  $\tilde{\gamma} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$  von  $g_1 p_0$  nach  $g_2 p_0$  der Länge  $\ell := d(g_1, g_2)$ . Bestimme  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 0$ , mit

$$\ell/(N-1) > \operatorname{diam}(M) \geq \ell/N,$$

bzw.  $N = 1$  falls  $\operatorname{diam} M \geq \ell$ . Setze  $t_j := j\ell/N$  und  $q_j := \tilde{\gamma}(t_j)$ . Wähle einen Weg  $\tau_j$  von  $\pi(q_j)$  zu  $p$  mit  $L[\tau_j] \leq \operatorname{diam}(M)$  und lifte diesen Weg zu einem Weg  $\tilde{\tau}_j$  von  $q_j$  zu einem Punkt in  $P = G \cdot p_0$ . !!!Bild!!! O.B.d.A.  $\tilde{\tau}_0(t) = g_1 p_0$  und  $\tilde{\tau}_N(t) = g_2 p_0$  für alle  $t$ .

Dann ist  $\tilde{\gamma}_j := \tau_{j-1}^{-1} * \tilde{\gamma}|_{[t_{j-1}, t_j]} * \tau_j$  ein Weg von  $P$  nach  $P$  der Länge  $\leq 2 \operatorname{diam} + \ell/N \leq 3 \operatorname{diam}(M)$ , also ist  $\gamma_j := \pi \circ \tilde{\gamma}_j$  eine Schleife mit Basispunkt  $p$ , repräsentiert also ein Element von  $G$ . Mit  $L[\gamma_j] \leq 3 \operatorname{diam}(M)$  folgt  $\gamma_j \in \Gamma$ . Nach Konstruktion ist  $\tilde{\gamma}_1 * \dots * \tilde{\gamma}_N$  homotop zu  $\tilde{\gamma}$  und daraus folgt:  $g_1 \cdot p_0 = [\gamma_1] \cdot \dots \cdot [\gamma_N] \cdot g_2 \cdot p_0$ . Dies gilt speziell für  $g_2 = 1$ , also haben wir  $g_1$  als Produkt von  $N$  Elementen von  $\Gamma$  dargestellt. Somit erzeugt  $\Gamma$  ein endliches Erzeugendensystem.

Aus der Definition von  $N$  folgt  $N < 1 + \ell / \operatorname{diam}(M)$ . Dies impliziert

$$d^{G,\Gamma}(g_1, g_2) \leq 1 + d(g_1, g_2) / \operatorname{diam}(M) \leq \left( \frac{1}{2 \operatorname{injrad}(M)} + \frac{1}{\operatorname{diam}(M)} \right) d(g_1, g_2).$$

Hierbei haben wir genutzt, dass für verschiedene  $g_1$  und  $g_2$  die Ungleichung  $d(g_1, g_2) \geq 2 \operatorname{injrad}(M)$  gilt. Wir haben (VI.2) für  $C := \frac{1}{2 \operatorname{injrad}(M)} + \frac{1}{\operatorname{diam}(M)}$  gezeigt.  $\square$

Zusammen mit Lemma VI.8.3 erhalten wir also:

**Satz VI.8.5.** Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit,  $d$  die durch die riemannsche Metrik auf der universellen Überlagerung definierte Distanz und  $\Gamma$  ein endliches Erzeugendensystem von  $G := \pi_1(M)$ . Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\frac{1}{C} d^{G,\Gamma}(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_2) \leq C d^{G,\Gamma}(g_1, g_2) \quad g_1, g_2 \in G$$

Die zugehörigen Wachstumsfunktionen  $N_d$  und  $N_\Gamma$  erfüllen.

$$N_\Gamma(R/C) \leq N_d(R) \leq N_\Gamma(CR) \quad \forall R > 0.$$

Die Bälle im Cayley-Graph (oder in  $(G, d^{G,\Gamma})$ ) wachsen also genau dann exponentiell, bzw. polynomiell, bzw. polynomiell mit Wachstumsgrad  $k$ , wenn die Bälle in  $(G, d)$  exponentiell, bzw. polynomiell, bzw. polynomiell mit Wachstumsgrad  $k$  wachsen.

