Universität Regensburg, Mathematik WS 2010/11
Prof. Dr. Bernd Ammann, Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner 19.10.2010

Topologie I
1. Übungsblatt

1. Aufgabe
Wir versehen $[-1,1]$ und S^{n-1} mit der von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie und $[-1,1] \times S^{n-1}$ mit der Produkt-Topologie dieser Topologien. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : [-1,1] \times S^{n-1} &\to S^n \\ (t,x) &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2}\, x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist surjektiv und wir betrachten die induzierte Quotienten-Topologie auf S^n. Zeigen Sie, dass diese Quotienten-Topologie mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie übereinstimmt.

2. Aufgabe
Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Raum wegzusammenhängend ist.

3. Aufgabe
Ein topologischer Raum erfüllt genau dann das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder seiner Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
Zeigen Sie: jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

4. Aufgabe

(a) Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, und sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ die Produktmenge der X_i versehen mit der Produkt-Topologie. (Die Produktmenge ist die Menge aller Familien $x = \{x_i\}_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$.) Wir haben die Projektionen auf die Faktoren $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$, $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$. Zeigen Sie, dass die Produkt-Topologie die gröbste Topologie ist, so dass die Projektionen stetig sind. (Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ zwei Topologien auf X und gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, so heißt $\mathcal{T}$ gröber als $\mathcal{T}'$.)

(b) Zeigen Sie auch, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ stetig ist, genau dann wenn jede Abbildung $\mathrm{pr}_i \circ f : Y \to X_i$ stetig ist.

(c) Wir betrachten nun den Spezialfall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $X_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in [a, b]$. Elemente in X sind dann Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sei nun $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von solchen Funktionen, $x^{(j)} \in X$. Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(j)}$ genau dann gegen x in X konvergiert, wenn sie — als Funktionenfolge betrachtet — punktweise konvergiert.

Abgabe der Lösungen am Dienstag 26.10.2010 vor der Vorlesung