Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
2.11.2010

Topologie I
3. Übungsblatt

Aufgabe 1
Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ bezeichne S^n die n-dimensionale Sphäre.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $\gamma : I \to S^n$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ homotop mit festen Endpunkten zu einer Kurve $\tilde{\gamma}$ ist, die stückweise aus Großkreisen besteht. *(Hinweis: Zeigen und benutzen Sie, dass γ gleichmäßig stetig ist).*

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{\gamma} : I \to S^n$ nicht surjektiv ist.

(c) Folgern Sie hieraus: $\pi_1(S^n, p) = [\underline{p}]$.

Aufgabe 2
Sei X ein weg-zusammenhängender topologischer Raum und $p \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\pi_1(X, p) = [\underline{p}]$.

(b) Jede stetige Abbildung $\alpha : S^1 \to X$ ist homotop zur konstanten Abbildung $\underline{p} : S^1 \to X$.

(c) Jede stetige Abbildung $\alpha : S^1 \to X$ kann man zu einer stetigen Abbildung $D^2 \to X$ fortsetzen.

(d) Sind $f, g : [0,1] \to X$ stetige Wege mit $f(0) = g(0)$ und $f(1) = g(1)$, so sind f und g homotop mit festen Endpunkten.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ genau dann eine Homotopie-Äquivalenz ist, wenn es stetige Abbildungen $g, h : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$ gibt.

Aufgabe 4
Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie derart, dass die Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ sowie die Inversenabbildung $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind. Sei G eine topologische Gruppe.

(a) Sei $x \in G$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Linksmultiplication $L_x : G \to G$, $y \mapsto xy$ und die Konjugationsabbildung $C_x : G \to G$, $y \mapsto xyx^{-1}$ Homöomorphismen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von G eine normale abgeschlossene Untergruppe von G ist.

(c) Zeigen Sie: ist G zusammenhängend, so wird G durch jede Umgebung des neutralen Elements erzeugt.

Abgabe der Lösungen am Dienstag 9.11.2010 vor der Vorlesung