Wir vergleichen nun das Ballwachstum in  $(G, d)$  mit dem Ballwachstum in  $(\tilde{M}, d)$ . Es seien  $p \in M$  und  $\tilde{p} \in P := \pi^{-1}(p)$  fest gewählt.

Sei  $\bar{B}_r(q)$  der abgeschlossene Ball von Radius  $r$  um  $q$  in  $(\tilde{M}, d)$ . Dann ist  $P \cap \bar{B}_r(q)$  der Ball in  $(G, d)$ . Wegen der Dreiecksungleichung gilt für  $\delta := \text{injr}(M)$

$$\bigcup_{q \in P \cap \bar{B}_r(p_0)} B_\delta(q) \subset B_{r+\delta}(p_0).$$

Die Vereinigung ist disjunkt: Denn angenommen  $B_\delta(q) \cap B_\delta(q') \neq \emptyset$  für  $q, q' \in P$ , dann gibt es einen Weg  $\gamma$  von  $q$  nach  $q'$  von Länge  $< 2 \text{injr}(M)$ . Dann liftet gemäß der Definition von  $\text{injr}(M)$  die Kurve  $\pi \circ \gamma$  zu einer Kurve in  $B_\delta(0_p) \subset T_p M$  und ist somit homotop zu einer konstanten Schleife. Also  $q = q'$ .

Es folgt:

$$\text{vol}(B_\delta(p_0)) \cdot \#(P \cap \bar{B}_r(p_0)) \leq \text{vol}(B_{r+\delta}(p_0)).$$

Wir erhalten

$$N_d(r) \leq C \text{vol}(B_{r+\delta}(p))$$

Sei nun  $D := \text{diam}(M)$ . Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung

$$\bigcup_{q \in P \cap \bar{B}_{D+r}(p_0)} B_D(q) \supset B_r(p_0).$$

Es gilt dann offensichtlich

$$\text{vol}(B_D(p_0)) \cdot \#(P \cap \bar{B}_{D+r}(p_0)) \geq \text{vol}(B_r(p_0))$$

Wir erhalten

$$N_d(r + D) \geq C \text{vol}(B_r(p_0)).$$

Man beachte, dass der Basispunkt  $p_0 \in \tilde{M}$  für diese Aussagen frei gewählt werden kann.

**Satz VI.8.6.** *Die Fundamentalgruppe einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit wächst genau dann exponentiell, bzw. polynomiell, bzw. polynomiell mit Wachstumsgrad  $k$ , wenn das Volumen von Bällen mit Radien  $\geq 1$  in  $\tilde{M}$  exponentiell, bzw. polynomiell, bzw. polynomiell mit Wachstumsgrad  $k$  wächst.*

**Satz VI.8.7** (Milnor). *Sei  $M$  eine kompakte zusammenhängende  $m$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $K < 0$ . Dann hat  $\pi_1(M)$  exponentielles Wachstum.*

*Beweis.* Sei  $V_\kappa(R)$  das Volumen eines Balles von Radius  $R$  im einfach zusammenhängenden Raum konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ . Sei  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Standardsphäre. Es gelte  $K \leq -\delta < 0$ . Nach dem Satz von Hadamard ist der Injektivitätsradius von  $\tilde{M}$  unendlich, also ergibt Satz VI.7.2

$$\text{vol}(B_R(p_0)) \geq V_{-\delta}(R) = \omega_{m-1} \int_0^R \frac{\sinh(\sqrt{\delta}r)^{m-1}}{\sqrt{\delta}^{m-1}} dr \geq C_1 e^{(m-1)R/\sqrt{\delta}} - C_2$$

Somit gilt  $\text{vol}(B_R(p_0)) \geq C_3 e^{(m-1)R/\sqrt{\delta}}$  für  $R \geq 1$ . Also hat auch die Fundamentalgruppe exponentielles Wachstum.  $\square$

**Satz VI.8.8** (Milnor). *Sei  $M$  eine kompakte zusammenhängende  $m$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq 0$ . Dann hat  $\pi_1(M)$  polynomielles Wachstum mit Wachstumsgrad  $\leq m$ .*

