Seminar über Knoten und drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2010/11

Bernd Ammann

Ein Knoten ist eine injektive stetige bzw. glatte Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^3$, wobei zwei Knoten als äquivalent betrachtet werden, wenn sie ineinander deformiert werden können (genauer, wenn sie ambient isotop sind). Wenn man allerdings zwei hinreichend komplizierte Knoten konkret angibt, ist es nicht klar, wie man entscheiden soll, ob sie äquivalent sind. Ein Ziel des Seminars ist es, polynomiale Invarianten einzuführen, die uns erlauben, viele dieser Knoten voneinander zu unterscheiden. Die Berechnung eines solchen Polynoms ist sehr einfach und kann auch Schülern problemlos erklärt werden. Um die Wohldefiniertheit zu beweisen, ist hingegen etwas mathematische Arbeit erforderlich.

Knoten wiederum hängen eng mit der Theorie der drei-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten zusammen. Im hinteren Teil des Seminars wollen wir diese Zusammenhänge studieren.

Die unten angegebene Literatur liegt zur Zeit im Sekretariat von Frau Bonn zur Ansicht bereit. Die Ergänzungsvorträge können vergeben werden, werden aber nicht für die folgenden Vorträge benötigt.

Vortrag 1. *Knoten, Isotopien, Reidemeister-Bewegungen.* NN
Einführende Definitionen, insbesondere Isotopien, ambiente Isotopien, jeweils in stetigen und in der stückweise linearen Version, zahme und wilde Knoten, Knoten-Projektionen, Reidemeister-Bewegungen [2, Chapter 1, A bis C], [1, §1]. Falls zeit bleibt [1, §2].

Vortrag 2. *Klammer-Polynom, Kauffmann-Polynom, Jones-Polynom.* NN
[1, §3].

Ergänzungs-Vortrag 1. *Das Jones-Polynom in 2 Variablen.*
[4]

Vortrag 3. *Vassiliev-Invarianten.* NN
[1, §4]

Ergänzungs-Vortrag 2. *Die Zopf-Gruppe. (V.a. für algebraisch interessierte Studenten.)*
Evtl. zwei Sitzungen: 1.) Gruppenstruktur, Erzeuger, Artinsche Relationen, Wort-Problem, Alexanders Verzopfungstheorem [1, §5.1-§6.5] 2.) Markov-Bewegungen, reine Zöpfe, [1, §6.8-§7.6]

Vortrag 4. *Heegaard-Splitting 1.* NN
Heegaard-Splitting für Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und mit Rand [1, §8-§9]

Vortrag 5. *Heegaard-Splitting 2.* NN
Heegaard-Diagramme, das Beispiel Linsenraum [1, §10-§11]

Vortrag 6. *Homöomorphismen von Flächen.* NN
Dehn-Lickorish-Theorem: Jeden orientierungserhaltenden Homöomorphismus einer Fläche kann man als Verkettung von „Dehn-Twists“ erhalten. Hieraus folgt, dass man jede orientierte kompakte 3-Mannigfaltigkeit durch Chirurgie an einer Verschlingung (=Link) aus der Sphäre erhält. [1, §12-13].

Vortrag 7. *Chirurgie von 3-Mannigfaltigkeiten.* NN
Die bereits benutzte Technik, neue 3-Mannigfaltigkeiten aus alten durch Chirurgie zu erhalten, wird weiter verfeinert. Gegenstände des Vortrags ist [1, §14-16]

Vortrag 8. *Linsenräume und Homologiesphären.* **[NN, 24.1. oder 31.1.]**
Wir wollen nun einige wichtige Beispiele diskutieren. [1, §17-18]

Vortrag 9. *Kirby-Kalkül.* **[NN, 7.2.]**
[1, §19]

Literatur

[1] Prasolov, Sossinsky, „Knots, Links, Braids and 3-Manifolds“, AMS 154

[2] Burde, Zieschang, „Knots“, de Gruyter, 1985

[3] Bär, „Elementare Differentialgeometrie“, de Gruyter $\geq$ 2000

[4] de la Harpe, Kervaire, Weber, On the Jones Polynomial, Ens. Math. 32, 1986, 271–335

[5] N. Saveliev, Lectures on the topology of 3-manifolds , de Gruyter

[6] Kauffmann, „Knots and Physics“, World Scientific