Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
26.10.2010

Topologie I
2. Übungsblatt

1. Aufgabe

Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ sei mit der Teilraum-Topologie versehen. Zeigen Sie

(a) Ist X kompakt und Y abgeschlossen, dann ist auch Y kompakt.

(b) Ist Y kompakt und X hausdorffsch, dann ist Y abgeschlossen.

2. Aufgabe

(a) Ist die Vereinigung kompakter Teilmengen eines topologischen Raumes kompakt? Ist der Durchschnitt einer nicht-leeren Familie von kompakten Teilmengen eines Hausdorffraums kompakt? Ändert sich die Antwort, wenn wir nur Vereinigungen und Durchschnitte endlich vieler kompakter Teilmengen betrachten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ein Hausdorffraum X heißt genau dann *folgenkompakt*, wenn jede Folge aus X eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie: erfüllt ein kompakter Hausdorffraum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er folgenkompakt. *(Hinweis: Für eine Folge $(x_n)_n$ aus X betrachten Sie die Folge $(K_N := \overline{\{x_n \,|\, n \geq N\}})_N$.)*

3. Aufgabe

Ein topologischer Raum X heißt genau dann *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Für eine Menge mit einem Element $\{\infty\}$ betrachte man $\hat{X} := X \amalg \{\infty\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{(X \setminus K) \amalg \{\infty\} \,|\, K \subset X \text{ kompakt}\}$ eine Topologie auf $\hat{X}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ ein kompakter Hausdorffraum ist.

(c) Zeigen Sie: der Punkt ∞ ist genau dann isoliert in $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$, wenn $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist.

(d) Zeigen Sie, dass für $X = \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Standardtopologie) der Raum $\hat{X}$ zur n-dimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ homöomorph ist.

4. Aufgabe

Sei $X := C^0([0,1],[0,1])$ der Raum der stetigen Abbildungen $[0,1] \to [0,1]$, wobei $[0,1]$ seine Standardtopologie trägt. Man versehe X mit der von $[0,1]^{[0,1]}$ induzierten Produkttopologie. Zeigen Sie, dass die Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$, folgenstetig aber nicht stetig ist.

Auf diesem Blatt benutzen wir die folgenden Definitionen. Sei X ein Hausdorffraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, falls es zu jeder Umgebung U von x eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Man notiert dann $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Hausdorffräumen X und Y heißt folgenstetig, falls sie konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet. Es gilt dann u.a. $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. (Wieso?)

Abgabe der Lösungen am Dienstag 2.11.2010 vor der Vorlesung