*Beweis.* Mit dem Satz von Bishop-Gromov (Satz VI.7.1) ergibt sich:

$$\text{vol}(B_R(p_0)) \leq V_0(R) = \frac{\omega_{m-1}}{m} R^m.$$

□

Beispiele:

1.  $M = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$  hat eine Metrik mit  $\text{ric} = 0$  und die Fundamentalgruppe wächst polynomiell mit Wachstumsgrad  $m = \dim M$ .
2.  $M = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m \times S^k$  hat eine Metrik mit  $\text{ric} \geq 0$  und die Fundamentalgruppe wächst polynomiell mit Wachstumsgrad  $m < \dim M$ .
3. Sei  $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ , dann ist  $H_3/G$  eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit  $\pi_1(H_3/G) = G$ . Man zeigen, dass die Fundamentalgruppe Wachstumsgrad 4 hat. Es gibt also keine Metrik mit  $\text{ric} \geq 0$  auf  $H_3/G$ .
4. Gibt es auf einer Mannigfaltigkeit eine Metrik mit  $K < 0$ , so gibt es keine Metrik mit  $\text{ric} \geq 0$ .

## VI.9 Der Cheegersche Spaltungssatz

In diesem Abschnitt erklären wir den folgenden Satz. Zur Wiederholung: eine Gerade in  $M$  ist eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ . Es ist also eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die Kürzeste zwischen je zwei ihrer Punkte ist.

**Satz VI.9.1** (Cheeger Splitting Theorem). *Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq 0$ . Gibt es auf  $M$  eine Gerade, so ist  $M$  isomorph zum einem riemannschen Produkt der Form  $\mathbb{R} \times N$ . Hierbei ist  $N$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq 0$ .*

Wir wollen den Satz zunächst anwenden.

**Lemma VI.9.2.** *Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit unendlichem  $\pi_1(M)$ . Dann gibt es eine Gerade auf der universellen Überlagerung von  $M$ .*

**Folgerung VI.9.3.** *Ist  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq 0$ , dann ist entweder  $\pi_1(M)$  endlich, oder die universelle Überlagerung  $\widetilde{M}$  ist von der Form  $\mathbb{R} \times N$ .*



Bemerkung: Man kann dies iterieren und erhält letztendlich mit einigen zusätzlichen Argumenten:  $\widetilde{M} = \mathbb{R}^k \times N$  mit  $N$  kompakt. Siehe Sakai Kap. V, Thm 3.11.

Um eine Idee zu erhalten, wie wir den Satz beweisen können, nehmen wir einmal umgekehrt an, dass  $M = \mathbb{R} \times N$  als riemannsches Produkt. Wir versuchen eine Konstruktion zu entwerfen, die diese Produktgestalt liefert.

Man rechnet nach, indem man die Energie von Kurven betrachtet

$$d^M((t, x), (s, y))^2 = d^N(x, y)^2 + (t - s)^2 \quad (\text{VI.3})$$

Wähle  $x \in N$ . Die Kurve  $\gamma : t \mapsto (t, x)$  ist also eine Gerade. Analog zu Übungsaufgabe 30 definieren wir die Busemann-Funktionen

$$b_+(s, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} (d^M((s, y), (t, x)) - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{d^N(x, y)^2 + (t - s)^2} - t) = -s$$

und dasselbe für  $\gamma(-t)$  an Stelle von  $\gamma(t)$

$$b_-(s, y) := \lim_{t \rightarrow -\infty} (d^M((s, y), (t, x)) - t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\sqrt{d^N(x, y)^2 + (t - s)^2} + t) = s$$

Es gilt also  $b_+ = -b_-$ , und die Niveauflächen der Busemann-Funktionen sind total-geodätisch (d.h. 2. Fundamentalform verschwindet), und liefern das gewünschte  $N$ .

*Beweis von Satz VI.9.1.*

□



# Literaturverzeichnis

- [1] C. Bär, Vorlesungsskript Differentialgeometrie, Universität Potsdam, Sommersemester 2006,
- [2] H. Karcher, Riemannian comparison Constructions, appeared in Global differential geometry , 170–222, MAA Stud. Math., 27, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1989.
- [3] L. Andersson, R. Howard, Comparison and Rigidity Theorems in Semi-Riemannian Geometry, ArXiv math 9707020